Métodos matemáticos

avanzados para científicos e ingenieros

Colección manuales uex - 48



Santos
Bravo Yuste

48

MÉTODOS MATEMÁTICOS AVANZADOS
PARA CIENTÍFICOS E INGENIEROS

MANUALES UEX

48

SANTOS BRAVO YUSTE

MÉTODOS MATEMÁTICOS AVANZADOS
PARA CIENTÍFICOS E INGENIEROS



2006



Edita

Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones
C./ Caldereros, 2 - Planta 2ª - 10071 Cáceres (España)
Telf. 927 257 041 - Fax 927 257 046
publicac@unex.es
www.unex.es/publicaciones

ISSN 1135-870-X
ISBN 84-689-9786-2 *(de méritos)*
Depósito Legal M-30.783-2006

Diseño de portada para la colección Manuales UEX: GrafiPrim - Badajoz
Edición electrónica: Pedro Cid, S.A.
Teléf.: 914 786 125



A *Macarena*, *Irene*, *Miguel* y *Diego*.

What a fool can do, another can.
Silvanus Thompson, *Calculus Made Easy*

Prefacio

El propósito de este libro es proporcionar una descripción sencilla y *práctica* de cierta clase de métodos matemáticos que son extraordinariamente útiles para científicos e ingenieros y que, generalmente, son considerados “no elementales”. Mi idea rectora es que estas matemáticas no son difíciles si se explican con cuidado y se tienen en cuenta las dificultades conceptuales que involucran. Para que las deducciones sean lo más claras posibles no he dudado en ser parsimonioso en los desarrollos matemáticos. Sé que así el texto pierde esa tersura de lo matemáticamente elegante ...que en tantas ocasiones desconcierta a los estudiantes. Por ello he preferido guiarme por el principio de que, dado que las matemáticas y sus conceptos son inicialmente complicados, hay que ahorrarle en lo posible al alumno la tarea, a menudo mecánica y sin interés, de averiguar cómo se llevan a cabo las deducciones.

Un modo muy efectivo de enseñar y aprender métodos matemáticos es mediante ejemplos en los que estos métodos se muestran en acción. Este procedimiento es usado con profusión en este texto (hay mas de 110 ejemplos resueltos). También he incluido cuestiones y ejercicios sin resolver (más de 80) como modo de reforzar la comprensión de lo expuesto y, en ocasiones, provocar la reflexión del lector sobre las materias tratadas.

En la página web `http://www.unex.es/eweb/fisteor/santos/mma` puede encontrarse material que complementa a este libro (esta dirección se abrevia en ocasiones mediante el símbolo `www`). He incluido cuadernos de *Mathematica* que tratan sobre algunos de los tópicos contemplados en este libro. También he incluido los códigos fuente y los ejecutables de los programas QBASIC con los se ilustran algunos procedimientos numéricos que se estudian en el capítulo 4. Por último, he añadido enlaces con otras páginas web que contienen material útil relacionado con lo que discute en este libro.

Las notas que los profesores del Área de Física Teórica de la UEx hemos ido confeccionando durante años para impartir la asignatura de Métodos Matemáticos de tercer curso de Física fueron la base sobre la que se ha escrito este libro. Si estas notas se han convertido finalmente en libro se debe en buena parte a Héctor Sánchez-Pajares quien pasó a LaTeXuna muy primera versión de las mismas. También es es gran medida fruto del ánimo y apoyo incansable de Andrés Santos. Por último, es de justicia recordar la paciencia y compresión con la que mi familia ha soportado mis largas horas de ausencia durante su elaboración.

Santos Bravo Yuste
`santos@unex.es`
`http://www.unex.es/eweb/fisteor/santos`
Badajoz, primavera 2005

Índice general

Capítulo 1

Problema de Sturm-Liouville

La teoría general de autovalores, autofunciones y desarrollos en autofunciones es una de las parcelas más ricas y profundas de la matemática moderna.
F. Simmons [Sim93]

1.1. Introducción

La tarea principal en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias con *condiciones iniciales* consiste en encontrar la solución de una ecuación diferencial dada que satisface ciertas *condiciones iniciales*, es decir, encontrar la solución que satisface ciertas restricciones (condiciones) sobre el valor que esta solución y sus primeras $n-1$ derivadas (si la ecuación diferencial es de orden n) han de tomar para un *mismo* valor de la variable independiente (es decir, en un mismo *punto*).

▶ *Ejemplo 1.1*

Se puede comprobar que la ecuación diferencial

$$y''(x) + y(x) = 0,$$

con las *condiciones iniciales* (en el punto $x = 0$)

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y'(0) = 0, \end{cases}$$

tiene la solución

$$y(x) = y_0 \cos x.$$

◀

En este tema, sin embargo, nos dedicaremos al estudio de problemas de *condiciones de contorno* (CC), es decir, buscaremos y estudiaremos aquellas soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que satisfagan ciertas condiciones en los contornos del intervalo de definición de la ecuación. Para ecuaciones diferenciales ordinarias, el contorno lo constituyen los dos puntos extremos del intervalo en el que la ecuación ha de resolverse.

▶ *Ejemplo 1.2*

Queremos encontrar la función $y(x)$ solución de la ecuación diferencial

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0,$$

definida en el intervalo $[0, \pi]$ que satisface las siguientes condiciones de contorno:

$$CC : \begin{cases} y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que para $\lambda = 1$ este problema de contorno tiene la solución

$$y(x) = A \operatorname{sen} x,$$

siendo A una constante arbitraria. Sin embargo si, por ejemplo, tomamos el valor $\lambda = 2$, podemos comprobar que el sistema no tiene solución distinta de la trivial[1] $y(x) = 0$. Vemos así que el valor de λ es determinante para que el problema de condiciones de contorno tenga solución (distinta de la solución nula trivial, por supuesto).

◀

En lo que sigue, nos centraremos sobre una clase particular de ecuaciones diferenciales de segundo orden conocidas como *las ecuaciones diferenciales de Sturm-Liouville* cuyas soluciones habrán de satisfacer *ciertas* condiciones de contorno. Veremos que muchas de las funciones importantes en Ciencia e Ingeniería —habitualmente llamadas *funciones especiales*— son soluciones de este tipo de problemas (ecuaciones de Sturm-Liouville más *ciertas* condiciones de contorno). Además, como veremos en un tema posterior, los problemas de Sturm-Liouville aparecen de forma natural al resolver las ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de separación de variables.

1.2. Ecuación de Sturm-Liouville

1.2.1. Definición de la ecuación de Sturm-Liouville

Sea la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal y homogénea

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)\,y(x) + \lambda\, r(x)\, y(x) = 0} \tag{1.1}$$

definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, donde:

- $p(x), p'(x) \equiv \frac{d\,p(x)}{dx}, q(x), r(x)$ son funciones reales y continuas en $[a, b]$.[2]
- $p(x)$ y $r(x)$ no cambian de signo en el intervalo $a < x < b$. Tomaremos por convenio (y sin pérdida de generalidad) $r(x) > 0$, excepto, quizás, en puntos aislados en los que $r(x) = 0$. A la función $r(x)$ se la conoce como función peso.
- λ es un parámetro arbitrario.

Bajo estas condiciones, la ecuación (1.1) es una *ecuación de Sturm-Liouville.*

[1] Trivialmente, toda ecuación diferencial lineal definida sobre el intervalo $[a, b]$ con condiciones de contorno $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, tiene a la función nula $y(x) = 0$ como solución. Esto es trivial, de modo que a esta solución se la llama (¡cómo no!) solución trivial.

[2] La condición de continuidad en el contorno, es decir en $x = a$ o en $x = b$, puede no satisfacerse en ciertos problemas de Sturm-Liouville singulares (que se tratan en el apartado 3 de la página 4). Por ejemplo, $q(x) \sim 1/x$ en el problema de Bessel definido en el intervalo $[0, b > 0]$ (véase la sección 2.8.8, página 145).

1.2.2. Definición del problema de Sturm-Liouville

Se llama *problema de Sturm-Liouville* al problema de condiciones de contorno constituido por una ecuación de Sturm-Liouville *más ciertas* condiciones de contorno homogéneas[3] conocidas como condiciones de contorno de Sturm-Liouville.

Condiciones de contorno de Sturm-Liouville

Sean ciertas condiciones de contorno homogéneas en $x = a$ y $x = b$. Si para dos funciones cualesquiera, $f(x)$ y $g(x)$, que satisfacen estas condiciones de contorno se verifica que[4]

$$\left\{p(x)\,\left[f^*(x)\frac{dg}{dx} - g(x)\frac{df^*}{dx}\right]\right\}_a^b \equiv$$
$$p(b)\,[f^*(b)\,g'(b) - g(b)\,f^{*\prime}(b)] - p(a)\,[f^*(a)\,g'(a) - g(a)\,f^{*\prime}(a)] = 0, \quad (1.2)$$

entonces a esas condiciones de contorno se les llama *condiciones de contorno de Sturm-Liouville*. Estas condiciones de contorno se clasifican en tres clases, dando lugar a tres clases de problemas de Sturm-Liouville:

1. **Problema de Sturm-Liouville periódico/Condiciones de contorno periódicas**
   Las condiciones de contorno para este caso son

   $$\begin{cases} y(a) = y(b), \\ y'(a) = y'(b), \end{cases} \quad (1.3)$$

   y, además, ha de verificarse que

   $$p(a) = p(b). \quad (1.4)$$

   Es fácil de ver que esta última condición, que por supuesto no es condición de contorno sobre $y(x)$, es necesaria para que (1.2) se verifique. En efecto, sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que satisfacen las condiciones de contorno anteriores. En este caso

   $$\begin{aligned} f^*(a) &= f^*(b)\,, & g(a) &= g(b)\,, \\ f^{*\prime}(a) &= f^{*\prime}(b)\,, & g'(a) &= g'(b)\,, \end{aligned}$$

   y por tanto

   $$p(a)\,[f^*(a)\,g'(a) - g(a)\,f^{*\prime}(a)] = p(b)\,[f^*(b)\,g'(b) - g(b)\,f^{*\prime}(b)]. \quad (1.5)$$

   En este caso la relación (1.2) se verifica trivialmente, tal como queríamos demostrar.

2. **Problema de Sturm-Liouville regular/Condiciones de contorno regulares**
   Estas condiciones de contorno (llamadas condiciones de contorno regulares) son de la forma

   $$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, & \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, & \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.6)$$

   donde ni α_1 y α_2 son ambas cero, ni tampoco β_1 y β_2 son las dos cero.

   Hay dos subtipos especiales de condiciones de contorno regulares:

[3] Sea $\{f_i\}$ un conjunto de funciones que satisfacen una cierta condición de contorno. Decimos que esta condición de contorno es homogénea si cualquier combinación lineal de las funciones f_i satisface también esta condición de contorno.

[4] El asterisco al lado de un símbolo representa su complejo conjugado: $f^* = c - id$ siendo $f = c + id$. Por supuesto, i es la unidad imaginaria.

- *Condiciones de contorno de Dirichlet.* En este caso $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, con lo que (1.6) toma la forma
$$y(a) = y(b) = 0.$$
- *Condiciones de contorno de Neumann.* Aquí $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, y por tanto (1.6) se reduce a
$$y'(a) = y'(b) = 0.$$

Vamos ahora a demostrar que si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones de contorno (1.6), entonces se verifica la relación (1.2). Si f y g satisfacen (1.6) se tiene que

$$\alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0,$$
$$\alpha_1 g(a) + \alpha_2 g'(a) = 0.$$

Tomamos el complejo conjugado de la primera ecuación para obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$\alpha_1 f^*(a) + \alpha_2 f^{*\prime}(a) = 0,$$
$$\alpha_1 g(a) + \alpha_2 g'(a) = 0.$$

Dado que α_1, α_2 no son cero simultáneamente, debe ocurrir que

$$\begin{vmatrix} f^*(a) & f^{*\prime}(a) \\ g(a) & g'(a) \end{vmatrix} = f^*(a)\, g'(a) - f^{*\prime}(a)\, g(a) = 0 \tag{1.7}$$

para que la solución del sistema sea distinta de la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Procediendo de igual modo en el punto $x = b$ se obtiene

$$f^*(b)\, g'(b) - f^{*\prime}(b)\, g(b) = 0. \tag{1.8}$$

Obviamente, los resultados (1.7) y (1.8) hacen que, tal como queríamos demostrar, se satisfaga la relación (1.2)

3. **Problema de Sturm-Liouville singular/Condiciones de contorno singulares** Quizás el modo más correcto de definir las condiciones de contorno singulares es diciendo que son las condiciones de contorno de Sturm-Liouville, es decir, aquellas que hacen que (1.2) se verifique, y que no son ni regulares ni periódicas. Estas condiciones suelen involucrar intervalos infinitos o semiinfinitos, o funciones $p(x)$ que se anulan en los contornos, o coeficientes de la ecuación de Sturm-Liouville que se hacen infinitos en un contorno[5] (en $x = a$, por ejemplo) o en los dos contornos, o bien condiciones que exigen que en los contornos la solución buscada sea continua, o acotada, o que diverja (vaya a infinito) de un modo más lento que determinada función.[6]

   Por ejemplo, supongamos que a y b son finitos y que
$$p(a) = p(b) = 0\,. \tag{1.9}$$
   Entonces $x = a$ y $x = b$ son puntos singulares[7] de la ecuación de Sturm-Liouville (1.1), como es evidente sin más que reescribir (1.1) así:
$$y''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} y'(x) + \frac{q(x)}{p(x)} y(x) + \lambda \frac{r(x)}{p(x)} y(x) = 0.$$

[5] Un ejemplo es la ecuación de Bessel en $x = 0$.

[6] Un ejemplo de esta última posibilidad se da en la ecuación de Hermite: véase la ecuación (2.139), página 115.

[7] Se dice que x_0 es un punto ordinario de la ecuación $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x) = 0$ si $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en x_0 (es decir, si tienen un desarrollo en serie de potencias válido en algún entorno de x_0). En este caso, la solución $y(x)$ es también regular (analítica) en este punto. Al punto que no es regular se le llama punto singular. Puede encontrarse una discusión accesible sobre las soluciones de ecuaciones diferenciales en torno a puntos regulares y singulares en las secciones 28, 30 y 31 de [Sim93].

Esto significa que, *en general*, las soluciones serán también singulares en estos puntos. Pues bien, en el problema Sturm-Liouville singular que estamos considerando estamos interesados sólo en aquellas soluciones que sean regulares en todo el intervalo finito $[a, b]$ (incluyendo los extremos $x = a$, $x = b$). Esto significa que $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ existen y son finitas en $x = a$ y $x = b$. Es fácil ver que en este caso, la ecuación (1.2) se verifica trivialmente. En efecto, es evidente que

$$p(a)\,[f^*(a)\,g'(a) - g(a)\,f^{*\prime}(a)] = 0,$$
$$p(b)\,[f^*(b)\,g'(b) - g(b)\,f^{*\prime}(b)] = 0,$$

puesto que $p(a) = p(b) = 0$ y $f(x)$, $f'(x)$, $g(x)$ y $g'(x)$ son finitas en $x = a$ y $x = b$ al ser funciones regulares en estos puntos. Por consiguiente, también en este caso, se verifica la ecuación (1.2). En definitiva, encontramos que las condiciones de contorno singulares

$$\begin{cases} p(a) = 0, \\ p(b) = 0, \\ y(x) \text{ regular en } x = a, b, \end{cases} \tag{1.10}$$

son condiciones de contorno de Sturm-Liouville.

▷ ***Ejercicio*** *1.1*

Otro ejemplo de condiciones de contorno singulares es

$$\begin{aligned} &p(a) = 0, \\ &y(x) \text{ regular en } x = a, \\ &p(b) \neq 0, \\ &\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{aligned}$$

Justifica que si dos funciones f y g satisfacen estas condiciones de contorno entonces la relación (1.2) *se satisface.*

▶ *Ejemplo 1.3*

La ecuación de Legendre $(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0$, con $-1 \leq x \leq 1$ es una ecuación de Sturm-Liouville singular en $x = \pm 1$ cuyas soluciones son también, en general, singulares en $x = \pm 1$. Por tanto, si imponemos la condición de contorno de que la solución sea regular en los extremos $x \pm 1$, entonces, en general, el problema no tendrá solución. Decimos "en general" porque para determinados valores de λ, en concreto, para $\lambda = l(l+1)$ con $l = 0, 1, 2 \cdots$, la ecuación de Legendre sí tiene solución regular en $x \pm 1$ (pueden encontrarse más detalles en la sección 2.3.1, página 79). Estas soluciones son polinomios, conocidos como polinomios de Legendre, que se estudiarán en la sección 2.3.

▷ ***Ejercicio*** *1.2*
Comprueba que el polinomio de Legendre $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ es una solución regular *de la ecuación de Legendre cuando $\lambda = 6$.*

◀

En los tres tipos de problemas de Sturm-Liouville que acabamos de discutir sólo existe solución (distinta de la trivial) si el parámetro λ toma valores restringidos a un cierto conjunto. A estos valores se los conoce como *autovalores* y a las soluciones correspondientes se las llama *autofunciones*.

▶ *Ejemplo 1.4*

Queremos resolver el problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0, \tag{1.11a}$$

con las condiciones de contorno

$$CC: \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.11b}$$

Es decir, queremos encontrar *todos* los valores posibles (autovalores) de λ que hagan que la ecuación (1.11a) tenga soluciones (autofunciones) que satisfagan las condiciones de contorno (1.11b). Por supuesto, también queremos hallar cuáles son estas autofunciones.
Las condiciones de contorno (1.11b) son regulares con $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_1 = \beta_2 = 1$. Por tanto, éste es un problema de Sturm-Liouville *regular* en el que

$$\begin{aligned} p(x) &= 1, \\ q(x) &= 0, \\ r(x) &= 1. \end{aligned}$$

Vamos a discutir por separado los casos en los que $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ y $\lambda > 0$.

• Si $\lambda = 0$, la solución general de la ecuación (1.11a) es $y(x) = Ax + B$. Pero $y(0) = 0$ exige $B = 0$, es decir, la condición de contorno de la izquierda exige que la solución para $\lambda = 0$, si existe, tenga la forma $y(x) = Ax$. Pero, la condición de contorno a la derecha $0 = y'(\pi) = A\pi$, exige $A = 0$. Es decir, el único modo de que esta solución satisfaga las condiciones de contorno (1.11b) es si $A = B = 0$. Es decir, la única solución posible es la trivial $y(x) = 0$ si $\lambda = 0$.

• Si $\lambda < 0$, la solución general de la ecuación de Sturm-Liouville (1.11a) es

$$y(x) = A \cosh \sqrt{-\lambda} x + B \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} x.$$

Si en esta solución tomamos $x = 0$ obtenemos que $y(0) = A$. Por ello, la condición de contorno $y(0) = 0$ implica $A = 0$. Por tanto, encontramos que la forma general de la solución de la ecuación (1.11a) es

$$y(x) = B \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} x,$$

y por tanto

$$y'(x) = \sqrt{-\lambda}\, B \cosh \sqrt{-\lambda} x.$$

Imponiendo la segunda condición de contorno, encontramos

$$y'(\pi) = 0 \Rightarrow B\sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda}\pi = 0.$$

Esta relación se verificará si se cumple al menos una de estas tres posibilidades:

$$\begin{aligned} \cosh \sqrt{-\lambda}\pi &= 0, \\ \sqrt{-\lambda} &= 0, \\ B &= 0. \end{aligned}$$

La última opción, $B = 0$, conduce a la solución trivial. La segunda, $\lambda = 0$ la desechamos pues no satisface la suposición inicial de que $\lambda < 0$ (además la posibilidad $\lambda = 0$ ya fue analizada antes y encontramos que conducía a la solución trivial). La primera opción $\cosh \sqrt{-\lambda}\pi = 0$ es imposible si $\lambda < 0$. En definitiva,

para $\lambda < 0$ no existe ninguna solución posible [aparte de la solución nula trivial $y(x) = 0$] del problema de Sturm-Liouville (1.11).

- Si $\lambda > 0$, la solución general de la ecuación de Sturm-Liouville (1.11a) es

$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}x.$$

Si en esta solución tomamos $x = 0$ obtenemos que $y(0) = A$. Por ello, la condición de contorno $y(0) = 0$ implica $A = 0$. Por tanto, encontramos que la forma general de la solución de la ecuación (1.11a) es

$$y(x) = B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}x,$$

y por tanto

$$y'(x) = \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}x.$$

Imponiendo la segunda condición de contorno, encontramos

$$y'(\pi) = 0 \Rightarrow B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0.$$

Esta relación se verificará si se cumple al menos una de estas tres posibilidades:

$$\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0,$$
$$\sqrt{\lambda} = 0,$$
$$B = 0.$$

La última opción, $B = 0$, conduce a la solución trivial. La segunda, $\lambda = 0$, la desechamos pues no satisface la suposición inicial de que $\lambda > 0$. Nos queda por analizar la primera opción: $\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$. En este caso, se tiene que

$$\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pm(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1.12}$$

Concluimos que sólo cuando $\lambda = \lambda_n \equiv (n + 1/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ el problema de Sturm-Liouville tiene solución. Esta solución es la función

$$\psi_n(x) = B\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) = B\,\mathrm{sen}\left[\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\,x\right] \tag{1.13}$$

donde B es una constante cualquiera. El número λ_n es un autovalor y $\psi_n(x)$ la autofunción correspondiente a este autovalor, del problema de Sturm-Liouville (problema de autovalores y autofunciones) dado por las ecuaciones (1.11a) y (1.11b).

◀

En el ejemplo 1.4 anterior hemos visto que el problema de Sturm-Liouville (1.11) sólo podía resolverse para ciertos valores concretos de λ que hemos llamado autovalores y denotado por λ_n. La solución que encontramos era $B\,\mathrm{sen}\,[(n + 1/2)\,x]$. Como B es cualquier constante, vemos que, estrictamente hablando, hay un número infinito de soluciones no nulas del problema de Sturm-Liouville cuando $\lambda = \lambda_n$ (tantas soluciones como valores posibles de B). Sin embargo, en el contexto de la teoría de los problemas de autovalores y autovectores (en la que se incluye la teoría de Sturm-Liouville), todas las funciones anteriores son la *misma* autofunción. Por ejemplo, $\mathrm{sen}\,[(n + 1/2)\,x]$, $2\,\mathrm{sen}\,[(n + 1/2)\,x]$ y $\pi\,\mathrm{sen}\,[(n + 1/2)\,x]$ son tres modos distintos de escribir la *misma* autofunción. Es decir, "dos" autofunciones que difieran sólo en un factor constante son en realidad la misma autofunción. Ahora podemos entender por qué nos quedamos sólo con uno de los dos signos de $\sqrt{\lambda}$ en (1.12), digamos el positivo, y no consideramos el signo opuesto a la hora de hallar las autofunciones $\psi_n(x)$. La razón es que $\mathrm{sen}\,[(n + 1/2)\,x]$ y $\mathrm{sen}\,[-\,(n + 1/2)\,x] = -\,\mathrm{sen}\,[(n + 1/2)\,x]$ son la misma autofunción al diferir sólo en la constante -1. Esto también justifica que habitualmente, por razones de sencillez o economía de escritura, digamos que la autofunción correspondiente a λ_n es simplemente $\psi_n(x) = \mathrm{sen}\,[(n + 1/2)\,x]$ sin incluir una constante multiplicativa arbitraria.

Otra definición de problema de Sturm-Liouville singular

Al comienzo de la sección 1.2.2 hemos definido el problema de Sturm-Liouville como el problema de condiciones de contorno compuesto por una ecuación de Sturm-Liouville y condiciones de contorno de Sturm-Liouville definidas como aquellas para las cuales la relación (1.2) se satisface. Esta definición es, por ejemplo, la que se usa en [Hab83, Gre98]. Sin embargo, en lo que se refiere al problema de Sturm-Liouville *singular* esta definición no es, ni mucho menos, general. Muy habitualmente los problemas de Sturm-Liouville singulares se definen simplemente como aquellos problemas de contorno en los que alguno de los coeficientes $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ de la ecuación de Sturm-Liouville se anula o se hace infinito en un extremo del intervalo, o en los que el propio intervalo es infinito [Sim93, CH62, Myi78]. Con esta interpretación, no es necesario que las funciones solución del problema de Sturm-Liouville singular satisfagan (1.2). Para entendernos, en este libro nos referiremos a estos problemas como problemas de Sturm-Liouville latos. No obstante, los problemas singulares en los que las condiciones de contorno son tales que la relación (1.2) se verifica siguen siendo muy importantes porque esta condición implica que el operador de Sturm-Liouville es hermítico (véase la sección 1.5).

► *Ejemplo 1.5*

Sea el problema de condiciones de contorno formado por la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

definida en el intervalo *infinito* $0 \leq x$ y las condiciones de contorno $y(0) = 0$, e $y(x)$ acotada para $x \to \infty$. Según la definición que damos en este libro, este no es estrictamente un problema de Sturm-Liouville singular pues las condiciones de contorno no garantizan que la relación (1.2) se satisfaga. Sin embargo, según la definición alternativa que hemos dado hace un momento, este sí es un problema de Sturm-Liouville singular (lato). La solución de este problema es, como es fácil de ver, $\phi_\lambda(x) = \text{sen}(\sqrt{\lambda})x)$ para *cualquier* $\lambda > 0$. Otro ejemplo de este tipo de problema de Sturm-Liouville se estudia en el problema 1.4.

◄

1.2.3. Generalidad de la ecuación de Sturm-Liouville

Existe una amplia clase de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden que pueden escribirse en forma de ecuación de Sturm-Liouville. Veámoslo.

Una ecuación diferencial lineal *cualquiera* de segundo orden

$$a_0(x)y'' + a_1(x)\, y' + \tilde{a}_2(x)\, y = 0,$$

se puede escribir como

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\, y' + \frac{\lambda + a_2(x)}{a_0(x)}\, y = 0, \tag{1.14}$$

donde $\tilde{a}_2(x) = \lambda + a_2(x)$. Por otro lado, la ecuación de Sturm-Liouville es de la forma

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}\, y' + \frac{q(x) + \lambda\, r(x)}{p(x)}\, y = 0. \tag{1.15}$$

Comparando (1.14) con (1.15) se ve que la primera ecuación es de tipo de Sturm-Liouville, si $p(x), q(x)$ y $r(x)$ son tales que[8]

$$\frac{a_1(x)}{a_0(x)} = \frac{p'(x)}{p(x)} \Rightarrow p(x) = \exp\left[\int^x dx'\, \frac{a_1(x')}{a_0(x')}\right] \tag{1.16}$$

y

$$\frac{\lambda + a_2(x)}{a_0(x)} = \frac{\lambda + q(x)/r(x)}{p(x)/r(x)}.$$

Es decir,

$$r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)},$$
$$q(x) = r(x)\, a_2(x) = p(x)\, \frac{a_2(x)}{a_0(x)}.$$

En definitiva, la ecuación $a_0(x)\, y'' + a_1(x)\, y' + [\lambda + a_2(x)]\, y = 0$ es equivalente a una ecuación de Sturm-Liouville (o simplemente diremos que *es* una ecuación de Sturm-Liouville) pues podemos reescribirla así:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\, \frac{d}{dx} y(x)\right] + q(x)\, y(x) + \lambda\, r(x)\, y(x) = 0 \tag{1.17}$$

si $p(x), q(x)$ y $r(x)$ están dados por

$$p(x) = \exp\left[\int^x dx'\, \frac{a_1(x')}{a_0(x')}\right], \tag{1.18a}$$
$$q(x) = p(x) \frac{a_2(x)}{a_0(x)}, \tag{1.18b}$$
$$r(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)}. \tag{1.18c}$$

Las únicas restricciones sobre $a_i(x)$ son las que se derivan de las exigencias (expuestas en la sección 1.2.1) de que $p(x), p'(x), q(x)$ y $r(x)$ han de ser continuas y de que $p(x)$ y $r(x)$ no han de cambiar de signo en el intervalo (a, b).

▷ ***Ejercicio*** *1.3*

Sustituye (1.18) *en* (1.17) *y comprueba que esta ecuación se reduce a la ecuación* (1.14).

► *Ejemplo 1.6*

Comprobemos que

$$y'' - 2y' + \lambda\, y = 0$$

es equivalente a una ecuación de Sturm-Liouville.

---

[8]La ausencia de límite inferior en la integral $\int^x dx'\, a_1(x')/a_0(x')$ significa que el valor concreto de este límite inferior no tiene importancia. Es decir, en vez de escribir $\int^x dx'\, a_1(x')/a_0(x')$ podríamos haber escrito $\int_c^x dx'\, a_1(x')/a_0(x')$ indicando que c puede tomar *cualquier* valor (siempre no sea tal que haga que la integral no exista).

La ecuación anterior es igual a la ecuación de Sturm-Liouville (1.15) si

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -2 \Rightarrow p(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \tag{1.19}$$

$$\frac{q(x) + \lambda\, r(x)}{p(x)} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} q = 0, \\ r(x) = p(x) = \mathrm{e}^{-2x}\,. \end{cases}$$

La ecuación de Sturm-Liouville es por tanto

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{e}^{-2x}\, y'(x)\right] + \lambda\, \mathrm{e}^{-2x}\, y(x) = 0. \tag{1.20}$$

La forma de esta ecuación nos sugiere otro modo menos formal de hallar esta ecuación de Sturm-Liouville: multiplicamos la ecuación original por $\sigma(x)$,

$$\sigma(x)y'' - 2\sigma(x)y' + \lambda\sigma(x)\, y = 0,$$

y nos preguntamos cuál debe ser $\sigma(x)$ para que esta ecuación diferencial sea una ecuación de Sturm-Liouville. La respuesta se encuentra exigiendo que el coeficiente de y' sea igual a la derivada del coeficiente de y'', es decir

$$-2\sigma(x) = \frac{d\,\sigma(x)}{dx} \Rightarrow \sigma(x) = \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

En (1.19) se ha escrito que la solución de $p'(x)/p(x) = -2$ es $p(x) = \exp(-2x)$ cuando la solución general es realmente $p(x) = A\exp(-2x)$ siendo A una constante cualquiera. Sin embargo, se ve inmediatamente que esta solución conduce a la misma ecuación de Sturm-Liouville, ecuación (1.20), que $p(x) = \exp(-2x)$ (¡compruébese!). Es por razones de sencillez (o economía) en la escritura por lo que no escribimos la constante A. Esta razón es la misma que nos llevó a no escribir un valor para el límite inferior de integración de la integral de la ecuación (1.16) dado que un límite de integración constante sólo contribuye con un factor constante delante de la función exponencial.

◀

1.3. Espacios vectoriales y operadores lineales

El operador de Sturm-Liouville se define como el operador diferencial lineal

$$\boxed{\mathcal{L} \equiv \frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx}\right] + \frac{q(x)}{r(x)}} \tag{1.21}$$

de modo que la ecuación de Sturm-Liouville puede escribirse como

$$\mathcal{L}\, y(x) = -\lambda\, y(x). \tag{1.22}$$

Discutiremos más adelante propiedades del problema de Sturm-Liouville en términos de espacios vectoriales y operadores lineales. Por eso damos en la siguiente sección, a modo de recordatorio, algunos resultados acerca de estos temas.[9]

[9]Se asume que estos temas son conocidos por el lector: puede verse una discusión más detallada en el capítulo 10 de [But68] y el capítulo 3 de A. Doneddu, *Álgebra y geometría*, Aguilar, Madrid, 1978.

1.3.1. Definición de espacio vectorial

Un conjunto V de elementos ψ tiene estructura de grupo con respecto a la ley de composición interna + (suma) si cumplen las siguientes propiedades:

1. Propiedad asociativa:
$$\psi_1 + (\psi_2 + \psi_3) = (\psi_1 + \psi_2) + \psi_3.$$

2. Existencia de elemento neutro **0** definido por la relación
$$\psi + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \psi = \psi.$$
Al elemento **0** también se le llama elemento nulo.

3. Todo elemento ψ posee su simétrico $-\psi$:
$$\psi + (-\psi) = \mathbf{0}.$$

En este caso se dice que $(V, +)$ tiene estructura de grupo. El grupo es abeliano o conmutativo si además cumple la propiedad conmutativa:
$$\psi_1 + \psi_2 = \psi_2 + \psi_1.$$

Un conjunto E de elementos c (escalares) posee estructura de cuerpo con respecto a las leyes de composición + (suma) y × (producto) si cumple que:

1. El conjunto tiene estructura de grupo conmutativo con respecto a +.

2. El conjunto tiene estructura de grupo con respecto a ×.

3. La ley × es distributiva con respecto a +:
$$c_1 \times (c_2 + c_3) = c_1 \times c_2 + c_1 \times c_3,$$
$$(c_1 + c_2) \times c_3 = c_1 \times c_3 + c_2 \times c_3.$$

En este caso se dice que $(E, +, \times)$ tiene estructura de cuerpo.

El grupo conmutativo V con ley de composición + de elementos ψ (elementos que llamamos vectores) es un espacio vectorial sobre el cuerpo E de elementos c (con leyes de composición + y ×) si la ley de composición externa * de V sobre E (es decir, $* : E \times V \to V$) posee las siguientes propiedades:

1. Propiedad distributiva:
$$\begin{aligned} c * (\psi_1 + \psi_2) &= c * \psi_1 + c * \psi_2, \\ (c_1 + c_2) * \psi &= c_1 * \psi + c_2 * \psi. \end{aligned} \tag{1.23a}$$

2. Propiedad asociativa:
$$(c_1 \times c_2) * \psi = c_1 * (c_2 * \psi). \tag{1.23b}$$

3. Invariancia bajo la multiplicación por la unidad:
$$1 * \psi = \psi \tag{1.23c}$$
siendo 1 el elemento unidad de E.

En lo que sigue llamaremos *producto* tanto a la ley de composición $\times$ como a $*$ y las denotaremos a las dos mediante la ausencia de símbolo, es decir,

$$c_1 \times c_2 \equiv c_1\, c_2,$$
$$c * \psi \equiv c\,\psi.$$

Aunque se usa el mismo símbolo, las operaciones $\times$ y $*$ son distintas. La situación es la misma para el símbolo $+$, pues hemos usado este símbolo para indicar dos operaciones diferentes: $\psi_1+\psi_2$, que es suma de vectores, y c_1+c_2, que es suma de escalares. También, por comodidad, denotaremos al vector nulo por 0 en vez de escribir $\mathbf{0}$.

▶ *Ejemplo 1.7*

Sea $\mathcal{V} \equiv L^2$ el conjunto de funciones $f(x)$ (en general complejas) tales que la integral $\int_a^b r(x)|f(x)|^2 dx$ existe, siendo $r(x)$ una función real siempre positiva. A estas funciones se las llama funciones de cuadrado sumable en el intervalo $[a,b]$ con respecto a la función peso $r(x)$. Ahora queremos demostrar que la suma de dos funciones es una ley de composición interna dentro del conjunto de funciones de cuadrado sumable, es decir, que sucede que $f+g \in L^2$ si $f \in L^2$ y $g \in L^2$. Sea $h(x)=f(x)+g(x)$, entonces

$$\begin{aligned} |h(x)|^2 =& [f(x)+g(x)]\,[f^*(x)+g^*(x)] \\ =& |f(x)|^2+|g(x)|^2+2\mathrm{Re}\,[f^*(x)g(x)]\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Pero

$$\mathrm{Re}\,[f^*(x)g(x)] \le |f(x)||g(x)|$$

como es fácil demostrar sin más que escribir las funciónes anteriores en polares: $f=|f|e^{i\alpha}$, $g=|g|e^{i\beta}$ de modo que $\mathrm{Re}\,[f^*(x)g(x)]=|f||g|\cos(\beta-\alpha)\le|f||g|$. Por tanto, de (1.24) se deduce que

$$|h(x)|^2 \le |f(x)|^2+|g(x)|^2+2|f(x)||g(x)| \tag{1.25}$$

Pero de la relación

$$0 \le [|f(x)|-|g(x)|]^2 = |f(x)|^2+|g(x)|^2-2|f(x)||g(x)|$$

se deduce inmediatamente que

$$2|f(x)||g(x)| \le |f(x)|^2+|g(x)|^2$$

y por tanto (1.25) implica que

$$|h(x)|^2 \le 2\left[|f(x)|^2+|g(x)|^2\right]\,. \tag{1.26}$$

Esta relación nos permite asegurar que si las integrales $\int_a^b r(x)|f(x)|^2dx$ y $\int_a^b r(x)|g(x)|^2dx$ son finitas entonces la integral $\int_a^b r(x)|h(x)|^2dx$ también es finita, es decir, hemos demostrado que si $f\in L^2$ y $g \in L^2$, entonces $h=f+g\in L^2$.
Ahora ya es trivial ver que $(L^2,+)$ es un grupo conmutativo pues conocemos de sobra que la suma de funciones satisfacen las cuatro propiedades (dadas al comienzo de la sección 1.3.1) que caracterizan a un grupo conmutativo. Por supuesto, es también bien sabido que el conjunto de los números complejos $\mathbb{C}$ tiene estructura de cuerpo con respecto a la suma y la multiplicación. Además el producto de los números complejos por funciones satisface obviamente las propiedades (1.23). Concluimos por tanto que L^2 es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números complejos.

◀

1.3.2. Definición de producto escalar

Un producto escalar o interno en el espacio vectorial V sobre el cuerpo (escalar) E es una ley de composición externa de V^2 sobre E, es decir, el producto escalar asigna un elemento del cuerpo de E a cada par de vectores ψ, φ del espacio vectorial V:

$$\text{Producto escalar} : V \times V \to E.$$

La notación que usaremos para denotarlo es (ψ, φ), es decir:

$$\text{Producto escalar de } \psi \text{ y } \varphi = (\psi, \varphi).$$

Esta operación para ser realmente un producto escalar ha de satisfacer las siguientes propiedades:

1. Propiedad distributiva:

$$(\psi, c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1(\psi, \varphi_1) + c_2(\psi, \varphi_2).$$

2. Propiedad de simetría (llamada también propiedad de simetría hermítica):

$$(\psi, \varphi) = (\varphi, \psi)^* \tag{1.27}$$

donde el asterisco indica complejo conjugado.

3.
$$(\psi, \psi) = \|\psi\|^2 \geq 0 \text{ siendo 0 si y sólo si } \psi \overset{\text{c.s.}}{=} 0. \tag{1.28}$$

La expresión $\psi \overset{\text{c.s.}}{=} 0$ significa que ψ es nulo "casi siempre"[10], es decir, que ψ es nulo siempre excepto, como mucho, en un conjunto de puntos que no modifican el valor nulo del producto escalar (ψ, ψ). A la cantidad $\|\psi\|$ se la llama norma de ψ.

Utilizaremos muy a menudo la notación de Dirac del producto escalar en la cual se escribe $\langle\psi|\varphi\rangle$ en vez de (ψ, φ), es decir,

$$(\psi, \varphi) \equiv \langle\psi|\varphi\rangle \tag{1.29}$$

Dos vectores φ y ψ decimos que son ortogonales entre sí (o, simplemente, ortogonales) cuando su producto escalar es cero:

$$\psi \text{ y } \varphi \text{ ortogonales} \Leftrightarrow \langle\psi|\varphi\rangle = 0\,. \tag{1.30}$$

$\triangleright$ ***Ejercicio*** *1.4*

1. *Demuestra que la ley de composición externa $(\psi, \varphi) = \int_a^b r(x)\psi^*(x)\varphi(x)dx$, donde $r(x) > 0$, es un producto escalar sobre el espacio vectorial L^2 descrito en el ejemplo 1.7 de la página 12.*
2. *En la propiedad 3, ecuación* (1.28)*, se da por supuesto que la norma es un número real. Justifica que esto es cierto.*

[10] En inglés, "almost everywhere".

1.3.3. Operadores lineales. Operadores hermíticos

Los operadores son "funciones" que actúan dentro del espacio vectorial, es decir, transforman un vector en otro vector:

$$\psi \xrightarrow{\mathbb{A}} \phi \Leftrightarrow \mathbb{A}\,\psi = \phi.$$

Un operador $\mathbb{A}$ es lineal si

$$\mathbb{A}\,(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\,\mathbb{A}\,\psi_1 + c_2\,\mathbb{A}\,\psi_2, \quad \forall c_1, c_2, \psi_1, \psi_2.$$

▷ ***Ejercicio*** *1.5*

Comprueba que el operador D_n definido por la relación $D_n[y(x)] \equiv \dfrac{d^n}{dx^n}y(x)$ es lineal para todo n y que el operador P_n definido por $P_n[y(x)] \equiv y^n(x)$ no es lineal si $n \neq 1$.

Todo operador lineal $\mathbb{A}$ tiene asociado su operador adjunto $\mathbb{A}^\dagger$ en el espacio vectorial V. El operador adjunto $\mathbb{A}^\dagger$ se define como aquel que verifica que

$$(\varphi, \mathbb{A}\psi) = (\psi, \mathbb{A}^\dagger\varphi)^*, \quad \forall \psi, \varphi \in V \tag{1.31}$$

o, en notación de Dirac,

$$\langle\varphi|\mathbb{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\mathbb{A}^\dagger|\varphi\rangle^*, \quad \forall \psi, \varphi \in V. \tag{1.32}$$

Si un operador es igual a su adjunto, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$, se llama *autoadjunto* o *hermítico*.[11]

Al vector ψ_n que satisface la relación

$$\mathbb{A}\,\psi_n = \lambda_n\psi_n \tag{1.33}$$

se le llama autovector de $\mathbb{A}$, siendo λ_n su autovalor correspondiente. Al conjunto de autovalores $\{\lambda_n\}$ se le conoce como *espectro* del operador $\mathbb{A}$.

Autovalores y autovectores de operadores hermíticos

Sean ψ_n y ψ_m dos autovectores (no nulos) de $\mathbb{A}$ cuyos autovalores son, respectivamente, λ_n y λ_m:

$$\mathbb{A}\psi_n = \lambda_n\psi_n, \tag{1.34}$$

$$\mathbb{A}\psi_m = \lambda_m\psi_m. \tag{1.35}$$

En la notación de Dirac los vectores ϕ, ψ,..., se representan por $|\phi\rangle$, $|\psi\rangle$, ... Con esta notación las ecuaciones anteriores se reescriben así:

$$\mathbb{A}|\psi_n\rangle = \lambda_n|\psi_n\rangle, \tag{1.36}$$

$$\mathbb{A}|\psi_m\rangle = \lambda_m|\psi_m\rangle, \tag{1.37}$$

[11] Siguiendo una acreditada tradición en Física [véase, por ejemplo, *Quantum mechanics*, por C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Laloë (John Wiley & Sons, New York, 1993)] usamos los términos "hermítico" y "autoadjunto" como sinónimos. No obstante, ambos términos no son estrictamente equivalentes. La distinción es algo sutil: véanse, por ejemplo, los artículos "Self-adjoint extensions of operators and the teaching of quantum mechanics" por G. Bonneau, J. Faraut y G. Valent, *Am. J. Phys.*, vol. 69, 322 (2001), y "Operators domains and self-adjoint operators" por V. S. Araujo, F. A. B. Coutinho y J. F. Perez, *Am. J. Phys.*, vol. 72, 203 (2004). Si nos acogiéramos a estas sutilezas, a lo largo de este texto deberíamos cambiar el término "hermítico" por "autoadjunto" puesto que asumimos siempre que el dominio de acción del operador directo y su operador adjunto (es decir, el espacio vectorial sobre el que actúan) es el mismo.

de modo que

$$\langle\psi_m|\mathbb{A}|\psi_n\rangle = \langle\psi_m|\lambda_n|\psi_n\rangle = \lambda_n\,\langle\psi_m|\psi_n\rangle. \tag{1.38}$$

Calculemos ahora $\langle\psi_m|\mathbb{A}^\dagger|\psi_n\rangle$. Haciendo uso de (1.32) vemos que $\langle\psi_m|\mathbb{A}^\dagger|\psi_n\rangle = \langle\psi_n|\mathbb{A}|\psi_m\rangle^*$ y, a partir de (1.37), obtenemos

$$\langle\psi_m|\mathbb{A}^\dagger|\psi_n\rangle = \lambda_m^*\,\langle\psi_n|\psi_m\rangle^* = \lambda_m^*\,\langle\psi_m|\psi_n\rangle. \tag{1.39}$$

donde en la última igualdad hemos empleado la propiedad de simetría (1.27) del producto escalar. Restando las expresiones (1.38) y (1.39) se tiene

$$\langle\psi_m|\mathbb{A}|\psi_n\rangle - \langle\psi_m|\mathbb{A}^\dagger|\psi_n\rangle = (\lambda_n - \lambda_m^*)\,\langle\psi_m|\psi_n\rangle. \tag{1.40}$$

Si $\mathbb{A}$ es un operador hermítico, $\mathbb{A} = \mathbb{A}^\dagger$, la expresión anterior es nula

$$0 = (\lambda_n - \lambda_m^*)\,\langle\psi_m|\psi_n\rangle.$$

Por consiguiente:

1. Si $\psi_n = \psi_m$ entonces $0 = (\lambda_n - \lambda_n^*)\,\|\psi_n\|^2$ y, por tanto, $\lambda_n = \lambda_n^*$ (es decir, λ_n es real) ya que $\psi_n \neq 0$. Esto significa que los autovalores de operadores hermíticos son *reales*, $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

2. Si $\lambda_n \neq \lambda_m$ entonces debe ocurrir que $\langle\psi_m|\psi_n\rangle = 0$. Se concluye por tanto que los autovectores asociados a autovalores distintos son *ortogonales*.

Cuando a un autovalor dado λ le corresponden M autovectores (linealmente independientes entre sí) se dice que este autovalor está M veces degenerado. Los autovectores asociados a un mismo autovalor (que en ocasiones se llaman autovectores degenerados) siempre se pueden escoger ortogonales entre sí. Un procedimiento sistemático para ello es el método de Gram-Schmidt.

1.3.4. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Hemos visto que autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales. Veamos que los autovectores degenerados correspondientes a un mismo autovalor pueden elegirse ortogonales entre sí.

Supongamos que $\tilde{\lambda}$ es un autovalor $N+1$ veces degenerado y que los $N+1$ autovectores $\{\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_N\}$ con autovalor $\tilde{\lambda}$ son *linealmente independientes* entre sí (es decir, ninguno de ellos puede expresarse como combinación lineal del resto). Estos autovectores podrían, en principio, no ser ortogonales entre sí, ya que tienen el mismo autovalor (son degenerados). Sin embargo, es posible construir un conjunto $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N\}$ de $N+1$ autovectores ortogonales entre sí, todos con el mismo autovalor $\tilde{\lambda}$, a partir de los $N+1$ autovectores $\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$. El procedimiento (método de ortogonalización de Gram-Schmidt) es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \varphi_0, \\
\psi_1 &= \varphi_1 + a_{10}\psi_0, \\
&\vdots \\
\psi_n &= \varphi_n + a_{n0}\psi_0 + a_{n1}\psi_1 + \cdots + a_{n\,n-1}\psi_{n-1}, \\
&\vdots \\
\psi_N &= \varphi_N + a_{N0}\psi_0 + a_{N1}\psi_1 + \cdots + a_{N\,N-1}\psi_{N-1},
\end{aligned} \tag{1.41}$$

donde

$$a_{nm} = -\frac{\langle\psi_m|\varphi_n\rangle}{\|\psi_m\|^2}.$$

No es difícil comprobar que $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_N\}$ es un conjunto de $N+1$ autovectores ortogonales entre sí cuyo autovalor es $\tilde{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \psi_m \rangle &= 0, \quad n \neq m, \\ \mathbb{A}\psi_n &= \tilde{\lambda}\psi_n. \end{aligned} \tag{1.42}$$

▷ ***Ejercicio*** *1.6*

Se pide:

1. *Demostrar que* $\tilde{\lambda}$ *es autovalor de* ψ_n.
2. *Comprobar que los autovectores* ψ_0, ψ_1 *y* ψ_2 *son ortogonales.*
3. *Demostrar por inducción que* $\psi_0, \psi_1, \cdots \psi_N$ *son ortogonales para cualquier* N.

1.3.5. Desarrollo en autovectores

De lo que hemos visto en las secciones 1.3.3 y 1.3.4 anteriores concluimos que si $\mathbb{A}$ es hermítico, entonces siempre se puede conseguir que sus autovectores sean ortogonales entre sí, es decir

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \|\psi_n\|^2 \delta_{mn}$$

donde δ_{mn} es la delta de Kronecker. Además, vamos a tomar como cierta esta afirmación[12]: los autovectores $\{\psi_n\}$ del operador hermítico son una base del espacio vectorial V, es decir,

$$\forall \varphi \in V, \exists \{c_1, c_2, \ldots\} \in \mathbb{C} \quad \text{tal que} \quad |\varphi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \tag{1.43}$$

donde con el símbolo $\sum_n$ queremos expresar que la suma se extiende sobre todos los autovectores de la base. Cuando la relación (1.43) se verifica se dice que los autovectores $\{\psi_n\}$ constituyen un conjunto completo de vectores del espacio vectorial.

Coeficientes del desarrollo en autovectores de un vector $|\varphi\rangle \in V$

Sea $\{\psi_n\}$ una base del espacio vectorial V de modo que cualquier vector perteneciente a este espacio se puede *expresar* como combinación lineal de esta familia,

$$|\varphi\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle, \qquad \forall \, |\varphi\rangle \in V. \tag{1.44}$$

Para hallar los coeficientes c_n multiplicamos escalarmente la expresión (1.44) por $|\psi_m\rangle$, de modo que haciendo uso de la ortogonalidad de los autovectores se obtiene que

$$\langle \psi_m | \varphi \rangle = \sum_n c_n \langle \psi_m | \psi_n \rangle = c_m \|\psi_m\|^2,$$

y por tanto

$$c_m = \frac{\langle \psi_m | \varphi \rangle}{\|\psi_m\|^2}. \tag{1.45}$$

A estos coeficientes los llamaremos coeficientes generalizados de Fourier o, simplemente, coeficientes de Fourier.

[12]Esta afirmación no es siempre verdadera. Sin embargo, sí es cierta para el operador hermítico de Sturm-Liouville $\mathcal{L}$ operando sobre el espacio vectorial de las funciones de cuadrado sumable que es lo que nos interesa en este libro (véase la seccíón 1.4). Puede verse la demostración de esta afirmación en la referencia [CH62]. Véase también la sección 9.4 de [Arf85]. Se darán más detalles sobre esto en la sección 1.4.

Descomposición espectral de un operador hermítico

La acción de un operador hermítico $\mathbb{A}$ sobre un vector *cualquiera* $|\varphi\rangle$ puede expresarse fácilmente como combinación lineal de autovectores de $\mathbb{A}$. Como hemos visto en el apartado anterior, si $\{\psi_n\}$ es la familia de autovectores de $\mathbb{A}$ entonces es una base de V y cualquier vector $|\varphi\rangle$ puede expresarse como combinación lineal de estas autofunciones:

$$|\varphi\rangle = \sum_n \frac{\langle\psi_n|\varphi\rangle}{\|\psi_n\|^2}\,|\psi_n\rangle. \tag{1.46}$$

Si se aplica el operador $\mathbb{A}$ al vector $|\varphi\rangle$ se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{A}|\varphi\rangle &= \sum_n \frac{\langle\psi_n|\varphi\rangle}{\|\psi_n\|^2}\,\lambda_n|\psi_n\rangle \\ &= \sum_n \lambda_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}|\psi_n\rangle\,\langle\psi_n|\varphi\rangle.\end{aligned} \tag{1.47}$$

Por tanto el operador $\mathbb{A}$ puede expresarse así:

$$\mathbb{A} = \sum_n \lambda_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}|\psi_n\rangle\,\langle\psi_n|. \tag{1.48}$$

Nótese que podemos afirmar que el operador $\mathbb{A}$ es igual al operador del miembro derecho de (1.48) porque ambos operadores aplicados sobre *cualquier* vector $|\varphi\rangle$ conducen al mismo resultado si la relación (1.47) es cierta. La relación (1.48) se conoce como *descomposición espectral del operador hermítico* $\mathbb{A}$.[13] Si los autovectores están normalizados, $\|\psi_n\|^2 = 1$, la relación (1.48) se convierte en

$$\mathbb{A} = \sum_n \lambda_n\,|\psi_n\rangle\,\langle\psi_n|. \tag{1.49}$$

El operador identidad $\mathbb{I}$ se define por la relación

$$\mathbb{I}|\varphi\rangle = |\varphi\rangle.$$

Es evidente que el operador identidad es hermítico y que los autovectores $\{\psi_n\}$ del operador hermítico $\mathbb{A}$ que son una base de V son también autovectores del operador identidad con autovalores iguales a 1:

$$\mathbb{I}|\psi_n\rangle = 1|\psi_n\rangle. \tag{1.50}$$

Por tanto

$$\mathbb{I} = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}|\psi_n\rangle\,\langle\psi_n|. \tag{1.51}$$

A esta ecuación se la llama relación de cierre de la base $\{\psi_n\}$.

1.4. Espacio vectorial y producto escalar en el problema de Sturm-Liouville

En las secciones siguientes aprovecharemos los resultados de la sección anterior sobre operadores y espacios vectoriales para resolver el problema de Sturm-Liouville, es decir, para resolver la ecuación de Sturm-Liouville con condiciones de contorno homogéneas de tipo Sturm-Liouville (véase la sección 1.2.2).

[13] Debiera notarse lo útil, más bien lo imprescindible, que nos ha sido la notación de Dirac para expresar la descomposición espectral de un operador [c.f. ecuación (1.48)] de un modo limpio y transparente.

Operador de Sturm-Liouville. Recuérdese que, en términos de operadores, la ecuación de Sturm-Liouville se escribe

$$\mathcal{L}\, y(x) = -\lambda\, y(x). \tag{1.52}$$

donde el operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}$ viene dado por

$$\boxed{\mathcal{L} \equiv \frac{1}{r(x)}\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{d}{dx}\right] + \frac{q(x)}{r(x)}} \tag{1.53}$$

y las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ han de satisfacer las condiciones discutidas en la sección 1.2.1 en el intervalo $a \le x \le b$ de definición del problema.

Espacio vectorial de las funciones de cuadrado sumable. Sea $L^2[a, b, r(x)]$ el conjunto constituido por todas las funciones complejas $f(x)$ que son de cuadrado sumable con respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $a \le x \le b$, es decir, aquellas funciones para las que la integral $\int_a^b r(x)|f(x)|^2\, dx$ existe (su valor es finito). Si además $f(x)$ satisface las condiciones de contorno homogéneas del problema de Sturm-Liouville, diremos que $f \in L^2_{SL}[a, b, r(x)]$, donde $L^2_{SL}[a, b, r(x)]$ es el conjunto de funciones de cuadrado sumable con respecto a $r(x)$ que satisfacen las condiciones de contorno de Sturm-Liouville. Este conjunto incluye tanto a soluciones del problema de Sturm-Liouville como a no soluciones. Debe notarse que $L^2_{SL}[a, b, r(x)]$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos dado que:

1. $(L^2_{SL}, +)$ es grupo conmutativo.
2. $(\mathbb{C}, +, \times)$ es cuerpo.
3. La ley de composición externa $\times$ de $L^2_{SL}[a, b, r(x)]$ con $\mathbb{C}$ tiene las propiedades adecuadas (distributiva, asociativa y elemento neutro).

En lo que sigue, por brevedad y siempre que no dé lugar a confusión, escribiremos L^2 en vez de $L^2[a, b, r(x)]$, L^2_{SL} en vez de $L^2_{SL}[a, b, r(x)]$, y hablaremos de funciones de cuadrado sumable sin mencionar explícitamente la función peso $r(x)$ ni el intervalo de definición $a \le x \le b$.

$\triangleright$ ***Ejercicio** 1.7*

Demuéstrese que L^2_{SL} es un espacio vectorial comprobando que satisface todas las condiciones requeridas para ello. Este ejercicio nos exige poco más que repetir los argumentos del ejemplo 1.7 de la página 12.

Producto escalar. En el espacio vectorial L^2 definimos un *producto escalar* de la siguiente forma:[14]

$$(f, g) \equiv \langle f|g\rangle = \int_a^b dx\, r(x)\, f^*(x)\, g(x). \tag{1.54}$$

A la función $r(x)$ se la llama función peso. Es fácil ver (hágase como ejercicio) que la operación (f, g) así definida satisface las tres propiedades que se exigen a un producto escalar:[15]

$$\begin{aligned}
\langle\psi|c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\rangle &= c_1\langle\psi|\varphi\rangle + c_2\langle\psi|\varphi_2\rangle,\\
\langle\varphi|\psi\rangle &= \langle\psi|\varphi\rangle^*,\\
\langle\psi|\psi\rangle &= \|\psi\|^2 \ge 0 \quad \text{donde } \|\psi\| = 0 \text{ si y sólo si } \psi \overset{\text{c.s.}}{=} 0.
\end{aligned}$$

[14] El espacio vectorial L^2 con un producto escalar definido en él es un espacio de Hilbert.

[15] El significado de $\psi \overset{\text{c.s.}}{=} 0$ se dio en la página 3.

Nuestra definición de producto escalar satisface esta última propiedad ya que, tal como vimos en la sección 1.2.1, la función peso es siempre positiva, $r(x) > 0$, excepto, como mucho, en puntos aislados del intervalo (a, b) .

Debe notarse que el hecho de que f y g sean funciones de cuadrado sumable *garantiza* la existencia del producto escalar $\langle f|g\rangle$. La demostración de este resultado lo dejamos como ejercicio.

▷ ***Ejercicio*** *1.8*

Demuestra que si $f, g \in L^2[a, b; r(x)]$ *entonces la operación* $\langle f|g\rangle$ *definida por la ecuación* (1.54) *existe (da un resultado finito). Pista: téngase en cuenta el resultado siguiente (que se debiera demostrar)*

$$f^*(x)g(x) \le |f^*(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \le \frac{1}{2}\,|f|^2 + \frac{1}{2}\,|g|^2.$$

Ya vimos que el problema de Sturm-Liouville sólo tenía solución distinta de la trivial cuando λ toma ciertos valores concretos. A estos valores los llamábamos autovalores y, a las soluciones, autovectores o autofunciones. Es claro, que esto podemos reexpresarlo así: resolver el problema de Sturm-Liouville equivale a hallar las autofunciones[16] $\psi_n \in L^2_{SL}$ y los autovalores λ_n del operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}$ dado por (1.21); estos autovalores y autofunciones satisfacen la ecuación

$$\mathcal{L}\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n. \tag{1.55}$$

1.5. El operador de Sturm-Liouville es hermítico

Vamos a ver que $\mathcal{L}$ es un operador hermítico dentro del espacio vectorial L^2_{SL}, es decir, vamos a demostrar que

$$\langle f|\mathcal{L}|g\rangle = \langle g|\mathcal{L}|f\rangle^* \tag{1.56}$$

para cualquier $f, g \in L^2_{SL}$. Para ello hacemos uso de la definición de producto escalar dada en (1.54),

$$\begin{aligned}
\langle f|\mathcal{L}|g\rangle &= \int_a^b dx\, r(x)\, f^*(x)\, \mathcal{L}\, g(x) \\
&= \int_a^b dx\, r(x)\, f^*(x)\, \frac{1}{r(x)} \left[\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\right]\, g(x) \\
&= \int_a^b dx\, f^*(x)\, \frac{d}{dx}\left(p(x)\, \frac{d}{dx}g(x)\right) + \int_a^b dx\, f^*(x)\, q(x)\, g(x).
\end{aligned}$$

Integrando por partes la primera integral se tiene

$$\langle f|\mathcal{L}|g\rangle = f^*(x)\, p(x)\frac{dg(x)}{dx}\bigg|_a^b - \int_a^b dx\, p(x)\frac{dg}{dx}\frac{df^*}{dx} + \int_a^b dx\, f^*(x)\, q(x)\, g(x). \tag{1.57}$$

De igual modo hallamos

$$\langle g|\mathcal{L}|f\rangle = g^*(x)\, p(x)\, \frac{df(x)}{dx}\bigg|_a^b - \int_a^b dx\, p(x)\frac{df}{dx}\frac{dg^*}{dx} + \int_a^b dx\, g^*(x)\, q(x)\, f(x),$$

y por tanto

$$\langle g|\mathcal{L}|f\rangle^* = g(x)\, p(x)\, \frac{df^*(x)}{dx}\bigg|_a^b - \int_a^b dx\, p(x)\frac{df^*}{dx}\frac{dg}{dx} + \int_a^b dx\, g(x)\, q(x)\, f^*(x).$$

[16] Como es habitual, llamaremos autofunciones a los autovectores del operador de Sturm-Liouville.

Restando esta última expresión de (1.57) se obtiene *la identidad o fórmula de Green*:

$$\boxed{\langle f|\mathcal{L}|g\rangle - \langle g|\mathcal{L}|f\rangle^* = \left\{ p(x) \left[f^*(x)\frac{dg}{dx} - g(x)\frac{df^*}{dx} \right] \right\}_a^b} \tag{1.58}$$

es decir

$$\langle f|\mathcal{L}|g\rangle - \langle g|\mathcal{L}|f\rangle^* = p(b)\,[f^*(b)\,g'(b) - g(b)\,f^{*\prime}(b)] - p(a)\,[f^*(a)\,g'(a) - g(a)\,f^{*\prime}(a)]. \tag{1.59}$$

Pero por definición de L^2_{SL}, si $f, g \in L^2_{SL}$, entonces f y g satisfacen condiciones de contorno de Sturm-Liouville, lo que significa (recuérdese la definición de condición de contorno de Sturm-Liouville que dimos en la sección 1.2.2) que la fórmula de Green se anula y por tanto el operador $\mathcal{L}$ es hermítico dentro del espacio vectorial L^2_{SL}. En resumen, concluimos que *las condiciones de contorno de Sturm-Liouville son simplemente aquellas que hacen que $\mathcal{L}$ sea hermítico.*

1.5.1. Autovalores y autofunciones del operador de Sturm-Liouville

Por ser $\mathcal{L}$ un operador hermítico, sus autovalores λ_n son reales y sus autofunciones $\psi_n(x)$ son ortogonales bien automáticamente porque sus autovalores son distintos, o bien por construcción (método de Gram-Schmidt) cuando las autofunciones son degeneradas.

Vamos a demostrar ahora un resultado del que deduciremos inmediatamente que todas las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville regular son no degeneradas.

Teorema 1.1 *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones que satisfacen la ecuación de Sturm-Liouville $(\mathcal{L} + \mu)y = 0$ y que además verifican la condición de contorno regular en la izquierda $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$. Entonces las funciones $f(x)$ y $g(x)$ difieren en una constante multiplicativa, es decir, $f(x) = Kg(x)$, siendo K una constante. Este resultado también es cierto si $f(x)$ y $g(x)$ verifican la condición de contorno en la derecha $\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$*

Vamos a demostrarlo. En el teorema se asume que $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las relaciones

$$(\mathcal{L} + \mu)f = 0,$$
$$(\mathcal{L} + \mu)g = 0.$$

Si multiplicamos la primera ecuación por g y la segunda por f y restamos se tiene que

$$f\mathcal{L}g - g\mathcal{L}f = 0 \tag{1.60}$$

o, en forma explícita (usando la expresión del operador $\mathcal{L}$),

$$\frac{1}{r(x)} \left\{ f(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dg}{dx}\right) - g(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right) \right\} = 0. \tag{1.61}$$

Como $r(x) > 0$, la expresión entre llaves ha de ser nula. Integrándola sobre el intervalo $[a, x]$ se tiene que

$$\int_a^x f(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dg}{dx}\right)\,dx - \int_a^x g(x)\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{df}{dx}\right)\,dx = 0.$$

Integrando por partes:

$$p(x)\,f(x)\,g'(x)\Big|_a^x - \int_a^x f'(x)\,p(x)\,g'(x)\,dx - p(x)\,f'(x)\,g(x)\Big|_a^x + \int_a^x g'(x)\,p(x)\,f'(x)\,dx = 0\,.$$

Las integrales se cancelan entre sí, de modo que sólo sobreviven los términos de contorno:

$$p(x)\,f(x)\,g'(x) - p(a)\,f(a)\,g'(a) - p(x)\,f'(x)\,g(x) + p(a)\,f'(a)\,g(a) = 0.$$

Esta fórmula se conoce como fórmula de Abel. Podemos reescribirla así:

$$p(x)\,W(x; f, g) = p(a)\,W(a; f, g) \tag{1.62}$$

donde

$$W(x; f, g) \equiv \begin{vmatrix} f(x) & f'(x) \\ g(x) & g'(x) \end{vmatrix} = f(x)\,g'(x) - g(x)\,f'(x)$$

es el wronskiano de f y g en x. Por ser el problema se Sturm-Liouville regular, se tiene que

$$\alpha_1 f(a) + \alpha_2 f'(a) = 0, \tag{1.63}$$

$$\alpha_1 g(a) + \alpha_2 g'(a) = 0. \tag{1.64}$$

Como α_1, α_2 no son simultáneamente nulas, debe ocurrir que

$$\begin{vmatrix} f(a) & f'(a) \\ g(a) & g'(a) \end{vmatrix} = W(a; f, g) = 0,$$

luego el wronskiano de f y g es nulo en a, y por tanto, según (1.62), también nulo en x, $W(x; f, g) = 0$, por lo que $f(x)$ y $g(x)$ son linealmente dependientes: $f(x) = K\,g(x)$, siendo K una constante cualquiera.[17] Por supuesto, este resultado también es válido si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen la condición de contorno regular en la derecha en vez de la condición de contorno a la izquierda.

▷ ***Ejercicio** 1.9*

Demuestra la afirmación anterior. Pista: prueba a integrar (1.61) *sobre el intervalo* $[x, b]$.

El resultado que acabamos de demostrar implica que si dos autofunciones distintas $f, g \in L^2_{SL}$ de un problema de Sturm-Liouville regular tienen el mismo autovalor (que llamaremos λ),

$$\mathcal{L}f = \lambda f,$$

$$\mathcal{L}g = \lambda g,$$

entonces estas funciones sólo difieren en un factor multiplicativo constante: $f/g = K$, siendo K una constante, es decir, f y g son la *misma* autofunción (recuérdense las consideraciones que se hicieron en la página 7 sobre este asunto).

Concluimos por tanto que en un problema de Sturm-Liouville regular a cada autovalor λ le corresponde una única autofunción $f(x)$ (salvo un factor constante arbitrario trivial). En resumen:

Teorema 1.2 *Todas las autofunciones de un problema de Sturm-Liouville regular son no degeneradas.*

Terminamos dando un resultado que no demostraremos:[18]

[17] Dos soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de la ecuación homogénea $y(x)+P(x)y'(x)+Q(x)y(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$ son linealmente dependientes si y sólo si su wronskiano $W(x; y_1, y_2)$ es idénticamente cero. Puede verse la demostración de este resultado en la sección 15 de [Sim93].

[18] Puede verse la demostración de este teorema en el apéndice A del capítulo 7 de [Sim93] o en la sección 7.2, teorema 7.2.6, de [Myi78].

Teorema 1.3 *Los problemas regulares de Sturm-Liouville tienen una secuencia infinita de autovalores* $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ *donde* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$*, es decir, hay un número infinito de autovalores existiendo uno mínimo y sin existir uno máximo. Además, las autofunciones* ψ_n*, con* $n = 0, 1, 2, \cdots$*, son reales y tienen* n *ceros en el intervalo abierto* (a, b)*.*

Ilustraremos estos resultados mediante el ejemplo siguiente.

▶ *Ejemplo 1.8*

Queremos hallar la solución del problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda\, y = 0 \qquad 0 \le x \le 1, \tag{1.65}$$

con las condiciones de contorno,

$$CC : \begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) + h\, y'(1) = 0, \quad h \ge 0. \end{cases} \tag{1.66}$$

Es claro que esto es un problema de Sturm-Liouville regular con $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ y $r(x) = 1$, es decir,

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}\,.$$

En la resolución de la ecuación de Sturm-Liouville distinguiremos tres casos:

• $\lambda = 0$. Para este caso, la solución general de la ecuación de Sturm-Liouville es $y(x) = Ax + B$ donde, A y B son constantes a determinar. Puede comprobarse sin dificultad que no existe solución posible (aparte de la trivial $y(x) = 0$) que satisfaga las condiciones de contorno (1.66).

• $\lambda < 0$. Ahora, la solución general de la ecuación de Sturm-Liouville es

$$y(x) = A\, \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\, \operatorname{senh}(\sqrt{-\lambda}x)$$

donde A y B son constantes a determinar. Puede comprobarse que, también en este caso, no existe solución posible [aparte de la trivial $y(x) = 0$] que satisfaga las condiciones de contorno (1.66). Veámoslo. De la primera condición de contorno se deduce que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Es decir,

$$y(x) = B \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda}x \tag{1.67}$$

es la única forma posible de la solución de la ecuación de Sturm-Liouville con $\lambda < 0$ que puede satisfacer la condición de contorno en $x = 0$. ¿Podrá esta solución satisfacer también la condición de contorno en el otro extremo, en $x = 1$? Si imponemos esta condición de contorno, se tiene que

$$y(1) + h\, y'(1) = 0 \Rightarrow B \operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} + h\sqrt{-\lambda}B \cosh \sqrt{-\lambda} = 0.$$

Dado que $B = 0$ conduce a la solución trivial $y(x) = 0$, la única alternativa posible es que

$$\operatorname{senh} \sqrt{-\lambda} + h\sqrt{-\lambda} \cosh \sqrt{-\lambda} = 0,$$

o bien

$$\tanh \sqrt{-\lambda} = -h\sqrt{-\lambda}\,. \tag{1.68}$$

Esta ecuación no tiene solución para $\lambda < 0$ si $h > 0$ (véase la figura 1.1).

• $\lambda > 0$. En este caso, la solución general de la ecuación de Sturm-Liouville es

$$y(x) = A \cos \sqrt{\lambda}x + B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x.$$

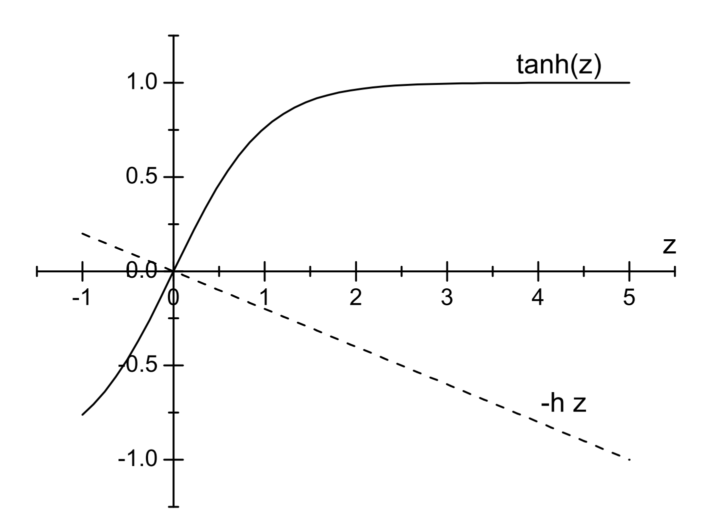


Figura 1.1: Solución gráfica de la ecuación trascendente $\tanh z = -hz$ con $z \equiv \sqrt{-\lambda}$. La única solución posible es $\lambda = 0$ si $h > 0$.

Veamos si existe algún modo de que una solución con esta forma pueda satisfacer las condiciones de contorno (1.66). De la primera condición de contorno se deduce que

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Es decir,

$$y(x) = B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x \tag{1.69}$$

es la única forma posible de la solución de la ecuación de Sturm-Liouville con $\lambda > 0$ que puede satisfacer la condición de contorno en $x = 0$. ¿Podrá esta solución satisfacer también la condición de contorno en el otro extremo, en $x = 1$? Si imponemos esta condición de contorno, se tiene que

$$y(1) + h\, y'(1) = 0 \Rightarrow B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda} B \cos\sqrt{\lambda} = 0.$$

Dado que $B = 0$ conduce a la solución trivial $y(x) = 0$, la única alternativa posible es que

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + h\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0,$$

o bien

$$\tan\sqrt{\lambda} = -h\sqrt{\lambda}. \tag{1.70}$$

Encontramos por tanto que el único modo de que el problema de Sturm-Liouville formado por la ecuación de Sturm-Liouville (1.65) más las condiciones de contorno regulares (1.66) tenga solución distinta de la trivial $y(x) = 0$ es si λ toma justamente los valores[19] solución de la ecuación (1.70). Cualquier otro valor conduce a un problema sin solución posible. La ecuación transcendente (1.70) no tiene solución explícita, pero pueden estimarse sus raíces gráficamente, como se muestra en la figura 1.2. Las soluciones z_n de la ecuación transcendente $\tan z = -hz$ nos proporcionan los autovalores de nuestro problema de Sturm-Liouville. Es claro que existe una secuencia de autovalores $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ con $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. Por ejemplo, para $h = 2$, se obtiene numéricamente que $z_{\pm 1} \simeq \pm 1'8366$, $z_{\pm 2} \simeq \pm 4'82032$, $z_{\pm 3} \simeq \pm 7'91705$, $\ldots$, y por tanto $\lambda_0 \simeq 3'37309$, $\lambda_1 \simeq 23'2355$, $\lambda_2 \simeq 62'6797$, $\ldots$ Las autofunciones correspondientes son $\psi_{n-1}(x) = \operatorname{sen} z_n x$ con $n = 1, 2, \cdots$. Nótese que z_n con $n = -1, -2, \cdots$ no conduce a autofunciones diferentes pues $\operatorname{sen} z_n x = -\operatorname{sen} z_{-n} x$. En definitiva, el conjunto de autofunciones distintas de nuestro problema viene dado por

$$\psi_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} x. \tag{1.71}$$

[19]Por supuesto, estos valores no son nada más que los autovalores del operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L} = d^2/dx^2$ que opera dentro del espacio vectorial L^2_{SL} de las funciones de cuadrado sumable que satisfacen las condiciones de contorno regulares (1.66).

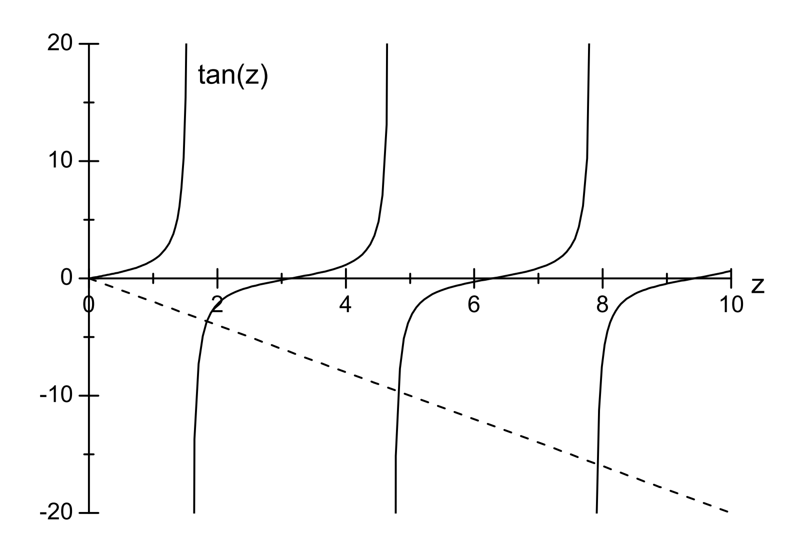


Figura 1.2: Solución gráfica de la ecuación trascendente $\tan z = -hz$ con $z = \sqrt{\lambda}$. Los autovalores se extraen del valor de las abscisas z_n de los puntos de corte de $\tan z$ (línea continua) y $-hz$ (línea discontinua) pues $\lambda_{n-1} = z_n^2$. En esta figura hemos tomado $h = 2$.

Puede verse sin demasiada dificultad que ψ_n tiene n ceros en $(0,1)$: sabemos que $\frac{2n+1}{2}\pi < \sqrt{\lambda_n} < \frac{2n+1}{2}\pi + \frac{\pi}{2} = (n+1)\,\pi$ por lo que $\psi_n = B \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x$ tiene n ceros en $(0,1)$ pues $\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{2}\pi\, x\right)$ y $\operatorname{sen}[(n+1)\,\pi\, x]$ tienen n ceros en el intervalo $0 \le x \le 1$. En las figuras 1.3 y 1.4 se muestra esto para las primeras autofunciones ψ_0 y ψ_1.

▷ ***Ejercicio*** *1.10*

1. *Demuestra que las autofunciones* (1.71) *son ortogonales entre sí. Ayuda:*

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(\alpha x) \operatorname{sen}(\beta x) dx = [\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\beta - \beta \cos\beta \operatorname{sen}\alpha]/(\beta^2 - \alpha^2)\,.$$

2. *Resuelve ahora este ejemplo suponiendo que $h < 0$. Ten en cuenta que tanto*

$$\frac{d\tan(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

como

$$\frac{d\tanh(x)}{dx} = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

son iguales a 1 en $x = 0$, de modo que las soluciones serán distintas dependiendo de si $h \ge -1$ ó $h < -1$.

◀

En los problemas de Sturm-Liouville periódicos algunos autovalores pueden estar doblemente degenerados. El siguiente problema nos da más detalles.

Teorema 1.4 *Los autovalores de un problema de Sturm-Liouville periódico forman una secuencia infinita $-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_3 \le \lambda_4 < \cdots$. El primer autovalor λ_0 no está nunca degenerado. Si $\lambda_{2m+1} < \lambda_{2m+2}$ para $m \ge 0$, entonces a cada uno de estos autovalores le corresponde una única autofunción. Pero si $\lambda_{2m+1} = \lambda_{2m+2}$ a este (único) autovalor le corresponden dos autofunciones distintas.*[20]

[20] Este último caso es justamente el que se da en el problema de Sturm-Liouville periódico que se discutirá en el ejemplo 1.11.

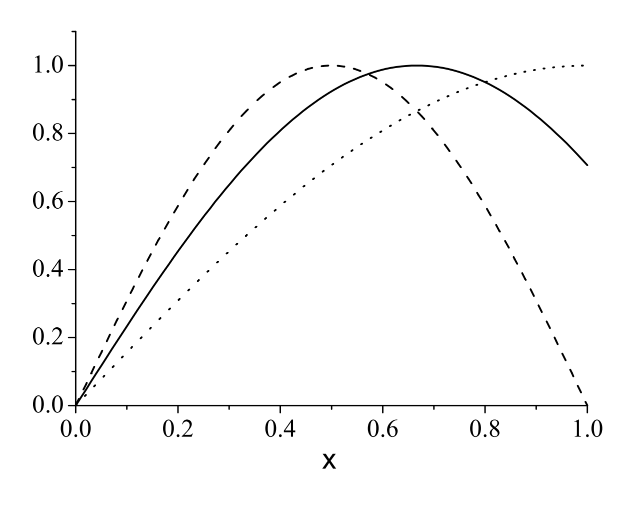


Figura 1.3: La autofunción ψ_0 (línea continua) tiene el mismo número de ceros (ninguno) que $\mathrm{sen}(\pi x)$ (línea de rayas) y $\mathrm{sen}(\pi x/2)$ (línea de puntos).

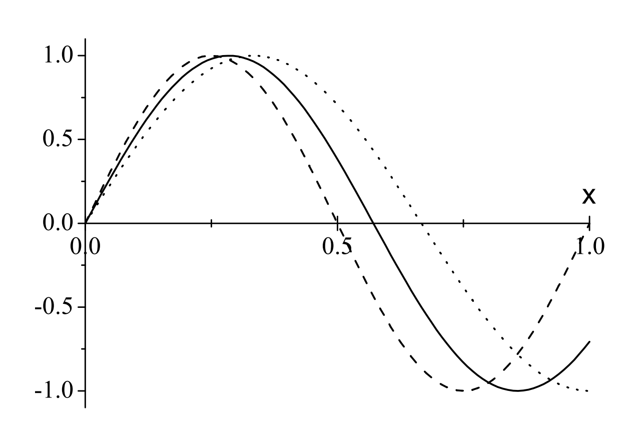


Figura 1.4: La autofunción ψ_1 (línea continua) tiene el mismo número de ceros (uno) que $\mathrm{sen}(2\pi x)$ (línea de rayas) y $\mathrm{sen}(3\pi x/2)$ (línea de puntos).

La situación para problemas de Sturm-Liouville singulares es más compleja pudiéndose encontrar espectros continuos y discretos de autovalores.

1.6. Desarrollo en serie de autofunciones

Tal como discutimos en la sección 1.3.5, dado que $\mathcal{L}$ es un operador hermítico en L^2_{SL}, sus autofunciones $\{\psi_n\}$ constituyen un conjunto completo[21] de L^2_{SL}, por lo que cualquier función $\varphi(x)$ perteneciente a L^2_{SL} puede "expresarse" como combinación lineal de las autofunciones ψ_n (véase la sección 1.3.5 en la página 16). Vamos ahora a ser un poco más precisos y discutir qué hay que entender exactamente por el término "expresarse". Para ello vamos a empezar dando unas cuantas definiciones. La primera de ellas ya se ha dado en la página 18, pero la recogemos aquí de nuevo.

Función de cuadrado sumable. Una función $\varphi(x)$ es de cuadrado sumable en el intervalo cerrado $[a, b]$ con respecto a la función peso $r(x)$ si la integral $\int_a^b dx\, r(x)\, |\varphi(x)|^2$ existe, es decir, si $\int_a^b dx\, r(x)\, |\varphi(x)|^2 < \infty$. Al conjunto de todas estas funciones lo denotaremos por $L^2[a, b; r]$ o, más abreviadamente, por L^2. En el contexto de un problema de Sturm-Liouville con función peso $r(x)$ e intervalo de definición $[a, b]$, llamaremos L^2_{SL} (o $L^2_{SL}[a, b; r]$) al conjunto de funciones pertenecientes a $L^2[a, b; r]$ que además satisfacen las condiciones de contorno de este problema de Sturm-Liouville.

Función continua a trozos. Una función $\varphi(x)$ es continua a trozos en un intervalo $a \le x \le b$ si este intervalo puede dividirse en un número finito de subintervalos $a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$ de modo tal que:

1. La función es continua dentro de cada intervalo abierto $x_i < x < x_{i+1}$ y, además,

[21] Véase la sección 9.4 de [Arf85]. Una exposición más avanzada de las cuestiones tratadas en esta sección puede encontrarse en el capitulo VI de [CH62].

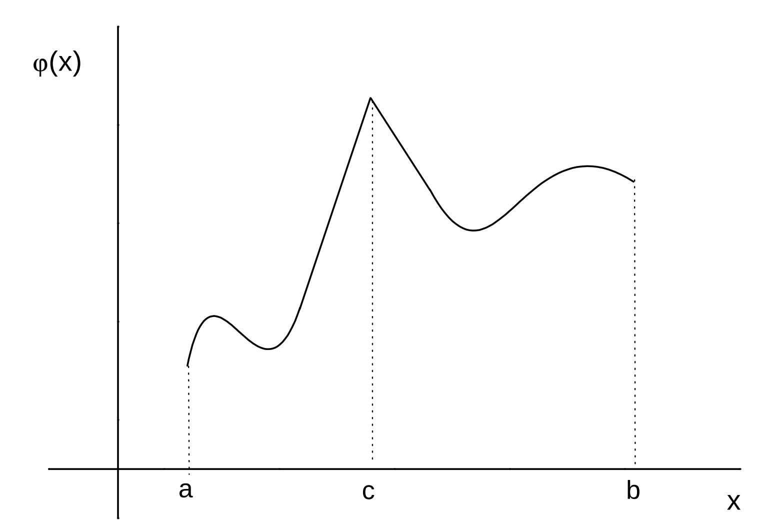


Figura 1.5: Ejemplo de una función no suave en $x = c$ pues su derivada es discontinua en $x = c$. Sin embargo sí es suave a trozos.

2. La función se aproxima a un límite finito cuando x se aproxima a los extremos de cada intervalo bien por la izquierda o por la derecha, es decir, existen los límites $\lim_{x\to x_i-}\varphi(x)$ y $\lim_{x\to x_i+}\varphi(x)$ aunque los dos sean distintos.

Función suave a trozos. Decimos que una función $\varphi(x)$ es suave a trozos en un intervalo $[a,b]$ cuando ella y su derivada son continuas a trozos en este intervalo.

▶ *Ejemplo 1.9*

La función $\varphi(x) = \cos(x) + H(x)$ donde $H(x)$ es la función salto de Heaviside[22], es suave a trozos en el intervalo $[-\pi,\pi]$, pues es suave para $x < 0$ y $x > 0$. En cambio, la función continua $\varphi(x) = |x|$ no es suave pues su primera derivada es discontinua en $x = 0$, aunque si es suave a trozos, pues su derivada es continua para $x < 0$ y para $x > 0$.

◀

Convergencia en media cuadrática. La serie

$$\sum_n c_n\psi_n(x)$$

converge a $\varphi(x)$ en media cuadrática con respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $[a,b]$ si el error cuadrático medio con respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $[a,b]$

$$E_n = \int_a^b dx\, r(x)\left|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} c_m\psi_m(x)\right|^2 = \left\|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n}\psi_m(x)\right\|^2$$

va a cero cuando n tiende a infinito, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b dx\, r(x)\left[\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} c_m\psi_m(x)\right]^2 = 0.$$

[22] $H(x) = 0$ para $x < 0$, $H(x) = 1$ para $x > 0$.

Ya estamos en condiciones de enunciar los teoremas referentes al tipo de convergencia que puede esperarse de una serie de autofunciones de un problema de Sturm-Liouville. En lo que sigue asumimos que $\{\psi_n(x)\}$ son las autofunciones correspondientes a un problema de Sturm-Liouville en el intervalo $[a, b]$ con función peso $r(x)$.

Teorema 1.5 *Si $\varphi(x)$ es una función de cuadrado sumable con respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, ($\varphi(x) \in L^2[a, b; r]$), entonces la serie de Fourier generalizada*

$$\sum_n c_n \psi_n(x) \tag{1.72a}$$

con

$$c_n = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int_a^b dx\, r(x)\, \psi_n^*(x)\, \varphi(x) \tag{1.72b}$$

converge en media cuadrática a $\varphi(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Cuando esto sucede se dice que el conjunto $\{\psi_n(x)\}$ constituye un conjunto completo con respecto a la convergencia en media cuadrática para el conjunto de funciones de $L^2[a, b; r]$.

Teorema 1.6 (Convergencia punto a punto) *Si el problema de Sturm-Liouville es regular y $\varphi(x)$ es una función suave a trozos en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces la serie de Fourier generalizada*

$$\sum_n c_n \psi_n(x) \tag{1.73a}$$

con

$$c_n = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int_a^b dx\, r(x)\, \psi_n^*(x)\, \varphi(x) \tag{1.73b}$$

converge a $[\varphi(x+) + \varphi(x-)]/2$ en cada punto del intervalo abierto (a, b). *Si $\varphi(x)$ satisface las condiciones de contorno de este problema, entonces la serie* (1.73a) *es absoluta y uniformemente convergente a la función $\varphi(x)$ en todo el intervalo* cerrado $[a, b]$.

Como es habitual, escribiremos $\varphi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$ tanto si $\sum_n c_n \psi_n(x)$ converge a $\varphi(x)$ en media cuadrática como punto a punto, es decir, usaremos el mismo símbolo "=" para indicar distintos tipos de convergencia de la serie. Las expresiones (1.72) [o (1.73)] se conocen como series de Fourier generalizadas (o desarrollos generalizados de Fourier).

▶ *Ejemplo 1.10*

Queremos hallar todas las soluciones posibles (autofunciones) del problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi\,, \tag{1.74}$$

con las condiciones de contorno

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{1.75}$$

y expresar la función $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ como serie de estas autofunciones.
La ecuación (1.74), aunque no tiene la forma de una ecuación de Sturm-Liouville, será equivalente a la ecuación de Sturm-Liouville

$$p(x)y''(x) + p'(x)y'(x) + [q(x) + \lambda r(x)]y(x) = 0$$

si

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -2, \qquad \frac{q(x) + \lambda r(x)}{p(x)} = \lambda.$$

Es fácil ver que esto se satisface si

$$p(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \quad r(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \quad q(x) = 0.$$

En definitiva, vemos que

$$\mathrm{e}^{-2x}\, y''(x) - 2\,\mathrm{e}^{-2x}\, y'(x) + \lambda\,\mathrm{e}^{-2x}\, y(x) = 0$$

es equivalente a la ecuación (1.74) (es decir, tiene las mismas soluciones) y además ahora sí tiene la forma de una ecuación de Sturm-Liouville.
La ecuación (1.74) es una ecuación lineal de coeficientes constantes de modo que su solución es sencilla. Insertamos $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ para obtener el polinomio característico

$$r^2 - 2r + \lambda = 0$$

cuya solución es

$$r_\pm = 1 \pm \sqrt{1-\lambda}.$$

Si $\lambda = 1$, la raíz es doble y la solución de (1.74) es

$$y(x) = \mathrm{e}^x (Ax + B).$$

En los demás casos con $\lambda \neq 1$ la solución es

$$y(x) = \mathrm{e}^x \left(A\,\mathrm{e}^{\sqrt{1-\lambda}\,x} + B\,\mathrm{e}^{-\sqrt{1-\lambda}\,x} \right). \tag{1.76}$$

Pasemos a buscar las soluciones que satisfacen las condiciones de contorno (1.75) distinguiendo los casos $\lambda = 1$, $\lambda < 1$ y $\lambda > 1$:

• $\lambda = 1$. Para que $y(x) = \mathrm{e}^x(Ax + B)$ satisfaga la condición de contorno $y(0) = 0$ debe ocurrir que $B = 0$, de modo que la solución sería $y(x) = A\,\mathrm{e}^x\, x$. En este caso, la otra condición de contorno $y(\pi) = 0 = A\,\mathrm{e}^\pi\,\pi$ sólo puede ser satisfecha si $A = 0$, lo que nos lleva a que, cuando $\lambda = 1$, la única solución posible de (1.74) con las condiciones de contorno (1.75) es la solución nula (solución trivial) $y(x) = 0$. Concluimos que $\lambda = 1$ no es autovalor.

• $\lambda < 1$. En este caso la solución (1.76) puede escribirse de esta forma más conveniente:[23]

$$y(x) = \mathrm{e}^x \left(A \cosh\sqrt{1-\lambda}\, x + B \operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\, x \right). \tag{1.77}$$

Es fácil ver que la condición de contorno $y(x) = 0$ exige $A = 0$, es decir exige que $y(x) = B\,\mathrm{e}^x \operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\, x$. Pero la segunda condición de contorno $y(\pi) = 0 = B\,\mathrm{e}^\pi \operatorname{senh}\sqrt{1-\lambda}\,\pi$ sólo puede verificarse si $B = 0$, lo que nos lleva a que, si $\lambda < 1$, la única solución posible de (1.74) con las condiciones de contorno (1.75) es la solución trivial $y(x) = 0$. Concluimos que no existe ningún autovalor λ menor que la unidad.

• $\lambda > 1$. En este caso la solución (1.76) puede escribirse de esta forma más conveniente:

$$y(x) = \mathrm{e}^x \left(A \cos\sqrt{\lambda-1}\, x + B \operatorname{sen}\sqrt{\lambda-1}\, x \right).$$

Es fácil ver que la condición de contorno $y(x) = 0$ exige $A = 0$, es decir exige que

$$y(x) = B\,\mathrm{e}^x \operatorname{sen}\sqrt{\lambda-1}\, x.$$

La segunda condición de contorno $y(\pi) = 0 = B\,\mathrm{e}^\pi \operatorname{sen}\sqrt{\lambda-1}\,\pi$ puede satisfacerse, bien si $B = 0$, pero esto nos llevaría a la solución trivial, o bien si

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda-1}\,\pi = 0,$$

[23] Por supuesto las constantes A y B de (1.76) no son iguales a las constantes A y B de (1.77). Habitualmente usamos las letras A, B, C,... para denotar constantes genéricas sin atribuirlas en principio ningún valor concreto.

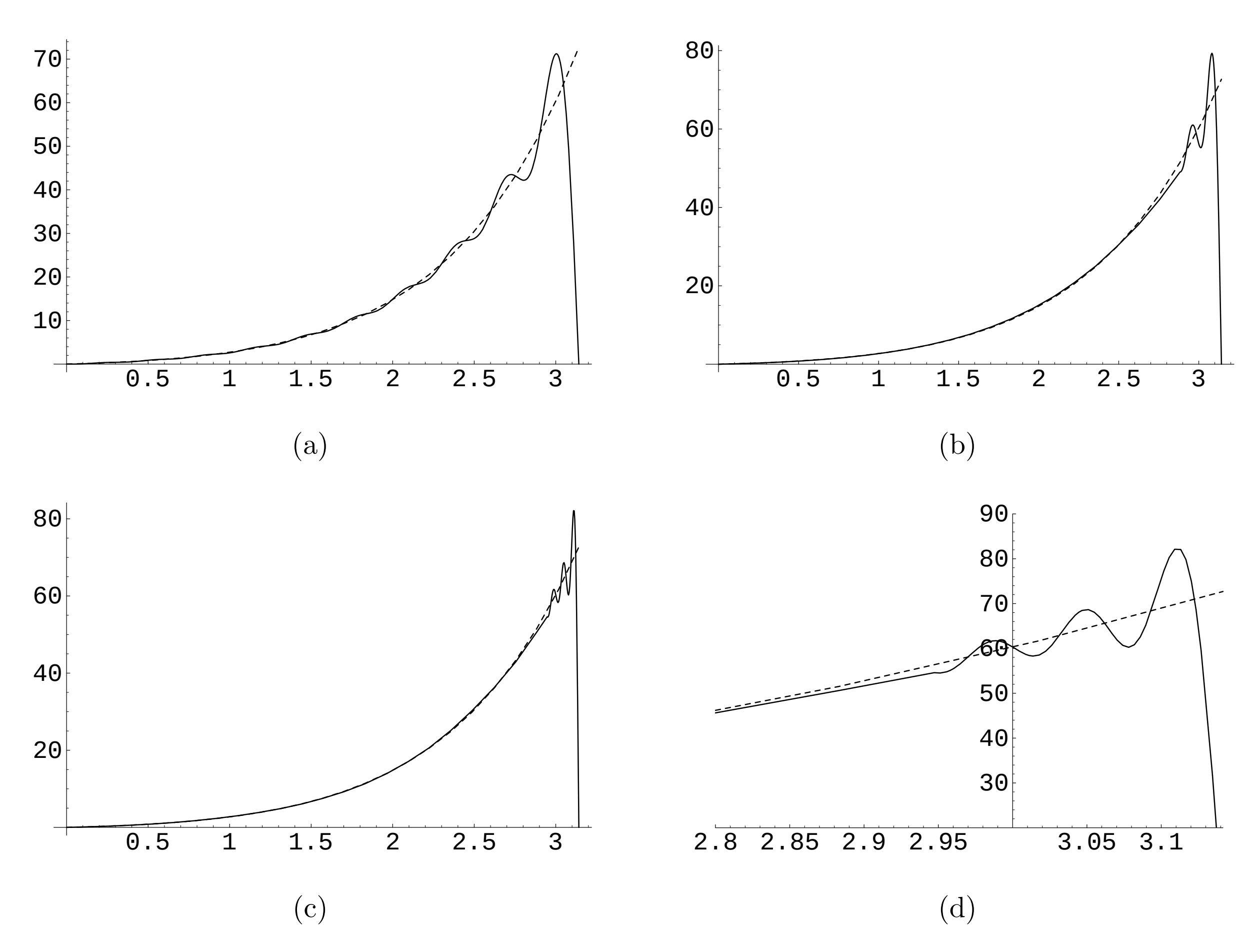


Figura 1.6: Comparación entre la función $x\,\mathrm{e}^x$ (línea de puntos) y la serie (1.81) (línea continua) en la que se retienen los primeros (a) 20 términos, (b) 50 términos, (c) 100 términos, y (d) 100 términos (detalle).

es decir, si $\sqrt{\lambda - 1} = \pm n$ con $n = 1, 2, \cdots$, es decir, si

$$\lambda = \lambda_n \equiv 1 + n^2, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{1.78}$$

No hemos incluido el caso $n = 0$ porque este valor no conduce a $\lambda > 1$. Las autofunciones correspondiente a los autovalores λ_n son por consiguiente

$$\psi_n(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n - 1}x = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} nx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Nótese que los valores $n = -1, -2, \cdots$ no conducen ni a autovalores ni a autofunciones distintas.
El desarrollo de $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ (en el intervalo $[0, \pi]$) en serie de las autofunciones $\psi_n(x)$ viene dado por

$$x\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) \qquad \text{con} \quad c_n = \frac{\langle \psi_n | x\,\mathrm{e}^x \rangle}{\|\psi_n\|^2} \tag{1.79}$$

donde

$$\langle \psi_n | x\,\mathrm{e}^x \rangle = \int_0^\pi dx\, r(x)\, \psi_n(x)\, x\ \mathrm{e}^x,$$
$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^\pi dx\, r(x)\, [\psi_n(x)]^2.$$

Pero hemos visto al comienzo de este ejemplo que la función peso $r(x)$ de este problema de Sturm-Liouville es $r(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ de modo que

$$\langle \psi_n | x\,\mathrm{e}^x \rangle = \int_0^\pi dx\; \mathrm{e}^{-2x}\; \mathrm{e}^x\; \mathrm{sen}(nx)\, x\; \mathrm{e}^x = \int_0^\pi dx\, x\; \mathrm{sen}(nx) = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{n},$$

$$\|\psi_n\|^2 = \int_0^\pi dx\; \mathrm{e}^{-2x}\; \mathrm{e}^{2x}\; \mathrm{sen}^2(nx) = \frac{\pi}{2},$$

y por tanto los coeficientes de Fourier son

$$c_n = (-1)^{n+1}\,\frac{2}{n}. \tag{1.80}$$

El desarrollo de Fourier generalizado dado por la ecuación (1.79) toma entonces la forma

$$x\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{2}{n}\;\mathrm{e}^x\;\mathrm{sen}\,nx, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{1.81}$$

En la figura 1.6 se compara esta serie cuando se retienen sus primeros N términos, es decir

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\,\frac{2}{n}\;\mathrm{e}^x\;\mathrm{sen}\,nx$$

frente a la función $x\,\mathrm{e}^x$. En las gráficas de la figura 1.6 se observa un comportamiento irregular de la serie truncada en las vecindades del extremo superior $x = \pi$. Puede apreciarse una última oscilación que sobrepasa notablemente a la función $x\,\mathrm{e}^x$ y cuya distancia a esta función no disminuye de forma apreciable cuando aumenta el número de términos que se retienen en la serie. El único efecto apreciable es el desplazamiento de la posición de estas oscilaciones hacia el extremo superior $x = \pi$. Lo que estamos viendo es un ejemplo de lo que se conoce como fenómeno de Gibbs.[24] Podría parecer que el fenomeno de Gibbs contradice el teorema 1.6 de la convergencia punto a punto. Esto no es así porque las oscilaciones tienden a irse hacia el extremo de modo que, para un x dado arbitrariamente cercano al extremo $x = \pi$, siempre podemos escoger un número de términos suficiente grande que haga que las oscilaciones estén aún más cerca del extremo que el punto escogido y así conseguir la convergencia punto a punto.

▷ ***Ejercicio** 1.11*

En el intervalo $0 \le x \le \pi$ se define la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^x, & x \neq 2\,, \\ 40, & x = 2\,. \end{cases}$$

1. *¿Es $f(x)$ una función de cuadrado sumable en el intervalo $[0,\pi]$ con respecto a la función peso $r(x) = \mathrm{e}^{-2x}$? ¿Es una función suave a trozos?*
2. *Demuestra que el desarrollo de esta función $f(x)$ en serie de las autofunciones $\psi_n(x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{sen}\,nx$ viene dado por*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,\frac{2}{n}\;\mathrm{e}^x\;\mathrm{sen}\,nx\,, \tag{1.82}$$

   es decir, por el mismo desarrollo que encontramos para la función $x\,\mathrm{e}^x$ donde $x \in [0,\pi]$ [véase la ecuación (1.81)]. ¿A qué se debe que los desarrollos sean los mismos para las dos funciones?
3. *La serie (1.82) converge en media cuadrática a las funciones $f(x)$ y $x\,\mathrm{e}^x$. ¿Por qué?*
4. *La serie (1.82) converge a la función $x\,\mathrm{e}^x$ en el punto $x = 2$. ¿Por qué?*
5. *La serie (1.82)* no *converge a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$. ¿Por qué?*

◀

[24]Pueden verse más detalles en, por ejemplo, la sección 14.5 de [Arf85].

1.6.1. Error cuadrático mínimo de una suma de autofunciones, identidad de Parseval y relación de cierre

Ahora nos preguntamos cuáles deben ser los coeficientes a_m para que la suma $\sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x)$ de las n primeras autofunciones de un problema de Sturm-Liouville (con función peso $r(x)$ en el intervalo $[a,b]$) sea una representación óptima en media cuadrática de la función $\varphi(x)$. Una aproximación $\sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x)$ a una función $\varphi(x)$ es óptima en media cuadrática cuando el error cuadrático medio

$$E_n = \left\|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x)\right\|^2 \tag{1.83}$$

$$= \left\langle \varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x) \middle| \varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x) \right\rangle \tag{1.84}$$

con respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $[a,b]$ es mínimo. Es fácil ver que

$$E_n = \|\varphi\|^2 - \sum_{m=0}^{n} a_m\langle\varphi|\psi_m\rangle - \sum_{m=0}^{n} a_m^*\langle\psi_m|\varphi\rangle + \sum_{m=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} a_m^* a_l\langle\psi_m|\psi_l\rangle\,.$$

Pero $\langle\psi_m|\varphi\rangle = c_m\|\psi_m\|^2$ y $\langle\varphi|\psi_m\rangle = \langle\psi_m|\varphi\rangle^* = c_m^*\|\psi_m\|^2$, y por tanto

$$E_n = \|\varphi\|^2 - \sum_{m=0}^{n} a_m c_m^*\|\psi_m\|^2 - \sum_{m=0}^{n} a_m^* c_m\|\psi_m\|^2 + \sum_{m=0}^{n} |a_m|^2\|\psi_m\|^2.$$

Es decir,

$$E_n = \|\varphi\|^2 + \sum_{m=0}^{n} \left(|a_m|^2 - a_m c_m^* - a_m^* c_m\right)\|\psi_m\|^2.$$

Pero

$$|a_m - c_m|^2 = (a_m - c_m)^*(a_m - c_m) = |a_m|^2 - a_m^* c_m - a_m c_m^* + |c_m|^2,$$

por lo que podemos escribir

$$E_n = \|\varphi\|^2 + \sum_{m=0}^{n} \left(|a_m - c_m|^2 - |c_m|^2\right)\|\psi_m\|^2. \tag{1.85}$$

Como $|a_m - c_m|^2$ es siempre positiva, el error E_n es mínimo cuando $a_m = c_m$. En este caso, E_n se reduce a

$$E_n = \|\varphi\|^2 - \sum_{m=0}^{n} |c_m|^2\|\psi_m\|^2. \tag{1.86}$$

En resumen:

Teorema 1.7 *Para un valor de n dado, la suma parcial $\sum_{m=0}^{n} c_m\psi_m(x)$ da lugar a una estimación de $\varphi(x)$ cuyo error cuadrático medio*

$$E_n = \left\|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} c_m\psi_m(x)\right\|^2$$

es menor o igual que el de cualquier otra suma parcial $\sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x)$:

$$\left\|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} c_m\psi_m(x)\right\|^2 \le \left\|\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x)\right\|^2.$$

La igualdad se produce cuando $a_m = c_m$*, donde* $c_m = \langle\psi_m|\varphi\rangle/\|\psi_m\|^2$*. El valor mínimo del error cuadrático medio es por tanto*

$$\text{mín}\, E_n = \|\varphi\|^2 - \sum_{m=0}^{n} |c_m|^2 \|\psi_m\|^2 \,. \tag{1.87}$$

▷ ***Ejercicio*** *1.12*

Utiliza el programa Mathematica (u otro parecido) para comparar el error cuadrático medio que se comete en el intervalo $[0,1]$ *con respecto a la función peso* $r(x) = \mathrm{e}^x$ *cuando se aproxima la función* $x\,\mathrm{e}^x$ *con una combinación lineal de las 20 primeras autofunciones que se hallaron en el ejemplo 1.10:* $\sum_{n=1}^{20} a_n \,\mathrm{e}^x \operatorname{sen} nx$*. Comprueba que cualquier elección que hagas de los coeficientes* a_n *conduce a un error cuadrático medio mayor que el que se comete cuando se usan los coeficientes de Fourier* c_n *hallados en* (1.80)*.*

Por el teorema 1.5, sabemos que si $\varphi(x)$ es una función de cuadrado sumable con respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $[a,b]$ ($\varphi(x) \in L^2[a,b;r]$), entonces la serie $\sum_n c_n\psi_n(x)$ converge en media cuadrática a $\varphi(x)$, es decir $E_n \to 0$ para $n \to \infty$. En este caso, de la ecuación (1.87) se deduce el siguiente resultado:

Teorema 1.8 (Identidad de Parseval) *Para una función* φ *de cuadrado sumable se tiene que*

$$\|\varphi\|^2 = \sum_n |c_n|^2 \|\psi_n\|^2. \tag{1.88}$$

Relación de Cierre.

La expresión general de la relación de cierre era (véase la página 17)

$$\mathbb{I} = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2} |\psi_n\rangle\langle\psi_n|.$$

Podemos expresar esta relación de un modo más explícito:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_n c_n\psi_n(x) \\
&= \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int_a^b dx'\, r(x')\, \psi_n^*(x')\, \varphi(x')\ \psi_n(x) \\
&= \int_a^b dx'\, r(x') \left[\sum_n \frac{\psi_n^*(x')\, \psi_n(x)}{\|\psi_n\|^2} \right] \varphi(x'),
\end{aligned}$$

de donde se deduce[25]

$$\frac{1}{r(x')}\delta(x - x') = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \psi_n(x)\, \psi_n^*(x'). \tag{1.89}$$

[25] Recuérdese que la función delta de Dirac se define por las propiedades $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \delta(x - x') f(x')$.

▶ Ejemplo 1.11

Mediante este ejemplo vamos a mostrar que la teoría del desarrollo de Fourier no es mas que un caso particular de la teoría de Sturm-Liouville.
Sea la ecuación de Sturm-Liouville con $p(x) = r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\lambda \equiv k^2$, es decir, sea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0, \qquad a \le x \le a + L, \tag{1.90a}$$

junto con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y(a) = y(a+L), \\ y'(a) = y'(a+L). \end{cases} \tag{1.90b}$$

Estas condiciones de contorno son periódicas pues $p(a) = p(a + L)$. Éste es por tanto un problema de Sturm-Liouville periódico. Distinguiremos dos casos con soluciones distintas.

• Para $k^2 = 0$, la solución general es

$$y(x) = Ax + B.$$

Es fácil ver que la solución $y(x) = B$, con B cualquiera, es una solución aceptable del problema (1.90). Nuestra primera autofunción es $\psi_0(x) = 1$ para $\lambda = k^2 = 0$, donde hemos escogido $B = 1$ por simplicidad.

• Para $k^2 \neq 0$, la solución general de la ecuación de Sturm-Liouville es

$$y(x) = A\,\mathrm{e}^{ikx} + B\,\mathrm{e}^{-ikx}.$$

Debemos ahora ver qué valores han de tomar A, B y k para que se satisfagan las condiciones de contorno. De la primera condición de contorno obtenemos

$$A\,\mathrm{e}^{ika} + B\,\mathrm{e}^{-ika} = A\,\mathrm{e}^{ik(a+L)} + B\,\mathrm{e}^{-ik(a+L)}$$

es decir

$$A\,\mathrm{e}^{ika}\left(1 - \mathrm{e}^{ikL}\right) + B\,\mathrm{e}^{-ika}\left(1 - \mathrm{e}^{-ikL}\right) = 0. \tag{1.91}$$

La segunda condición implica

$$ikA\,\mathrm{e}^{ika} - ikB\,\mathrm{e}^{-ika} = ikA\,\mathrm{e}^{ik(a+L)} - ikB\,\mathrm{e}^{-ik(a+L)}$$

es decir,

$$A\,\mathrm{e}^{ika}\left(1 - \mathrm{e}^{ikL}\right) - B\,\mathrm{e}^{-ika}\left(1 - \mathrm{e}^{-ikL}\right) = 0. \tag{1.92}$$

Para que el sistema formado por las ecuaciones (1.91) y (1.92) tenga solución distinta de la trivial ($A = B = 0$) debe ocurrir que el determinante de sus coeficientes sea igual a cero:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{ika}\left(1 - \mathrm{e}^{ikL}\right) & \mathrm{e}^{-ika}\left(1 - \mathrm{e}^{-ikL}\right) \\ \mathrm{e}^{ika}\left(1 - \mathrm{e}^{ikL}\right) & -\mathrm{e}^{-ika}\left(1 - \mathrm{e}^{-ikL}\right) \end{vmatrix} = 0\,.$$

Desarrollando el determinante se obtiene

$$2\left(1 - \mathrm{e}^{ikL}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-ikL}\right) = 0.$$

Es decir, sólo los valores de k que hagan que se verifique, bien la relación $1 - \mathrm{e}^{ikL} = 0$, o bien la relación $1 - \mathrm{e}^{-ikL} = 0$, conducen a soluciones distintas de la trivial. Estos valores de k son

$$\mathrm{e}^{\pm ikL} = 1 \Rightarrow k = \frac{2\pi n}{L} \equiv k_n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.93}$$

de modo que los autovalores son

$$\lambda_n = k_n^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} n^2, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{1.94}$$

Por tanto, las soluciones del problema de Sturm-Liouville definido por las ecuaciones (1.90) tienen la forma

$$\varphi_n(x) = A_n \, e^{ik_n x} + B_n \, e^{-ik_n x} \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

con A y B cualesquiera (incluso cero, aunque no simultáneamente). Nótese que $\varphi_n(x)$ y $\varphi_{-n}(x)$ tienen igual autovalor pero son, en general, dos autofunciones distintas. Además, en general (es decir, para una elección arbitraria de los coeficientes A_n, B_n, A_{-n}, B_{-n}) estas dos autofunciones no serán ortogonales entre sí. Sin embargo, si escogemos $A_n = 1$ y $B_n = 0$ con $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$, las autofunciones correspondientes son ortogonales y adoptan una forma especialmente simple que llamaremos $\psi_n(x)$. Como $\psi_0(x) = 1$, podemos expresar todo el conjunto de autofunciones así:

$$\psi_n(x) = e^{i 2\pi n x/L}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Otra elección posible, también muy habitual por la sencillez del resultado, es $A_n = B_n = 1/2$ y $A_{-n} = -B_{-n} = -i/2$ con $n = 1, 2, \cdots$, obteniéndose $\psi_n^{(1)}(x) = \cos(2\pi n x/L)$, $\psi_n^{(2)}(x) = \operatorname{sen}(2\pi n x/L)$. Como $\psi_0(x) = 1$, podemos escribir *todas* las autofunciones de este modo:

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)}(x) &= \cos(k_n x), \qquad n = 0, 1, 2 \cdots \\ \psi_n^{(2)}(x) &= \operatorname{sen}(k_n x), \qquad n = 1, 2 \cdots \end{aligned}$$

Por supuesto $\{\psi_n(x)\}$ y $\{\psi_n^{(1)}(x), \psi_n^{(2)}(x)\}$ no son más que las funciones (armónicos) de las series de Fourier. Veamos a continuación con detalle algunas de las propiedades de las autofunciones $\psi_n(x)$.

Degeneración. Las autofunciones con $n \neq 0$ son doblemente degeneradas pues ψ_n y ψ_{-n} tienen el mismo autovalor, $\lambda = k_n^2$. Este resultado está de acuerdo con lo que afirmaba el teorema 1.4 en la página 24.

Ortogonalidad. Las autofunciones $\{\psi_n\}$ son ortogonales entre sí. Esto es fácil de demostrar pues

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \int_a^{a+L} dx \, \psi_n^*(x) \, \psi_m(x) = \int_a^{a+L} dx \; e^{i 2\pi (m-n) x/L} \, .$$

Por tanto:

- Si $m \neq n$, entonces

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \frac{L}{i \, 2\pi (m-n)} \; e^{i \, 2\pi (m-n) x/L} \Big|_a^{a+L} = 0.$$

- Si $m = n$, entonces

$$\| \psi_n \|^2 = \int_a^{a+L} dx = L.$$

En resumen,

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = L \, \delta_{nm}$$

siendo δ_{nm} la delta de Kronecker.

Desarrollo en serie. Si $\varphi(x)$ es una función definida en el intervalo $a \leq x \leq a + L$, entonces podemos expresarla como un desarrollo en serie de Fourier,

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i \, 2\pi n x/L} \tag{1.95}$$

donde los coeficientes de Fourier c_n son

$$c_n = \frac{\langle \psi_n | \varphi \rangle}{\| \psi_n \|^2} = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} e^{-i \, 2\pi n x/L} \, \varphi(x) \, dx. \tag{1.96}$$

Si la función $\varphi(x)$ es suave en el intervalo $[a, a+L]$, la serie de (1.95) converge punto a punto a $\varphi(x)$ (véase el teorema 1.6); si $\varphi(x)$ es de cuadrado sumable, la serie converge en media cuadrática (véase el teorema 1.5).

Identidad de Parseval. En este problema de Sturm-Liouville, la identidad de Parseval dada por (1.88) significa que

$$\frac{1}{L}\int_a^{a+L} dx\,|\varphi(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{1.97}$$

Relación de cierre. La relación de cierre dada por (1.89) toma en este caso la forma

$$\delta(x-x') = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi n}{L}(x-x')}\,. \tag{1.98}$$

Esta es una representación habitual y útil de la función delta de Dirac.

▷ ***Ejercicio** 1.13*

1. *Comprueba que los resultados que hemos obtenido en este ejemplo están de acuerdo con el teorema 1.4.*
2. *Calcula numéricamente y dibuja la función*

$$\frac{1}{L}\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{i\,\frac{2\pi n}{L}(x-x')},$$

con $x' = L/2$ y $L = 1$, para diversos valores de N. Comprueba que la función se parece cada vez más a una función delta de Dirac centrada en $x' = 1/2$ a medida que N aumenta. ¿Qué sucede si vas aumentando el valor de L?

3. *Hemos dicho anteriormente que las dos autofunciones*

$$\varphi_n(x) = A_n\,\mathrm{e}^{i2\pi nx/L} + B_n\,\mathrm{e}^{-i2\pi nx/L},$$
$$\varphi_{-n}(x) = A_{-n}\,\mathrm{e}^{-i2\pi nx/L} + B_{-n}\,\mathrm{e}^{i2\pi nx/L},$$

tienen el mismo autovalor $\lambda_n = 4\pi^2 n^2/L$ y que, en general, no son ortogonales entre sí para cualquier elección de los coeficientes A_n, A_{-n}, B_n y B_{-n}. Dijimos además que si elegimos $A_n = A_{-n} = 1$ y $B_n = B_{-n} = 0$, entonces las dos autofunciones resultantes $\psi_n(x) = \mathrm{e}^{i2\pi nx/L}$ y $\psi_{-n}(x) = \mathrm{e}^{-i2\pi nx/L}$, sí son ortogonales. También dijimos que la elección $A_n = B_n = 1/2$ y $A_{-n} = -B_{-n} = -i/2$ hace que las autofunciones resultantes $\psi_n^{(1)}(x) = \cos(2\pi nx/L)$ y $\psi_n^{(2)}(x) = \mathrm{sen}(2\pi nx/L)$ sean ortogonales entre sí. En este ejercicio se pide:

   a) *Demostrar que $\varphi_n(x)$ y $\varphi_{-n}(x)$ son ortogonales si se satisface la relación*

$$A_{-n}B_n + A_nB_{-n} = 0. \tag{1.99}$$

   b) *Comprueba que las elecciones anteriores ($A_n = A_{-n} = 1$ y $B_n = B_{-n} = 0$ por un lado, y $A_n = B_n = 1/2$ y $A_{-n} = -B_{-n} = -i/2$ por otro) satisfacen esta relación.*

   c) *Para cada autovalor λ_n, encuentra otra pareja de autofunciones ortogonales entre sí mediante una elección de coeficientes A_n, A_{-n}, B_n y B_{-n} (distinta a las anteriores) que satisfaga la relación (1.99).*

Transformada de Fourier

Es bien conocido que cuando el intervalo de definición de la función $\varphi(x)$ tiende a infinito, la serie de Fourier que describe a $\varphi(x)$ se transforma en una transformada de Fourier. Veámoslo. Por comodidad tomamos

$a = -L/2$ y escribimos $k = 2\pi n/L$ sin incluir el subíndice "n" en k (la dependencia en n queda así sólo implícita). De este modo escribiremos $c(k)$ en vez de c_n y las ecuaciones (1.95) y (1.96) se transforman en

$$\varphi(x) = \sum_k c(k)\, \mathrm{e}^{ikx}, \quad k = 0, \pm\frac{2\pi}{L}, \pm\frac{4\pi}{L}, \cdots \tag{1.100}$$

$$c(k) = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\ \mathrm{e}^{-ikx}\, \varphi(x). \tag{1.101}$$

Como $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ entonces $\frac{L}{2\pi}\Delta k = 1$. Multiplicando la ecuación (1.100) por esta última cantidad, se tiene

$$\varphi(x) = \sum_k \Delta k \frac{L}{2\pi} c(k)\, \mathrm{e}^{ikx} = \sum_k \Delta k \widetilde{\varphi}(k)\, \mathrm{e}^{ikx},$$

donde

$$\widetilde{\varphi}(k) = \frac{L}{2\pi}\, c(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-L/2}^{L/2} dx\ \mathrm{e}^{-ikx}\, \varphi(x).$$

Si tomamos el límite $L \to \infty$, lo que implica $\Delta k \to 0$, estas sumas se transforman en integrales:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ \mathrm{e}^{ikx}\, \widetilde{\varphi}(k),$$

$$\widetilde{\varphi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-ikx}\, \varphi(x). \tag{1.102}$$

A la función $\widetilde{\varphi}(k)$ se la conoce como transformada de Fourier de $\varphi(x)$.
El resultado anterior puede entenderse como que cualquier función suficientemente bien comportada[26] en la recta real puede desarrollarse en términos de autofunciones asociadas a autovalores que forman un espectro *continuo*.

▷ ***Ejercicio*** *1.14*

1. *Emplea los argumentos anteriores que permitieron deducir la ecuación* (1.102) *a partir de la ecuación* (1.95), *para deducir la relación*

$$\delta(x, x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \mathrm{e}^{ik(x-x')} \tag{1.103}$$

a partir de la ecuación (1.98).

2. *Emplea la relación* (1.103) *para demostrar que*

$$\langle \widetilde{f}(k)|\widetilde{g}(k)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle f(x)|g(x)\rangle\,.$$

◀

▶ *Ejemplo 1.12*

La identidad de Parseval permite obtener sumas notables. Veamos un ejemplo (puede verse otro ejemplo interesante en el problema 24 del capítulo 2). Sea la función $\varphi(x) = x$ con $0 \leq x \leq \pi$. Su desarrollo en serie de Fourier

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, \mathrm{e}^{i2nx} \tag{1.104}$$

[26] Con mayor precisión: si $\varphi(x)$ es suave (ella y su derivada son continuas a trozos) y absolutamente integrable (es decir, existe $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dx$) entonces $\varphi(x)$ puede expresarse mediante una transformada de Fourier.

tiene los coeficientes

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{-i2nx}\, x\, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n=0, \\ \dfrac{i}{2n}, & n \neq 0. \end{cases} \tag{1.105}$$

La igualdad de Parseval (1.97) se reduce en nuestro caso a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx\, x^2 = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}.$$

Pero la integral es igual a $\pi^2/3$ y por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hemos así encontrado que $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$. Esta relación fue descubierta por Euler en 1735 y "es uno de los hallazgos más impresionantes de los comienzos de la teoría de series infinitas"[Sim93, sección 34]. Calcular la suma de esta serie se conoció como problema de Basilea y fue por primera vez formulado por Pietro Mengoli en 1644. Este problema se había resistido desde entonces a los esfuerzos de los matemáticos más brillantes de la época, por lo que su resolución le proporcionó a Euler, a los 28 años, una fama inmediata.[27]

◀

1.7. Problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

La ecuación de Sturm-Liouville inhomogénea es

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}y(x)\right] + q(x)\,y(x) + \mu\, r(x)\,y(x) = f(x), \quad x \in [a,b], \tag{1.106}$$

donde ahora μ desempeña un papel generalmente muy distinto al de λ en las secciones anteriores.[28] El término $f(x)$ se conoce como término fuente. [También se llama término fuente a $f(x)/r(x)$.] Por supuesto, cuando $f(x) = 0$, recuperamos el problema de Sturm-Liouville homogéneo que hemos estudiado en las secciones anteriores. En términos de operadores, la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea toma la forma

$$(\mathcal{L} + \mu)\, y(x) = \frac{f(x)}{r(x)}. \tag{1.107}$$

En lo que sigue nos restringiremos al estudio del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo consistente en la ecuación de Sturm-Liouville inhomogénea con condiciones de contorno *regulares*

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

[27] En `www` puedes encontrar más información sobre este problema. Es muy recomendable e instructivo conocer el ingenioso método que usó Euler para resolverlo.

[28] Cambiando de símbolo queremos evitar confusiones procedentes de la notación y, además, hacer hincapié en que μ no juega el papel de parámetro indeterminado al que hay que encontrar los valores (autovalores) que conducen a soluciones aceptables. Por lo general, en los problemas de Sturm-Liouville inhomogéneos μ es un parámetro cuyo valor está dado.

Nótese que estas condiciones de contorno son homogéneas. También se llama problema de Sturm-Liouville inhomogéneo a la ecuación de Sturm-Liouville homogénea o inhomogénea con *condiciones de contorno inhomogéneas* (este caso se estudiará en la sección 1.9). Sin embargo, en lo que sigue, salvo que se diga explícitamente lo contrario, cuando hablemos de problema de Sturm-Liouville inhomogéneo nos referiremos a la ecuación de Sturm-Liouville inhomogénea más condiciones de contorno homogéneas.

A continuación vamos a ver un resultado importante que nos proporciona las condiciones para las cuales el problema no homogéneo (1.106) tiene solución.

1.7.1. Teorema de la alternativa de Fredholm

Teorema 1.9 (Teorema de la alternativa de Fredholm) *Salvo una excepción, o bien el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo tiene solución, o bien lo tiene el problema de Sturm-Liouville homogéneo. La excepción es que el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo tiene solución incluso cuando el homogéneo la tiene si y sólo si la solución del problema homogéneo es ortogonal a* $f(x)/r(x)$.

Podemos formular este teorema de otro modo.

Teorema 1.10 (Teorema de la alternativa de Fredholm) *Sea* $-\lambda_n$ *el autovalor* n*-ésimo del operador* $\mathcal{L}$*, y* $\psi_n(x)$ *su autofunción correspondiente:*

$$\mathcal{L}\,\psi_n = -\lambda_n \psi_n .$$

1. *Si* $\mu \neq \lambda_n$*, entonces:*
   a) *El problema homogéneo* $(\mathcal{L} + \mu)\, y = 0$ *no tiene solución.*
   b) *El problema no homogéneo* $(\mathcal{L} + \mu)\, y = f(x)/r(x)$ *sí tiene solución única.*
2. *Si* $\mu = \lambda_n$*, entonces:*
   a) *El problema homogéneo* $(\mathcal{L} + \lambda_n)\, y = 0$ *tiene la solución* $\psi_n \neq 0$.
   b) *El problema no homogéneo* $(\mathcal{L} + \lambda_n)\, y = f(x)/r(x)$ *no tiene solución salvo si y sólo si* ψ_n *es ortogonal al término fuente,* $\langle \psi_n | f/r \rangle = 0$*. En este caso la solución no es única pues contiene un múltiplo arbitrario de* ψ_n.

Ilustraremos este teorema con unos ejemplos.

► *Ejemplo 1.13*

Sea el problema de Sturm-Liouville homogéneo

$$y'' + y = f(x)\,, \tag{1.108a}$$

$$\begin{cases} y(0) = 0\,, \\ y(\pi/2) = 0\,, \end{cases} \tag{1.108b}$$

con

$$f(x) = 0.$$

La solución de la ecuación es

$$y(x) = A\cos x + B\,\mathrm{sen}\, x.$$

Imponiendo las condiciones de contorno se encuentra que

$$\left.\begin{aligned} y(0)=0 \quad &\Rightarrow \quad A=0 \\ y(\pi/2)=0 \quad &\Rightarrow \quad B=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=B=0.$$

Es decir, el problema homogéneo no tiene solución [aparte de la solución nula trivial, $y(x)=0$]. Según el teorema de la alternativa de Fredholm, esto significa que el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo dado por las ecuaciones (1.108) con $f(x)\neq 0$ ha de tener siempre solución. Veámoslo con un caso particular sencillo.
Sea el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo [aquí $f(x)=1$]

$$y''+y=1\,, \tag{1.109a}$$

$$CC:\begin{cases} y(0)=0, \\ y(\pi/2)=0. \end{cases} \tag{1.109b}$$

La solución general de la ecuación diferencial puede expresarse así:

$$y(x)=\text{solución particular}+\text{solución general homogénea}=y_p+y_h.$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} y_p &= 1\,, \\ y_h &= A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x, \end{aligned}$$

por lo que la solución de la ecuación de Sturm-Liouville es

$$y(x)=1+A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x.$$

Imponiendo las condiciones de contorno a esta solución encontramos

$$\left.\begin{aligned} y(0)=0 \quad &\Rightarrow 1+A=0 \\ y(\pi/2)=0 \quad &\Rightarrow 1+B=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A=B=-1,$$

y, por tanto, la solución del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo (1.109) es

$$y(x)=1-\cos x-\mathrm{sen}\,x.$$

Esta solución es única.

◀

▶ *Ejemplo 1.14*

Sea el problema de Sturm-Liouville homogéneo

$$y''+y=f(x)\,, \tag{1.110a}$$

$$CC:\begin{cases} y(0)=0\,, \\ y(\pi)=0\,, \end{cases} \tag{1.110b}$$

con

$$f(x)=0. \tag{1.110c}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x)=A\cos x+B\,\mathrm{sen}\,x.$$

De la condición de contorno $y(0) = 0$ se deduce que $A = 0$. De la condición de contorno $y(\pi) = 0$ deducimos también que $A = 0$. Esto significa que la solución de este problema de condiciones de contorno es

$$y(x) = B \operatorname{sen} x,$$

siendo B una constante arbitraria. En definitiva, hemos encontrado que el problema homogéneo tiene solución. O dicho en otros términos: hemos encontrado que $\operatorname{sen} x$ es la autofunción del problema de Sturm-Liouville homogéneo (1.110), donde $\lambda = 1$ es el autovalor correspondiente.
Sea ahora el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

$$y'' + y = f(x)\,, \tag{1.111a}$$

$$CC : \begin{cases} y(0) = 0\,, \\ y(\pi) = 0\,, \end{cases} \tag{1.111b}$$

con

$$f(x) = 1. \tag{1.111c}$$

¿Tendrá solución este problema? Según el teorema de la alternativa de Fredholm, este problema de Sturm-Liouville inhomogéneo no debería tener solución ya que el problema homogéneo correspondiente (1.110), como hemos comprobado hace un momento, sí tiene solución. No obstante, sabemos que hay una excepción a esta afirmación si sucede que la solución del problema homogéneo $y(x) = B \operatorname{sen} x$ es ortogonal al término fuente $f(x) = 1$. Sin embargo esto no sucede pues [nótese que la función peso en este problema es $r(x) = 1$]

$$\langle y(x)|f(x)\rangle = \int_0^\pi dx B \operatorname{sen}(x) = 2B \neq 0$$

por lo que problema de Sturm-Liouville inhomogéneo (1.111) no puede tener solución. Comprobémoslo. Como ya vimos en el ejemplo 1.13, la solución general de la ecuación diferencial (1.111a) con $f(x) = 1$ es

$$y(x) = 1 + A\cos x + B \operatorname{sen} x.$$

Si imponemos las condiciones de contorno obtenemos

$$\left.\begin{aligned} y(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A + 1 = 0 \\ y(\pi) = 0 \quad &\Rightarrow -A + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Comprobamos pues que problema de Sturm-Liouville inhomogéneo (1.111) carece de solución, tal como nos aseguraba el teorema de la alternativa de Fredholm.

◄

Demostración del teorema de la alternativa de Fredholm

Nos demoraremos en esta demostración porque en su transcurso aprenderemos cómo obtener la solución del problema no homogéneo en términos de las autofunciones del operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}$.

Sean $\{\psi_n\}$ las autofunciones del operador hermítico $\mathcal{L}$ con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases} \tag{1.112}$$

Llamaremos $-\lambda_n$ a sus autovalores, es decir,

$$\mathcal{L}\,\psi_n = -\lambda_n \psi_n. \tag{1.113}$$

A continuación expresamos tanto la solución $y(x)$ del problema no homogéneo

$$(\mathcal{L}+\mu)\, y(x) = \frac{f(x)}{r(x)}, \tag{1.114}$$

como el término no homogéneo $f(x)/r(x)$, en serie de las autofunciones $\{\psi_n\}$:

$$y(x) = \sum_n c_n \psi_n(x), \tag{1.115}$$

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_n b_n \psi_n(x), \tag{1.116}$$

con[29]

$$b_n = \frac{\langle \psi_n | f/r\rangle}{\|\psi_n\|^2} = \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\int_a^b dx\, \psi_n^*(x)\, f(x). \tag{1.117}$$

Sustituyendo estas relaciones en (1.114) se tiene que

$$(\mathcal{L}+\mu)\sum_n c_n\psi_n = \sum_n b_n \psi_n$$

o, teniendo en cuenta la ecuación (1.113),

$$\sum_n c_n(\mu-\lambda_n)\,\psi_n = \sum_n b_n\psi_n,$$

es decir,

$$\sum_n [c_n(\mu-\lambda_n)-b_n]\,\psi_n = 0.$$

Para que esto se verifique debe ocurrir que cada uno de los coeficientes de ψ_n sea nulo[30] y por tanto

$$(\mu-\lambda_n)\, c_n = b_n\,. \tag{1.118}$$

En la resolución de esta ecuación distinguimos dos posibilidades:

1. $\mu \neq \lambda_n$ para todo n, con lo cual de (1.118) se deduce que

$$c_n = \frac{b_n}{\mu-\lambda_n}, \quad \forall n. \tag{1.119}$$

Esto significa que la solución del problema no homogéneo puede escribirse como

$$y(x) = \sum_n \frac{b_n}{\mu-\lambda_n}\,\psi_n(x) \tag{1.120}$$

donde los coeficientes b_n vienen dados por la relación (1.117), es decir

$$\boxed{y(x) = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\,\frac{\int_a^b dy\,\psi_n^*(y)\, f(y)}{\mu-\lambda_n}\;\psi_n(x)\,.} \tag{1.121}$$

[29] Sería también correcto escribir $\psi_n(x)$ en vez de $\psi_n^*(x)$ dentro de la integral dado que $\psi_n(x)$ es real por ser solución de un problema de Sturm-Liouville regular.

[30] ¿Por qué?

Si el problema es homogéneo [$f(x) = 0$], entonces $b_n = 0$ y de la relación (1.119) se deduce que $c_n = 0$. Esto significa que la solución del problema homogéneo es la solución trivial nula. En otras palabras, descubrimos que el problema homogéneo

$$(\mathcal{L} + \mu)\, y = 0$$

con $\mu \neq \lambda_n$ no tiene solución (aparte de la solución trivial nula).

2. $\mu = \lambda_m$ para un m dado, de modo que (1.118) se transforma en

$$(\lambda_m - \lambda_n)\, c_n = b_n. \tag{1.122}$$

Obviamente, en este caso el problema homogéneo $(\mathcal{L} + \mu)\, y = (\mathcal{L} + \lambda_m)\, y = 0$ sí tiene solución y ésta es justamente la autofunción ψ_m: $y(x) = \psi_m(x)$. En lo que se refiere al problema no homogéneo distinguimos dos posibilidades:

a) Si $b_m \neq 0$, la ecuación (1.122) para $n = m$ es imposible ya que ningún c_m puede satisfacer la ecuación $0 \cdot c_m = b_m \neq 0$. Hemos de concluir que, en este caso, no existe solución del problema inhomogéneo.

b) Si $b_m = 0$, esto es, si $\langle \psi_m | f/r \rangle = 0$, la ecuación (1.122) se reduce a $0 \cdot c_m = 0$, la cual tiene solución para cualquier constante c_m arbitraria. Por tanto, la solución del problema no homogéneo existe,

$$y(x) = \sum_{n \neq m} \frac{b_n}{\lambda_m - \lambda_n} \psi_n + c_m \psi_m\,, \tag{1.123}$$

pero *no es única* pues la constante c_m puede tomar cualquier valor.

▷ ***Ejercicio** 1.15*

Como hemos considerado que el problema es de Sturm-Liouville regular*, hemos asumido que los autovalores no estaban degenerados. Sin embargo, es claro que en la demostración no juega un papel relevante el hecho de que las condiciones de contorno sea regulares. Dicho en otros términos: la demostración anterior es esencialmente válida para condiciones de contorno periódicas y singulares. Rehaz la discusión del apartado anterior considerando la posibilidad de que los autovalores λ_n estén degenerados.*

1.8. Función de Green

1.8.1. Definición y propiedades de la función de Green

Un procedimiento muy importante para hallar la solución de un problema de Sturm-Liouville inhomogéneo consiste en utilizar la función de Green. Decimos que $G(x, x')$ es la función de Green de un problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

$$(\mathcal{L} + \mu)\, y(x) = \frac{f(x)}{r(x)}, \tag{1.124a}$$

con las condiciones de contorno

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \tag{1.124b}$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{1.124c}$$

si:

1. $G(x,x')$ es solución de la ecuación de Sturm-Liouville pero con una *fuente puntual* situada en $x' \in (a,b)$, es decir,

$$(\mathcal{L}+\mu)\, G(x,x') = \frac{1}{r(x)}\delta(x-x'), \quad a < x' < b. \tag{1.125a}$$

2. $G(x,x')$ satisface las condiciones de contorno en $x=a$ y $x=b$, es decir,

$$\alpha_1 G(a,x') + \alpha_2 \left.\frac{\partial}{\partial x} G(x,x')\right|_{x=a} = 0, \tag{1.125b}$$

$$\beta_1 G(b,x') + \beta_2 \left.\frac{\partial}{\partial x} G(x,x')\right|_{x=b} = 0. \tag{1.125c}$$

Una vez hallada la función $G(x,x')$, la solución $y(x)$ del problema (1.124) original es

$$\boxed{y(x) = \int_a^b dx'\, G(x,x')\, f(x')} \tag{1.126}$$

dado que esta función satisface la ecuación diferencial (1.124a) y satisface las condiciones de contorno (1.124b) y (1.124c). Esto lo justificaremos en la sección 1.8.2, página 46.

La ecuación (1.126) explica por qué hallar la función de Green de un problema es tan importante y útil: la ecuación (1.126) nos dice (por cierto, de un modo especialmente transparente) que es suficiente resolver un sólo problema de Sturm-Liouville inhomogéneo, a saber, el problema (1.125), para hallar la solución (en forma de integral explícita) de todos los problemas (1.124) que sólo difieren entre sí en el término fuente $f(x)$; no es necesario ir resolviendo, más o menos penosamente, cada uno de estos problemas.

Propiedades de la función de Green

Antes de enunciarlas recordemos el siguiente resultado: sea $g(x)$ un función discontinua en x_0 con una discontinuidad (o salto) de tamaño Δg, es decir,

$$g(x) = \widetilde{g}(x) + \Delta g\, H(x-x_0),$$

siendo $\widetilde{g}(x)$ una función continua, Δg una constante y $H(x-x_0)$ la función salto de Heaviside en x_0; entonces

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d\widetilde{g}}{dx} + \Delta g\, \frac{d}{dx}H(x-x_0) \Rightarrow \frac{dg}{dx} = \frac{d\widetilde{g}}{dx} + \Delta g\;\; \delta(x-x_0).$$

Este resultado se ilustra en la figura 1.7.

▷ ***Ejercicio** 1.16*

Justifica la relación

$$\frac{d}{dx}H(x-x_0) = \delta(x-x_0)$$

integrando esta expresión entre a y x con $a < x_0$.

Vamos a demostrar dos importantes propiedades de la función de Green y de su primera derivada que se utilizaremos más adelante:

• **Propiedad 1.**

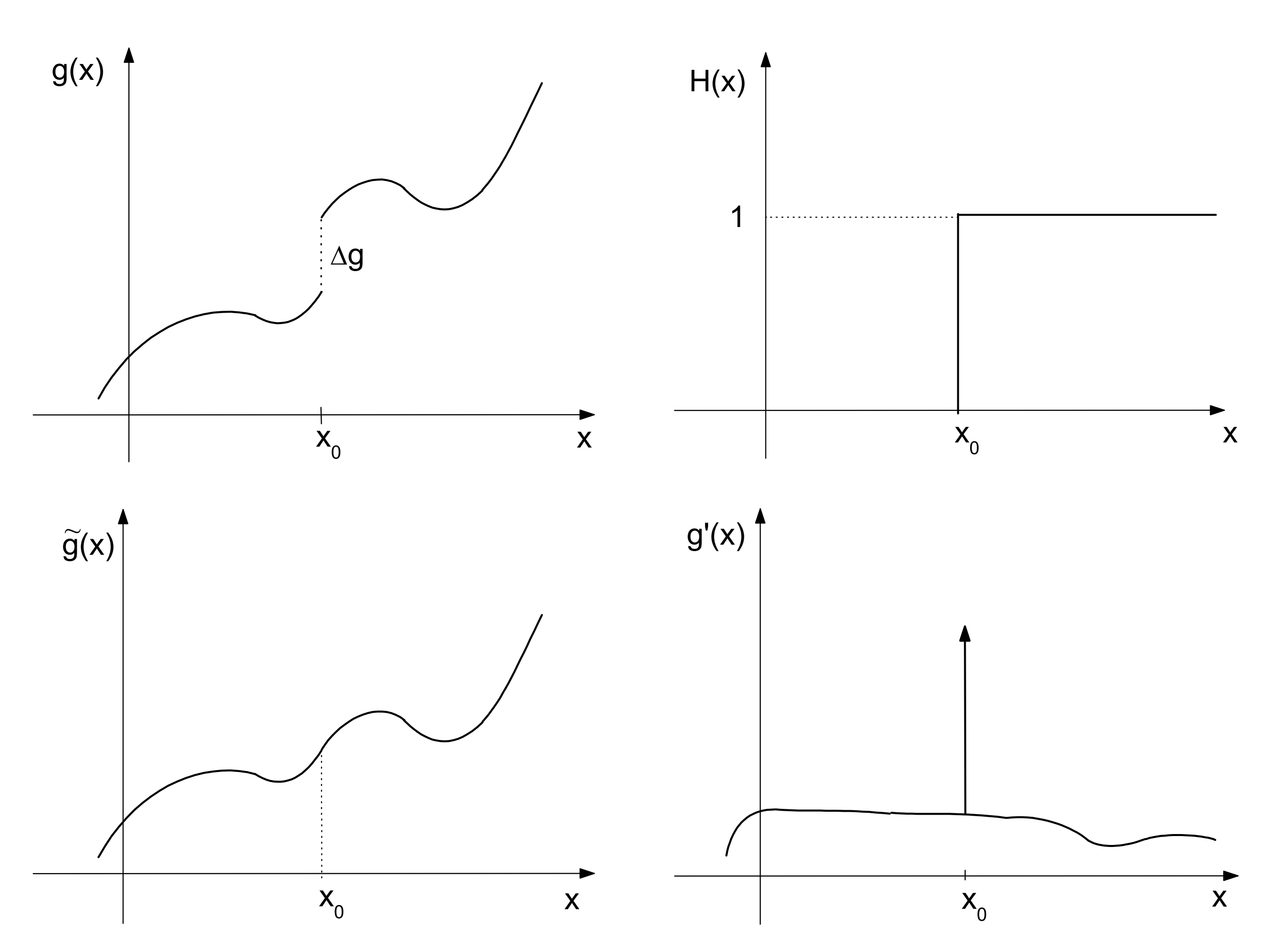


Figura 1.7: Representaciones gráficas de las funciones $g(x)$, $\widetilde{g}(x)$, la función de Heaviside $H(x-x_0)$, y la derivada $g'(x)$ de la función $g(x)$. La flecha vertical en la figura inferior derecha pretende simbolizar una función delta de Dirac situada en x_0.

$G(x,x')$ *es continua para todo* $x \in [a,b]$ *(incluso para* $x = x'$*).*

Nuestra demostración empieza recordando que, por definición, la función de Green $G(x,x')$ satisface la ecuación de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}[p(x)\,G'(x,x')] + [q(x) + \lambda\,r(x)]\;G(x,x') = \delta(x-x'). \tag{1.127}$$

Si integramos, por ejemplo, sobre el intervalo $[a,x]$ se tiene que

$$p(x)\,G'(x,x') = p(a)\,G'(a,x') - \int_a^x [q(z) + \lambda\,r(z)]G(z,x')\,dz + \int_a^x \delta(z,x')\,dz. \tag{1.128}$$

Si $G(x,x')$ tuviera una discontinuidad de tamaño ΔG en $x_0 \in [a,b]$, su derivada $G'(x,x')$ tendría una discontinuidad *infinita* de tamaño ΔG en $x_0 \in [a,b]$, es decir,

$$\frac{d}{dx}G(x,x') = \frac{d}{dx}\widetilde{G}(x,x') + \Delta G\,\delta(x-x_0),$$

donde $\widetilde{G}(x,x') = G(x,x') - \Delta G\,H(x-x_0)$ es una función continua en x_0. Por consiguiente, la igualdad reflejada por la ecuación (1.128) sería imposible pues en $x = x_0$ el miembro derecho

es finito mientras que el izquierdo es infinito debido a la función delta situada en x_0. Por tanto no es posible que $G(x,x')$ sea discontinua en $x = x_0 \in [a,b]$. Como x_0 es un punto arbitrario, concluimos que $G(x,x')$ ha de ser continua en todo el intervalo $[a,b]$.

- **Propiedad 2.**

La derivada de $G(x,x')$, $\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')$, es continua para todo x excepto en el punto $x = x'$ donde tiene una discontinuidad de tamaño $1/p(x')$:

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\bigg|_{x=x'_+} - \frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\bigg|_{x=x'_-} = \frac{1}{p(x')}. \tag{1.129}$$

Vamos a demostrarlo. Integramos entre $x_0 - \epsilon$ y $x_0 + \epsilon$ la ecuación de Sturm-Liouville que satisface la función de Green,

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx \left\{ \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}G(x,x')\right] + q(x)G(x,x') + \mu\, r(x)G(x,x') \right\} = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x,x')\, dx \tag{1.130}$$

para obtener

$$\left[p(x)\frac{d}{dx}G(x,x')\right]_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} + \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} [q(x) + \mu\, r(x)]\, G(x,x')\, dx = \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x,x')\, dx. \tag{1.131}$$

Distinguimos dos casos:

- $x_0 \neq x'$. Si tomamos el límite de $\epsilon \to 0$ se tiene que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[p(x)\frac{d}{dx}G(x,x')\right]_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} = p(x_0)\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\bigg|_{x=x_0^-}^{x=x_0^+}$$

  y, dado que $q(x)$, $r(x)$ y $G(x,x')$ son funciones continuas,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} (q + \mu\, r)\, G(x,x')\, dx = 0.$$

  Además

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x - x')\, dx = 0$$

  si $x_0 \neq x'$. Entonces la ecuación (1.131) para $x_0 \neq x'$ se reduce a

$$p(x_0)\left[\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\bigg|_{x=x_0^+} - \frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\bigg|_{x=x_0^-}\right] = 0.$$

  Esto significa que la derivada por la derecha es igual a la derivada por la izquierda en el punto x_0, es decir, la derivada de $G(x,x')$ es continua en $x = x_0 \neq x'$.

- $x_0 = x'$. En este caso, en las relaciones anteriores sólo cambia que

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta(x - x')\, dx = 1,$$

por lo que (1.131) se reduce ahora a

$$p(x')\left[\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'_+} - \frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'_-}\right] = 1,$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'_+} - \frac{\partial}{\partial x}G(x,x')\Big|_{x=x'_-} = \frac{1}{p(x')}.$$

1.8.2. Solución del problema de Sturm-Liouville en términos de la función de Green

En esta sección vamos a demostrar que la función

$$y(x) = \int_a^b dx'\, G(x,x')\, f(x') \tag{1.132}$$

1. Es solución de la ecuación diferencial

$$(\mathcal{L}+\mu)\, y(x) = \frac{f(x)}{r(x)}. \tag{1.133a}$$

2. Satisface las condiciones de contorno

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \tag{1.133b}$$

$$\beta_1 y(a) + \beta_2 y'(b) = 0. \tag{1.133c}$$

• Empecemos demostrando la primera propiedad, es decir, que (1.132) satisface la ecuación (1.133). Para ello es útil definir las siguientes funciones:

$$G_1(x,x') = G(x,x') \qquad \text{para} \quad x \le x', \tag{1.134}$$

$$G_2(x,x') = G(x,x') \qquad \text{para} \quad x \ge x', \tag{1.135}$$

es decir, $G_1(x,x')$ es la función de Green a la izquierda de x' y $G_2(x,x')$ es la función de Green a la derecha de x'. Como $G(x,x')$ es continua se tiene que $G_1(x',x') = G_2(x',x')$. En términos de estas funciones la expresión (1.132) podemos escribirla así:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^x dx'\, G(x,x')\, f(x') + \int_x^b dx'\, G(x,x')\, f(x') \\ &= \int_a^x dx'\, G_2(x,x')\, f(x') + \int_x^b dx'\, G_1(x,x')\, f(x'), \end{aligned} \tag{1.136}$$

donde hemos usado que:

- En la primera integral la variable de integración x' va de a hasta x de modo que en esta integral siempre se verifica que $x' \le x$ y por tanto podemos sustituir el integrando $G(x,x')$ por $G_2(x,x')$.

- En la segunda integral la variable de integración x' va de x hasta b de modo que en esta integral siempre se verifica que $x' \ge x$ y podemos entonces sustituir el integrando $G(x,x')$ por $G_1(x,x')$.

Ahora queremos comprobar que la función $y(x)$ definida por la relación (1.136) satisface la ecuación (1.132); ecuación que escribimos de esta forma:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p'(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y(x) + \mu\,r(x)\,y(x) = f(x)\,. \tag{1.137}$$

Para ello pasamos a calcular el valor de las primeras dos derivadas de $y(x)$ usando la regla de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} F(x,y)\,dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F}{\partial x}dy + F[x,b(x)]\frac{db}{dx} - F[x,a(x)]\frac{da}{dx}\,. \tag{1.138}$$

La primera derivada viene dada por

$$\frac{dy}{dx} = \int_a^x dx'\,\frac{\partial}{\partial x}G_2(x,x')\,f(x') + G_2(x,x)f(x) + \int_x^b dx'\,\frac{\partial}{\partial x}G_1(x,x')\,f(x') - G_1(x,x)f(x). \tag{1.139}$$

Pero como $G(x,x')$ es continua se tiene que $G_1(x,x) = G_2(x,x)$, de modo que la relación anterior se reduce a

$$\frac{dy}{dx} = \int_a^x dx'\,G_2'(x,x')\,f(x') + \int_x^b dx' G_1'(x,x')\,f(x'). \tag{1.140}$$

Derivamos una vez más usando la fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \int_a^x dx'\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_2(x,x')\,f(x') + f(x)\frac{\partial}{\partial x}G_2(x,x)\\ &\quad + \int_x^b dx'\frac{\partial^2}{\partial x^2}G_1(x,x')\,f(x') - f(x)\frac{\partial}{\partial x}G_1(x,x).\end{aligned} \tag{1.141}$$

Como $G_2'(x,x) - G_1'(x,x) = 1/p(x)$, se deduce que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_a^x dx'\,G_2''(x,x')\,f(x') + \int_x^b dx' G_1''(x,x')\,f(x') + \frac{f(x)}{p(x)}. \tag{1.142}$$

Sustituyendo las expresiones de $y''(x)$, $y'(x)$ así obtenidas en la ecuación (1.137) y teniendo en cuenta que G_1 y G_2 satisfacen la ecuación[31]

$$p(x)G_n''(x,x') + p'(x)G_n'(x,x') + [q(x) + \mu\,r(x)]\,G_n(x,x') = 0 \tag{1.143}$$

es fácil ver que la ecuación (1.137) se verifica, tal como queríamos demostrar.

• Ahora demostraremos que (1.132) satisface las condiciones de contorno (1.133b) y (1.133c). Por definición, la función de Green satisface la condición de contorno en $x = a$, es decir,

$$\alpha_1 G(a,x') + \alpha_2\,\frac{\partial}{\partial x}\,G(x,x')\bigg|_{x=a} = 0.$$

Multiplicando por $f(x')$ e integrando sobre todo el intervalo $a \le x \le b$ se tiene que

$$\int_a^b dx'\,f(x')\left\{\alpha_1 G(a,x') + \alpha_2\,\frac{\partial}{\partial x}\,G(x,x')\bigg|_{x=a}\right\} = 0,$$

[31] Téngase en cuenta que $G_1(x,x')$ y $G_2(x,x')$ son funciones *continuas* en sus intervalos de definición, a saber, en $a \le x \le x'$ y $x' \le x \le b$, respectivamente.

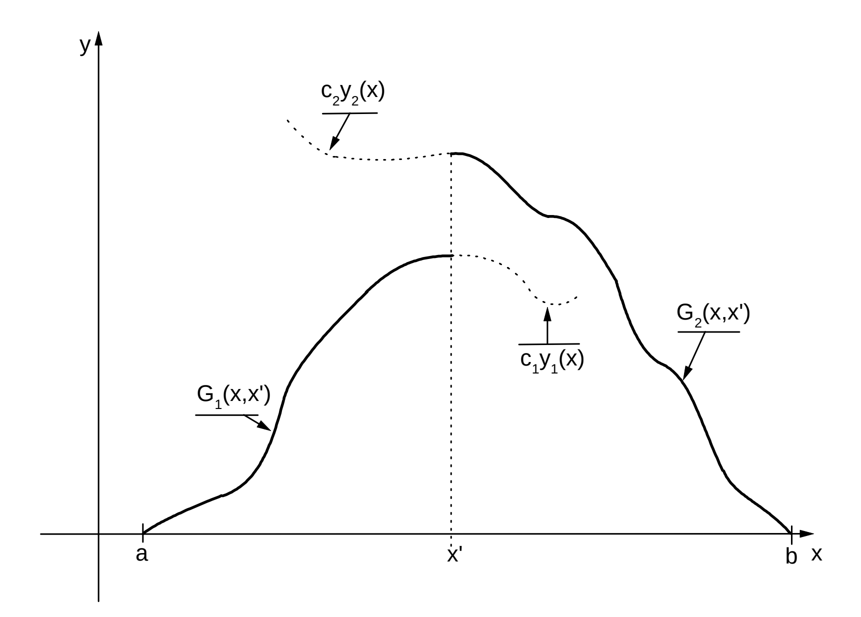


Figura 1.8: La función de Green $G(x, x')$ se construye a partir de dos soluciones y_1 e y_2 que cumplen las condiciones de contorno para la izquierda y para la derecha, respectivamente. Si c_1 y c_2 no se eligen bien, tendríamos situaciones inadmisibles, tal como la que se muestra en la figura, en la que $G(x, x')$ no es continua.

y por tanto

$$\alpha_1 \int_a^b dx'\, f(x')\, G(x, x') + \alpha_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b dx'\, f(x')\, G(x, x') \right]_{x=a} = 0.$$

De esta relación, y teniendo en cuenta la ecuación (1.132), se deduce que

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0\,,$$

que es lo que queríamos demostrar. Se procedería de modo análogo para demostrar que (1.132) también satisface la condición de contorno en $x = b$ dada por la ecuación (1.133b).

1.8.3. Construcción de la función de Green

En esta sección vamos a mostrar cómo hallar ("construir") la función de Green de un problema de Sturm-Liouville aprovechando que conocemos que la función de Green ha de verificar las dos propiedades que hemos deducido en la sección 1.8.1 anterior, a saber, continuidad de $G(x, x')$ y discontinuidad de tamaño $1/p(x')$ de $G'(x, x')$ en $x = x'$.

Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación homogénea $(\mathcal{L} + \mu)\, y_1(x) = 0$ que satisface la condición de contorno en $x = a$. Análogamente, sea $y_2(x)$ una solución de la ecuación homogénea $(\mathcal{L} + \mu)\, y_2(x) = 0$ que satisface la condición de contorno en $x = b$. En lo que sigue asumiremos que las condiciones de contorno son regulares. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) &= 0, \\ \beta_1 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Empezamos justificando que $G_1(x, x')$ y la función $y_1(x)$ deben ser proporcionales. Sabemos

que ambas funciones satisfacen la ecuación $\mathcal{L}y = -\mu y$, es decir:

$$(\mathcal{L}+\mu)y_1(x) = 0,$$
$$(\mathcal{L}+\mu)G_1(x,x') = 0,$$

y que además verifican la condición de contorno $\alpha_1 y_1(a) + \alpha_2 y_1'(a) = 0$. Por el teorema 1.1 de la página 20 esto significa que $y_1(x)$ y $G_1(x,x')$ difieren en una constante multiplicativa, es decir,

$$G_1(x,x') = c_1 y_1(x).$$

De igual modo se puede demostrar que

$$G_2(x,x') = c_2 y_2(x).$$

En definitiva, para $x \neq x'$, la función de Green $G(x,x')$ viene dada por

$$\begin{cases} G(x,x') & \equiv G_1(x,x') & = c_1\, y_1(x) & \quad \text{para } x \le x', \\ G(x,x') & \equiv G_2(x,x') & = c_2\, y_2(x) & \quad \text{para } x' \le x. \end{cases}$$

Tal como se ilustra en la figura 1.8, si tomamos valores cualesquiera para las constantes c_1 y c_2, entonces no podemos garantizar que la función $G(x,x')$ sea la auténtica función de Green del problema puesto que sabemos que ésta ha de verificar las propiedades de ser continua en x' y que su derivada tenga una discontinuidad de tamaño $1/p(x')$ en x'. En definitiva, para cada x', debemos escoger el valor de c_1 y c_2 [valores que dependerán del valor x' escogido y por eso escribiremos $c_1(x')$ y $c_2(x')$] de modo que $G(x,x')$ sea continua en x' y que su derivada tenga una discontinuidad de tamaño $1/p(x')$ en x', es decir, de modo que

$$c_1(x')\, y_1(x') - c_2(x')\, y_2(x') = 0, \tag{1.144}$$
$$c_1(x')\, y_1'(x') - c_2(x')\, y_2'(x') = -\frac{1}{p(x')}. \tag{1.145}$$

Existirán soluciones $c_1(x')$, $c_2(x')$ de este sistema si y sólo si el determinante de sus coeficientes es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} y_1(x') & -y_2(x') \\ y_1'(x') & -y_2'(x') \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow W[x'; y_1, -y_2] = -W[x'; y_1, y_2] \neq 0, \tag{1.146}$$

es decir, si y sólo si el wronskiano W de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ es nulo, o lo que es lo mismo, si y sólo si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son linealmente independientes. Veamos que esto es realmente lo que ocurre. Lo demostraremos por reducción al absurdo: si y_1 e y_2 fueran linealmente dependientes se tendría que $y_1(x) = c\, y_2(x)$, por lo que y_1 (e y_2 también) sería solución de la ecuación homogénea

$$(\mathcal{L}+\mu)\, y_1(x) = 0,$$

satisfaciendo además las condiciones de contorno homogéneas en $x = a$ y en $x = b$ (pues $y_1 = c\, y_2$ e y_2 satisface la condición de contorno en $x = b$). Esto supondría que μ es un autovalor y la función $y_1(x)$ una autofunción de $\mathcal{L}$, lo que iría en contra, según el teorema de la alternativa de Fredholm, de la hipótesis de partida de que el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo tiene solución.

▷ ***Ejercicio** 1.17*

¿Podría ocurrir que el problema de Sturm-Liouville homogéneo tuviera solución, $y_1(x)$ y que el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo también tuviera solución? Una pista: ¿es nulo el producto escalar $\langle y_1(x) | \delta(x - x')/r(x)\rangle$ para todo x'?

En definitiva, hemos demostrado que y_1 e y_2 son linealmente independientes, por lo que su wronskiano es distinto de cero y entonces podemos hallar c_1 y c_2 mediante, por ejemplo, la regla de Cramer:

$$c_1(x') = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -y_2(x') \\ -\dfrac{1}{p(x')} & -y_2'(x') \end{vmatrix}}{W[x'; y_1, -y_2]} = -\frac{y_2(x')}{p(x')\, W[x'; y_1, -y_2]} = \frac{y_2(x')}{p(x')\, W[x'; y_1, y_2]} \tag{1.147}$$

$$c_2(x') = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x') & 0 \\ y_1'(x') & -\dfrac{1}{p(x')} \end{vmatrix}}{W[x'; y_1, -y_2]} = \frac{y_1(x')}{p(x')\, W[x'; y_1, y_2]}, \tag{1.148}$$

es decir

$$G(x, x') = \begin{cases} G_1(x, x') = \dfrac{1}{p(x')\, W[x'; y_1, y_2]} y_1(x)\, y_2(x'), & a \le x \le x' \le b, \\ G_2(x, x') = \dfrac{1}{p(x')\, W[x'; y_1, y_2]} y_1(x')\, y_2(x), & a \le x' \le x \le b. \end{cases} \tag{1.149}$$

Es fácil demostrar que $p(x')\, W[x', y_1, y_2]$ es constante pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ p(x)\, W[x; y_1, y_2] \right\} &= \frac{d}{dx} \Big\{ p(x) \left[y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x) \right] \Big\} \\ &= y_1(x) \frac{d}{dx} [p(x)\, y_2'(x)] + y_1'(x) p(x) y_2'(x) \\ &\quad - y_2(x) \frac{d}{dx} [p(x) y_1'(x)] - y_1'(x) p(x) y_2'(x) \\ &= y_1(x) \left[-q(x)\, y_2(x) - \mu\, r(x)\, y_2(x) \right] - y_2(x) \left[-q(x)\, y_1(x) - \mu\, r(x)\, y_1(x) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

En definitiva, escribiendo $C = 1/[p(x')\, W(x')]$, obtenemos mediante el procedimiento de *construcción* la función de Green

$$G(x, x') = \begin{cases} G_1(x, x') = C\, y_1(x)\, y_2(x'), & a \le x \le x', \\ G_2(x, x') = C\, y_1(x')\, y_2(x), & x' \le x \le b, \end{cases} \tag{1.150}$$

correspondiente al problema de Sturm-Liouville dado por las ecuaciones (1.124).

La solución $y(x)$ del problema no homogéneo (1.124) sabemos que viene dada por la ecuación (1.126). Esta relación toma entonces la forma:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b dx'\, G(x, x')\, f(x') \\ &= \int_a^x dx'\, G_2(x, x')\, f(x') + \int_x^b dx'\, G_1(x, x')\, f(x') \qquad (1.151) \\ &= C y_2(x) \int_a^x dx'\, y_1(x')\, f(x') + C y_1(x) \int_x^b dx'\, y_2(x')\, f(x'). \qquad (1.152) \end{aligned}$$

De la relación (1.150) se deduce que

$$G(x, x') = G(x', x). \tag{1.153}$$

Esta propiedad se conoce como *simetría de reciprocidad* o *reciprocidad de Maxwell*.

1.8.4. Representación de la función de Green en serie de autofunciones

La función de Green $G(x,x')$ puede obtenerse de una forma alternativa a la de la sección 1.8.3 anterior mediante un desarrollo en serie de autofunciones del operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L}$. Si asumimos que $G(x,x')$ es una función de cuadrado sumable[32] en el intervalo $[a,b]$ con respecto a la función peso $r(x)$, entonces podemos expresar $G(x,x')$ como una serie de autofunciones del operador hermítico $\mathcal{L}$ (serie que converge en media cuadrática):

$$G(x,x') = \sum_n a_n(x')\psi_n(x), \tag{1.154}$$

donde λ_n y ψ_n son los autovalores y las autofunciones (respectivamente) del operador $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\,\psi_n = -\lambda_n\psi_n. \tag{1.155}$$

Sabemos que la función de Green satisface la ecuación

$$(\mathcal{L}+\mu)\,G(x,x') = \frac{1}{r(x)}\delta(x-x') \tag{1.156}$$

y que la relación de cierre (véase (1.89) en la página 32) es

$$\sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\psi_n(x)\,\psi_n^*(x') = \frac{1}{r(x)}\delta(x-x'), \tag{1.157}$$

por lo que, usando (1.154), la ecuación (1.156) puede escribirse así:

$$(\mathcal{L}+\mu)\sum_n a_n(x')\psi_n(x) = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\psi_n(x)\,\psi_n^*(x'),$$

es decir,

$$\sum_n a_n(x')\,(\mu-\lambda_n)\,\psi_n(x) = \sum_n \frac{\psi_n^*(x')}{\|\psi_n\|^2}\psi_n(x).$$

Entonces

$$a_n(x') = \frac{1}{\mu-\lambda_n}\frac{\psi_n^*(x')}{\|\psi_n\|^2} \tag{1.158}$$

y por tanto

$$\boxed{G(x,x') = \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\mu-\lambda_n}}. \tag{1.159}$$

La solución del problema no homogéneo $(\mathcal{L}+\mu)\,y(x) = f(x)/r(x)$ viene dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b dx'\,f(x')\,G(x,x') \\ &= \sum_n \frac{1}{\|\psi_n\|^2}\frac{\int_a^b dx'\,\psi_n^*(x')\,f(x')}{\mu-\lambda_n}\psi_n(x) \\ &= \sum_n \frac{c_n}{\mu-\lambda_n}\psi_n(x) \end{aligned} \tag{1.160}$$

[32]Por ejemplo, si el intervalo $[a,b]$ es finito, la función será siempre de cuadrado sumable dado que la función de Green es continua.

con

$$c_n = \frac{\langle \psi_n | f/r \rangle}{\|\psi_n\|^2} = \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \int_a^b dx'\, \psi_n^*(x')\, f(x').$$

Esta es la misma expresión que obtuvimos en (1.121), página 41. De hecho, el método usado tanto aquí como allí para obtener $y(x)$ es esencialmente el mismo.

De la expresión (1.159) se observa que la relación de reciprocidad toma ahora la forma más general

$$G(x, x') = G^*(x', x). \tag{1.161}$$

Cuando las condiciones de contorno son regulares las autofunciones son reales (véase el teorema 1.3 de la página 22) y, en este caso, la relación anterior se reduce a la ecuación (1.153), $G(x, x') = G(x', x)$, la cual se obtuvo asumiendo condiciones de contorno regulares.

▶ *Ejemplo 1.15*

En este ejemplo vamos a obtener la solución de un problema de Sturm-Liouville a partir de la función de Green en forma cerrada (por "construcción") y en serie de autofunciones.
Sea la ecuación diferencial de Sturm-Liouville no homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \tag{1.162}$$

en la que $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = 1$ y $\mu = 0$, con condiciones de contorno regulares de Dirichlet:

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \tag{1.163}$$

• *Solución por construcción.* Empezaremos calculando la función de Green de este problema de Sturm-Liouville mediante el procedimiento de construcción. La solución general de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

es

$$y(x) = A + Bx.$$

La solución $y_1(x) = A_1 + B_1 x$ de (1.162) que satisface la condición de contorno en $x = 0$ es

$$y_1(0) = 0 = A_1 + B_1 \cdot 0 = A_1 \Rightarrow y_1(x) = B_1 x.$$

La solución $y_2(x) = A_2 + B_2 x$ de (1.162) que verifica la condición de contorno en $x = L$ es

$$y_2(L) = 0 = A_2 + B_2 L \Rightarrow A_2 = -B_2 L \Rightarrow y_2(x) = B_2(-L + x).$$

(Por supuesto, también podríamos haber dejado las expresiones en términos de A_2 en vez de B_2.)
La función de Green será por tanto

$$G(x, x') = \begin{cases} G_1(x, x') = \bar{c}_1(x')\, y_1(x) = c_1(x')\, x, & 0 \le x \le x', \\ G_2(x, x') = \bar{c}_2(x')\, y_2(x) = c_2(x')\, (x - L), & x' \le x \le L. \end{cases}$$

Las condiciones de continuidad de G en x', (1.144), y de discontinuidad de G' en x', (1.145), nos permitirán calcular las funciones c_1 y c_2:

$$\begin{aligned} c_1(x')\, x' - c_2(x')\, (x' - L) &= 0, \\ c_2(x') - c_1(x') &= \frac{1}{p(x')} = 1, \end{aligned}$$

ya que $p(x) = 1$. La solución de este sistema de ecuaciones algebraicas es

$$c_1 = \frac{x' - L}{L}, \qquad c_2 = \frac{x'}{L},$$

por lo que la función de Green es

$$G(x,x') = \begin{cases} G_1(x,x') = \dfrac{1}{L}\, x\,(x'-L), & 0 \le x \le x', \\ \\ G_2(x,x') = \dfrac{1}{L}\, x'\,(x-L), & x' \le x \le L. \end{cases}$$

La solución del problema de Sturm-Liouville es

$$y(x) = \int_0^L dx'\, f(x')\, G(x,x').$$

Por concretar, supongamos que $f(x) = -x$ y $L = 1$. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x dx'\, f(x')\, G_2(x,x') + \int_x^1 dx'\, f(x')\, G_1(x,x') \\ &= \int_0^x dx'\, (-x')x'\,(x-1) + \int_x^1 dx'\, (-x')x\,(x'-1) \\ &= \frac{x}{6}(1-x^2)\,. \end{aligned} \tag{1.164}$$

▷ ***Ejercicio*** *1.18*

Comprueba por sustitución directa que (1.164) *satisface la ecuación diferencial* (1.162) *y las condiciones de contorno* (1.163).

- *Solución en serie de autofunciones.* Ahora vamos a calcular la solución del problema de Sturm-Liouville en términos de una serie de autofunciones del operador de Sturm-Liouville $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$. La ecuación de autovalores de $\mathcal{L}$ es

$$\mathcal{L}\,\psi = -\lambda\,\psi \Longrightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = -\lambda\psi\,. \tag{1.165}$$

Es fácil demostrar que para $\lambda \le 0$ no existe solución de (1.165) que satisfaga las condiciones de contorno (1.163) (hágase como ejercicio). Veamos qué pasa para $\lambda > 0$. En este caso la solución general es

$$\psi(x) = c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{\lambda}x.$$

Utilizando las condiciones de contorno (1.163) obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0 &\Rightarrow c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0, \\ \psi(L) = 0 &\Rightarrow c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = \pi, 2\pi, 3\pi \cdots \end{aligned}$$

Los autovalores son por tanto

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

y las autofunciones correspondientes son

$$\psi_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Su norma es

$$\|\psi_n\|^2 = \langle\psi_n|\psi_n\rangle = \int_0^L dx\, r(x)\psi_n^*(x)\,\psi_n(x) = \int_0^L dx\, \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{L}{2}.$$

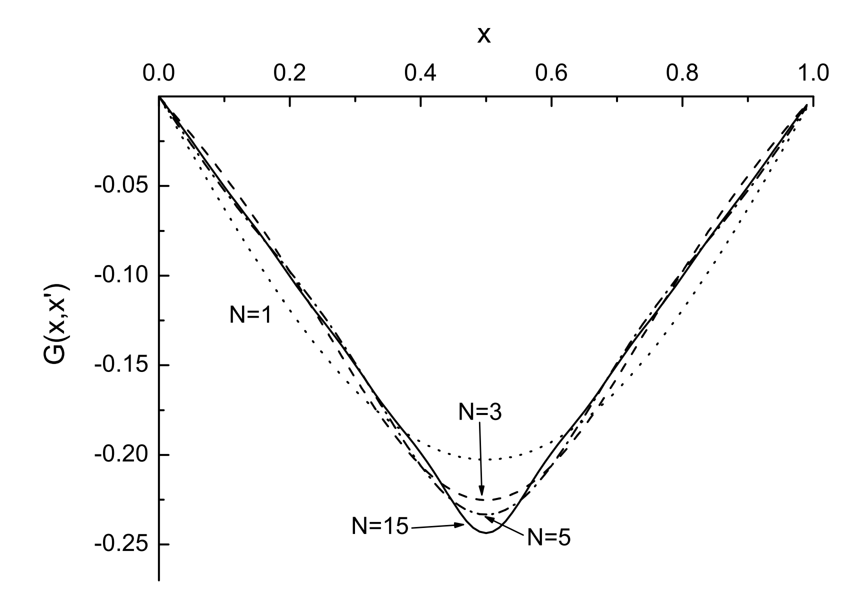


Figura 1.9: La función de Green del ejemplo 1.15 expresada mediante serie de autofunciones truncada en el término N, $G(x,x') \simeq -\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right)$ para $L=1$ y $x'=1/2$.

Nótese que $\mu = 0 \neq \lambda_n$ lo que garantiza que el problema inhomogéneo tiene solución (¿por qué?). Utilizando la fórmula (1.160) se tiene que

$$\begin{aligned} G(x,x') &= -\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right) \\ &= -\frac{2L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x'\right). \end{aligned}$$

Esta expresión no es más que el desarrollo en serie de Fourier de $G(x,x')$. En la figura 1.9 mostramos esta función cuando se retienen los $N = 1,3,5,15$ primeros términos de la serie para $L=1$ y $x'=1/2$. Es notable lo rápido que converge la serie hacia la solución exacta $G(x,x') = -x/2$ para $x \le 1/2$ y $G(x,x') = (x-1)/2$ para $x \ge 1/2$.
Hallemos ahora la solución $y(x)$ del problema de Sturm-Liouville original en términos de las autofunciones para $f(x) = -x$ y $L=1$:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^1 dx'\,(-x')\,G(x,x') && (1.166)\\ &= \int_0^1 dx'\,(-x')\left(-\frac{2}{\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\,\mathrm{sen}\,(n\pi x') \\ &= \left(\frac{2}{\pi^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\,(n\pi x)\int_0^1 dx' x'\,\mathrm{sen}\,(n\pi x') \\ &= \frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,. && (1.167) \end{aligned}$$

Esta expresión es simplemente el desarrollo en serie de Fourier de la solución $y(x) = \frac{x}{6}(1-x^2)$ que obtuvimos en (1.164). En la figura 1.10 se compara esta solución con la solución aproximada que se obtiene cuando se retienen los *tres* primeros términos de la solución en serie de autofunciones (1.167).

◀

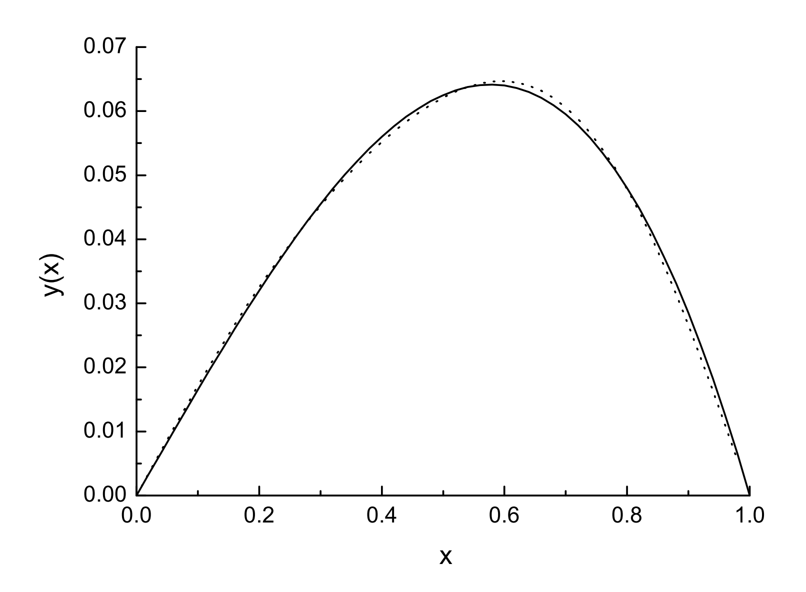


Figura 1.10: La solución $y(x) = \frac{x}{6}(1-x^2)$ exacta (línea continua) y la aproximada (1.167) con los *tres* primeros términos (línea discontinua).

1.9. Condiciones de contorno no homogéneas

Sea la ecuación de Sturm-Liouville inhomogénea

$$\frac{1}{r(x)}\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+q(x)\right\}y(x)+\mu\,y(x)=\frac{f(x)}{r(x)},$$

o, en forma de operadores,

$$(\mathcal{L}+\mu)\,y(x)=\frac{f(x)}{r(x)}, \tag{1.168}$$

sujeta a las condiciones de contorno *inhomogéneas*,

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)&=\alpha,\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)&=\beta, \end{aligned} \tag{1.169}$$

y sean $\widetilde{y}(x), F_1(x)$ y $F_2(x)$ las soluciones de

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}+\mu)\,\widetilde{y}(x)&=\frac{f(x)}{r(x)},\\ \alpha_1\widetilde{y}(a)+\alpha_2\widetilde{y}\,'(a)&=0,\\ \beta_1\widetilde{y}(b)+\beta_2\widetilde{y}\,'(b)&=0, \end{aligned} \tag{1.170}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}+\mu)\,F_1(x)&=0,\\ \alpha_1F_1(a)+\alpha_2F_1'(a)&=\alpha,\\ \beta_1F_1(b)+\beta_2F_1'(b)&=0, \end{aligned} \tag{1.171}$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}+\mu)\,F_2(x)&=0,\\ \alpha_1F_2(a)+\alpha_2F_2'(a)&=0,\\ \beta_1F_2(b)+\beta_2F_2'(b)&=\beta. \end{aligned} \tag{1.172}$$

Entonces, la solución del problema de Sturm-Liouville doblemente inhomogéneo [ecuación de Sturm-Liouville inhomogénea (1.168) más condiciones de contorno inhomogéneas (1.169)] es

$$y(x) = \widetilde{y}(x) + F_1(x) + F_2(x), \tag{1.173}$$

como es fácil de comprobar.

▷ ***Ejercicio*** *1.19*

Comprueba mediante sustitución directa en las ecuaciones (1.168) *y* (1.169) *que* $y(x) = \widetilde{y}(x) + F_1(x) + F_2(x)$ *es solución del problema (doblemente) no homogéneo, siendo* $\widetilde{y}(x)$, $F_1(x)$ *y* $F_2(x)$ *las funciones definidas por las ecuaciones* (1.170), (1.171) *y* (1.172), *respectivamente.*

▶ *Ejemplo 1.16*

Sea el siguiente problema de Sturm-Liouville doblemente inhomogéneo

$$y''(x) = f(x)\,, \tag{1.174}$$

$$CC: \begin{cases} y(0) = \alpha, \\ y(1) + y'(1) = \beta. \end{cases} \tag{1.175}$$

Empezamos calculando la solución $\widetilde{y}(x)$ del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo con condiciones de contorno homogéneas:

$$\widetilde{y}''(x) = f(x),$$

$$CC: \begin{cases} \widetilde{y}(0) = 0, \\ \widetilde{y}(1) + \widetilde{y}'(1) = 0. \end{cases}$$

Para ello calculamos la función de Green, tal y como vimos en la sección 1.8.3 anterior:

- Para $0 \le x \le x' < 1$:

  $$y_1''(x) = 0 \Rightarrow y_1(x) = A_1 x + B_1.$$

  Imponiendo la condición de contorno por la izquierda tenemos que

  $$y_1(0) = 0 = B_1 \Rightarrow y_1(x) = A_1 x.$$

- Para $0 < x' \le x \le 1$:

  $$y_2''(x) = 0 \Rightarrow y_2(x) = A_2 x + B_2.$$

  Imponiendo la condición de contorno por la derecha obtenemos

  $$y_2(1) + y_2'(1) = 0 = 2A_2 + B_2 \Rightarrow B_2 = -2A_2 \Rightarrow y_2(x) = A_2(x-2).$$

Luego la función de Green es

$$G(x,x') = \begin{cases} G_1(x,x') = \bar{c}_1(x')\, y_1(x) = c_1(x')\, x, & 0 \le x \le x', \\ G_2(x,x') = \bar{c}_2(x')\, y_2(x) = c_2(x')\, (x-2), & x' \le x \le 1. \end{cases}$$

Imponiendo las condiciones de continuidad de la función de Green y de discontinuidad de su derivada hallamos las funciones c_1 y c_2:

$$c_1(x')\, x' - c_2(x')\, (x'-2) = 0,$$
$$c_1(x') - c_2(x') = -1,$$

cuya solución es

$$c_1(x') = \frac{x'}{2} - 1, \qquad c_2(x') = \frac{x'}{2}.$$

Luego la función de Green es

$$G(x,x') = \begin{cases} G_1(x,x') = (x'-2)\dfrac{x}{2} & 0 \le x \le x', \\[2ex] G_2(x,x') = (x-2)\dfrac{x'}{2} & x' \le x \le 1. \end{cases}$$

Por tanto la solución $\widetilde{y}(x)$ para una $f(x)$ dada será

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(x) &= \int_0^1 dx'\, G(x,x')\, f(x') \\ &= \frac{x-2}{2}\int_0^x dx'\, x' f(x') + \frac{x}{2}\int_x^1 dx'\,(x'-2)\, f(x')\,. \end{aligned}$$

Ahora debemos calcular las funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$. El problema de Sturm-Liouville para $F_1(x)$ es

$$F_1''(x) = 0\,,$$
$$CC : \begin{cases} F_1(0) = \alpha, \\ F_1(1) + F_1'(1) = 0. \end{cases}$$

La solución de la ecuación diferencial es $F_1(x) = Ax + B$. Imponiendo la condición de contorno en $x = 0$, se obtiene $B = \alpha$ de modo que $F_1(x) = Ax + \alpha$. De la condición de contorno en el otro extremo se deduce que

$$F_1(1) + F_1'(1) = 0 \Rightarrow 2A + \alpha = 0 \Rightarrow A = -\frac{\alpha}{2} \Rightarrow F_1(x) = \frac{\alpha}{2}\,(2-x).$$

El problema de Sturm-Liouville para $F_2(x)$ es

$$F_2''(x) = 0,$$
$$CC : \begin{cases} F_2(0) = 0, \\ F_2(1) + F_2'(1) = \beta. \end{cases}$$

La solución de la ecuación diferencial es $F_2(x) = Ax + B$. De la condición de contorno en $x = 0$ se deduce que $F_2(x) = Ax$. Imponiendo la otra condición de contorno se obtiene:

$$F_2(1) + F_2'(1) = \beta \Rightarrow 2A = \beta \Rightarrow A = \frac{\beta}{2} \Rightarrow F_2(x) = \frac{\beta}{2}\,x.$$

En definitiva, la solución del problema de Sturm-Liouville doblemente inhomogéneo dado por las ecuaciones (1.174) y (1.175) es

$$\begin{aligned} y(x) &= \widetilde{y}(x) + F_1(x) + F_2(x) \\ &= \frac{x-2}{2}\int_0^x dx'\, x' f(x') + \frac{x}{2}\int_x^1 dx'\,(x'-2)\, f(x') + \frac{\alpha}{2}\,(2-x) + \frac{\beta}{2}\,x\,. \end{aligned}$$

◀

1.10. Cociente de Rayleigh

Existe una interesante relación entre el problema de Sturm-Liouville y los problemas variacionales.[33] De hecho, esta conexión se utiliza para deducir muchos resultados sobre el problema

[33]Véase, por ejemplo, el capítulo 13 de [But68] o el capítulo 20 de [RHB98].

de Sturm-Liouville.[34] En esta sección sólo trataremos sobre el cociente de Rayleigh, que es una de las facetas de tipo variacional del problema de Sturm-Liouville.

Sea la ecuación de Sturm-Liouville homogénea

$$(\mathcal{L} + \lambda)\, y(x) = 0 \tag{1.176}$$

donde $\mathcal{L}$ es el operador de Sturm-Liouville,

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\}.$$

Si multiplicamos la ecuación de Sturm-Liouville escalarmente por $y(x)$

$$\langle y | (\mathcal{L} + \lambda)\, y \rangle = \langle y | \mathcal{L}\, y \rangle + \lambda \langle y | y \rangle = 0,$$

y despejamos el autovalor, se obtiene

$$\lambda = -\frac{\langle y | \mathcal{L}\, y \rangle}{\langle y | y \rangle} \equiv R[y]. \tag{1.177}$$

Esta expresión es conocida como el *cociente de Rayleigh*. De forma más explícita:

$$R[y(x)] = \frac{-\displaystyle\int_a^b dx\, r(x)\, y^*(x) \frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} y(x) \right] + q(x)\, y(x) \right\}}{\displaystyle\int_a^b dx\, r(x)\, y^*(x) y(x)}$$

o, integrando por partes,

$$R[y(x)] = \frac{\left[-p(x)\, y^*(x) \dfrac{dy}{dx} \right]_a^b + \displaystyle\int_a^b dx \left[p(x) \left| \frac{dy}{dx} \right|^2 - q(x)\, |y(x)|^2 \right]}{\displaystyle\int_a^b dx\, r(x)\, |y(x)|^2}. \tag{1.178}$$

1.10.1. Principio de minimización de Rayleigh-Ritz

El cociente de Rayleigh permite por tanto hallar el autovalor λ correspondiente a una autofunción dada $y(x)$ pues $\lambda = R[y(x)]$. Esto es poco práctico porque el cálculo del autovalor requiere el conocimiento previo de su autofunción, lo que no es siempre fácil o factible (además, normalmente, primero hay que conocer el autovalor para poder hallar la autofunción correspondiente). Sin embargo, el cociente de Rayleigh exhibe una propiedad muy útil que permite la *estimación* de los autovalores λ de un problema de Sturm-Liouville. La propiedad es la siguiente:

Teorema 1.11 *Sea $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots\}$ el espectro de autovalores de un problema de Sturm-Liouville cuyas autofunciones correspondientes son $\{\psi_0(x), \psi_1(x), \dots\}$, siendo λ_0 el autovalor más pequeño. Entonces λ_0 es igual al valor mínimo del cociente de Rayleigh para todas las funciones continuas que satisfacen las condiciones de contorno del problema de Sturm-Liouville (aunque* no *sean soluciones de la ecuación diferencial de Sturm-Liouville).*

[34] Véase, por ejemplo, el capítulo VI de [CH62].

Es decir:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= \text{mín}\, R[u(x)] \\
&= \text{mín}\ \left[-\frac{\langle u|\mathcal{L}\,u\rangle}{\|u\|^2}\right] \\
&= \text{mín}\ \frac{\left[-p\,u^*\dfrac{du}{dx}\right]_a^b + \displaystyle\int_a^b dx\ \left[p(x)\left|\dfrac{du}{dx}\right|^2 - q(x)\,|u|^2\right]}{\displaystyle\int_a^b dx\, r(x)\,|u|^2},
\end{aligned} \tag{1.179}$$

donde $u(x)$ *son funciones continuas que satisfacen las condiciones de contorno* y que llamaremos funciones *prueba*. Es claro que $\lambda_0 = R[\psi_0]$. La relación (1.179) es fácil de demostrar. Si $u(x)$ es una función "bien comportada", sabemos que (véase la sección 1.6)

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x), \quad \text{con} \quad c_n = \frac{\langle \psi_n|u\rangle}{\|\psi_n\|}. \tag{1.180}$$

Si $u(x)$ es una función continua y satisface las mismas condiciones de contorno homogéneas que ψ_n, entonces la serie anterior es uniformemente convergente (véase el teorema 1.6 en la página 27) y puede derivarse término a término (véase el teorema 7.5 en la página 406), de modo que

$$\mathcal{L}u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{L}\psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-\lambda_n)\psi_n(x).$$

Sustituyendo esta relación en la expresión del cociente de Rayleigh,

$$R[u] = -\frac{\langle u|\mathcal{L}\,u\rangle}{\langle u|u\rangle}, \tag{1.181}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
R[u] &= -\frac{\langle \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n|\sum_{m=0}^{\infty} c_m(-\lambda_m)\psi_m\rangle}{\langle \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n|\sum_{m=0}^{\infty} c_m\psi_m\rangle} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m c_n^* c_m \langle\psi_n|\psi_m\rangle}{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_n^* c_m \langle\psi_n|\psi_m\rangle} \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |c_n|^2 \|\psi_n\|^2}{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|^2}\,.
\end{aligned} \tag{1.182}$$

Dado que $\lambda_0 < \lambda_n$ para $n > 0$, se tiene que

$$R[u] \geq \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0 |c_n|^2 \|\psi_n\|^2}{\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|^2} = \lambda_0. \tag{1.183}$$

En la ecuación (1.182), la igualdad $R[u] = \lambda_0$ se da cuando $c_n = 0$ para $n \geq 1$, es decir cuando $u = c_0\psi_0$, es decir, cuando la función prueba es justamente la autofunción correspondiente al autovalor mínimo.

Este resultado se puede generalizar fácilmente para la estimación de otros autovalores. Por ejemplo, supongamos que escogemos una función prueba u ortogonal a ψ_0, tal que

$$\langle\psi_0|u\rangle = 0 \Rightarrow c_0 = 0.$$

Entonces la ecuación (1.182) se reduce a

$$R[u] = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |c_n|^2 \|\psi_n\|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|^2}\,. \tag{1.184}$$

Como $\lambda_1 < \lambda_n$ se tiene que

$$R[u] \geq \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1 |c_n|^2 \|\psi_n\|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \|\psi_n\|^2} = \lambda_1. \tag{1.185}$$

La igualdad $R[u] = \lambda_1$ se da cuando $c_n = 0$ para $n > 1$, es decir, cuando $\langle \psi_n | u \rangle = 0$ para $n > 1$ y por lo tanto, $u = \psi_1$. La generalización es obvia y se traduce en el siguiente teorema:[35]

Teorema 1.12 *El valor mínimo del cociente de Rayleigh para todas las funciones prueba continuas $u(x)$ que son ortogonales a las n primeras autofunciones, $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}$, es el autovalor n-simo, λ_n.*

En la práctica se obtiene de modo aproximado el espectro de autovalores estimando λ_{n+1} mediante el cociente de Rayleigh de una función prueba $\widetilde{\psi}_{n+1}$ ortogonal a las n funciones prueba $\widetilde{\psi}_0, \dots, \widetilde{\psi}_n$ obtenidas anteriormente. Lo ideal sería escoger como función prueba $u(x)$ una función lo más parecida posible (idealmente igual) a la autofunción (desconocida) $\widetilde{\psi}_m$. Dado que ψ_m es desconocida, la elección de esta función prueba debería hacerse de modo juicioso incorporando todos los conocimientos (aunque sean cualitativos) sobre el comportamiento o forma que se espera tenga ψ_m. Veamos un ejemplo que nos permita entender mejor estas consideraciones.

▶ *Ejemplo 1.17*

Sea el problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda\, y = 0$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Este es un problema de Sturm-Liouville regular con $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, y $r(x) = 1$. Por el teorema 1.3 sabemos que para este problema hay una secuencia infinita de autovalores $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, y que las autofunciones ψ_n, con $n = 0, 1, 2, \cdots$, son reales y tienen n ceros en el intervalo abierto $(0, 1)$. Esta última información nos será especialmente útil a la hora de escoger las funciones prueba.
Este problema se corresponde con el de la ecuación de Schrödinger para una partícula en un pozo cuadrado infinito siendo λ_n proporcional a las energías posibles. También se corresponde con la ecuación de los modos de vibración de una cuerda sujeta por los extremos, siendo λ_n las frecuencias al cuadrado de los modos normales de vibración cuya longitud de onda viene dada por $2\pi/\sqrt{\lambda}$. La solución exacta de este problema es bien sencilla (y bien conocida): las autofunciones son $\psi_n = \operatorname{sen}\big(\sqrt{\lambda_n}\, x\big)$ con $\lambda_n = (n+1)^2 \pi^2, n = 0, 1, 2, \dots$ En particular $\lambda_0 = \pi^2 \simeq 9'8696$.
Dado que $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, y $r(x) = 1$, el cociente de Rayleigh es

$$R[u] = \frac{\left[-u^* \dfrac{du}{dx}\right|_0^1 + \displaystyle\int_0^1 dx\, \left|\dfrac{du}{dx}\right|^2}{\displaystyle\int_0^1 dx\, |u|^2}\,.$$

[35] Un teorema similar pero más general puede encontrarse en la sección 13.9 de [But68].

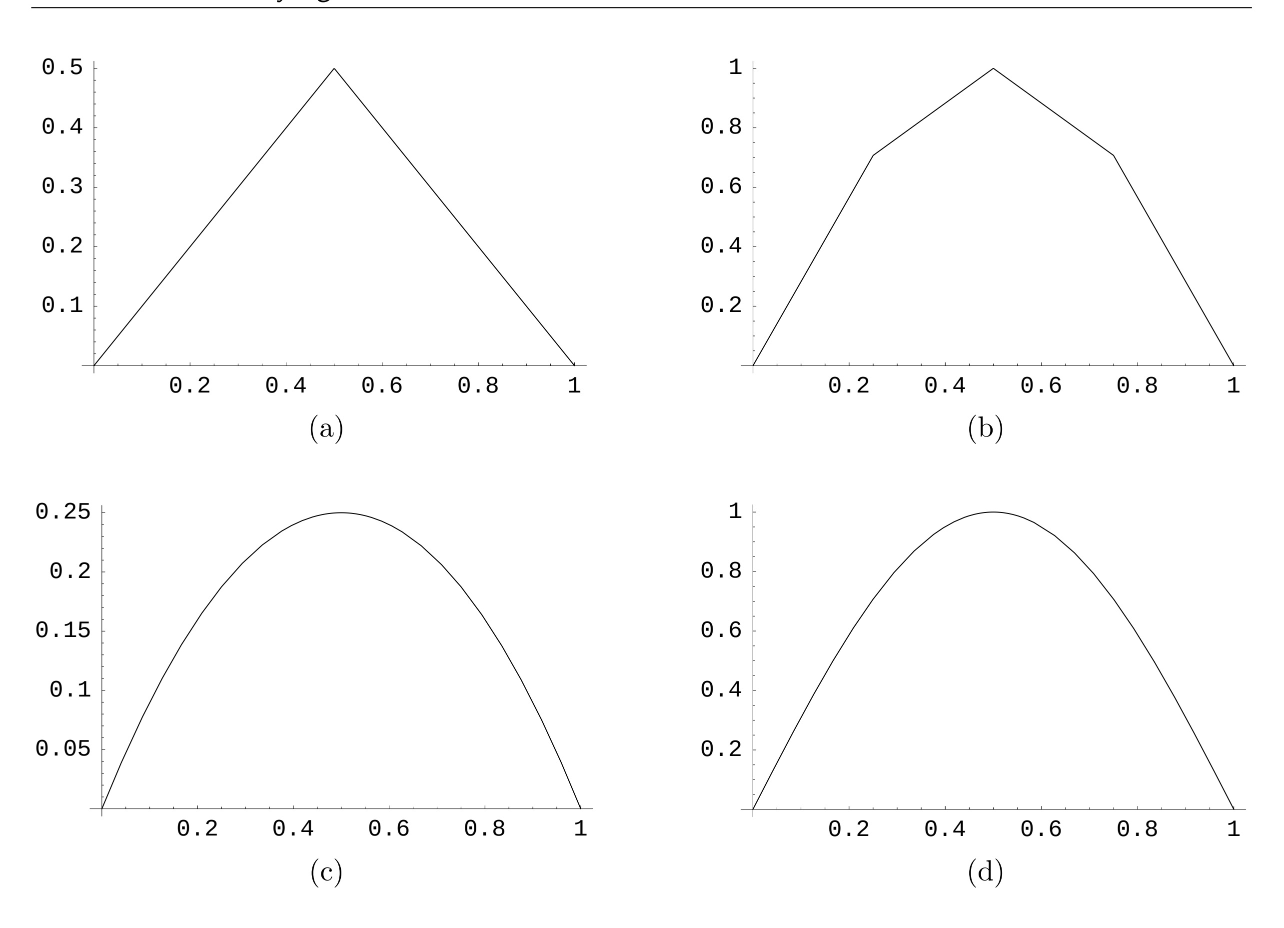


Figura 1.11: Funciones prueba $u_0(x)$: (a) ecuación (1.186); (b) ecuación (1.187) con $\alpha = 1/\sqrt{2}$; (c) ecuación (1.188); (d) ecuación (1.189) (autofunción exacta).

Pero las condiciones de contorno hacen que $\left[-u^* \dfrac{du}{dx}\right]_0^1 = 0$. Luego

$$R[u] = \frac{\displaystyle\int_0^1 dx \left|\frac{du}{dx}\right|^2}{\displaystyle\int_0^1 dx \, |u|^2} \, .$$

Vamos a continuación a proponer funciones prueba que sean continuas, que satisfagan las condiciones de contorno y que razonablemente puedan parecerse a ψ_0 de modo que sus cocientes de Rayleigh sean próximos al autovalor λ_0. Este último criterio nos dice, por ejemplo, que dado que ψ_0 no tiene ceros en $(0,1)$, debemos proponer funciones prueba u_0 que tampoco tengan ceros en este intervalo.
Vamos a probar las siguientes funciones:

1.

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ 1 - x & \text{si} \quad 1/2 \le x \le 1. \end{cases} \tag{1.186}$$

Para esta función tenemos que

$$\lambda_0 \le R[u_0] = \frac{\displaystyle\int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 dx}{\displaystyle\int_0^{1/2} x^2 \, dx + \int_{1/2}^1 (1-x)^2 \, dx} = \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{24}} = 12.$$

2.
$$u_0(x;\alpha)=\begin{cases}4\alpha x & \text{si} \quad 0\le x\le 1/4,\\ 2\alpha-1+4(1-\alpha)x & \text{si} \quad 1/4\le x\le 1/2,\\ 2\alpha-1+4(1-\alpha)(1-x) & \text{si} \quad 1/2\le x\le 3/4,\\ 4\alpha(1-x) & \text{si} \quad 3/4\le x\le 1.\end{cases} \tag{1.187}$$

Nótese que $u_0(x;1/2)$ es justamente la función prueba de la ecuación (1.186). Para la función $u_0(x;\alpha)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lambda_0 &\le R[u_0(x;\alpha)]\\ &\le \frac{2\displaystyle\int_0^{1/4}(4\alpha)^2\,dx+2\int_{1/4}^{1/2}[4(1-\alpha)]^2\,dx}{2\displaystyle\int_0^{1/4}(4\alpha x)^2\,dx+2\int_{1/4}^{1/2}[2\alpha-1+4(1-\alpha)x]^2\,dx}\\ &\le \frac{8(1-2\alpha+2\alpha^2)}{\frac{1}{6}(1+\alpha+2\alpha^2)}\,.\end{aligned}$$

¿Qué valor hemos de escoger para el parámetro indeterminado α? Evidentemente el que haga mínimo al cociente de Rayleigh:

$$\frac{dR[u_0(x;\alpha)]}{d\alpha}=\frac{144(-1+2\alpha^2)}{(1+\alpha+2\alpha^2)^2}=0\Rightarrow\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Para $\alpha=-1/\sqrt{2}$ se tiene $R[u_0]=\frac{96(2+\sqrt{2})}{4-\sqrt{2}}\simeq 126'76$, mientras que $R[u_0]=\frac{96(2-\sqrt{2})}{4+\sqrt{2}}\simeq 10'39$ para $\alpha=1/\sqrt{2}$. Este último es pues el valor buscado. Esta función prueba conduce a una estimación de λ_0 que es levemente mejor que la estimación $\lambda_0\le 12$ obtenida con la función prueba (1.186).

3.
$$u_0=x\,(1-x). \tag{1.188}$$

Para esta función
$$\lambda_0\le R[u_0(x)]=\frac{\displaystyle\int_0^1(1-2x)^2\,dx}{\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx}=\frac{1-2+\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}=10.$$

4.
$$u_0=\operatorname{sen}(\pi x). \tag{1.189}$$

Para esta función
$$\lambda_0\le R[u_0(x)]=\frac{\displaystyle\int_0^1\pi^2\cos^2(\pi x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1\operatorname{sen}^2(\pi x)\,dx}=\pi^2\simeq 9'87,$$

que es justamente el valor del primer autovalor ($\lambda_0=\pi^2$) debido a que $u_0=\psi_0$.

Vamos ahora a proponer funciones prueba que sean continuas, que satisfagan las condiciones de contorno y que razonablemente puedan parecerse a ψ_1 de modo que sus cocientes de Rayleigh sean próximos al autovalor $\lambda_1=4\pi^2\simeq 39'478$. Este último criterio nos dice, por ejemplo, que dado que ψ_1 tiene un cero en $(0,1)$, debemos proponer funciones prueba u_1 con un cero en este intervalo. Por razones de simetría, éste debe estar situado en $x=1/2$. Además debemos escoger u_1 de modo que sea ortogonal a u_0: $\langle u_1|u_0\rangle=0$. Vamos a probar las siguientes funciones:

1.
$$u_1(x)=\begin{cases}4x & \text{si} \quad 0\le x\le 1/4,\\ 2-4x & \text{si} \quad 1/4\le x\le 3/4,\\ 4x-4 & \text{si} \quad 3/4\le x\le 1.\end{cases} \tag{1.190}$$

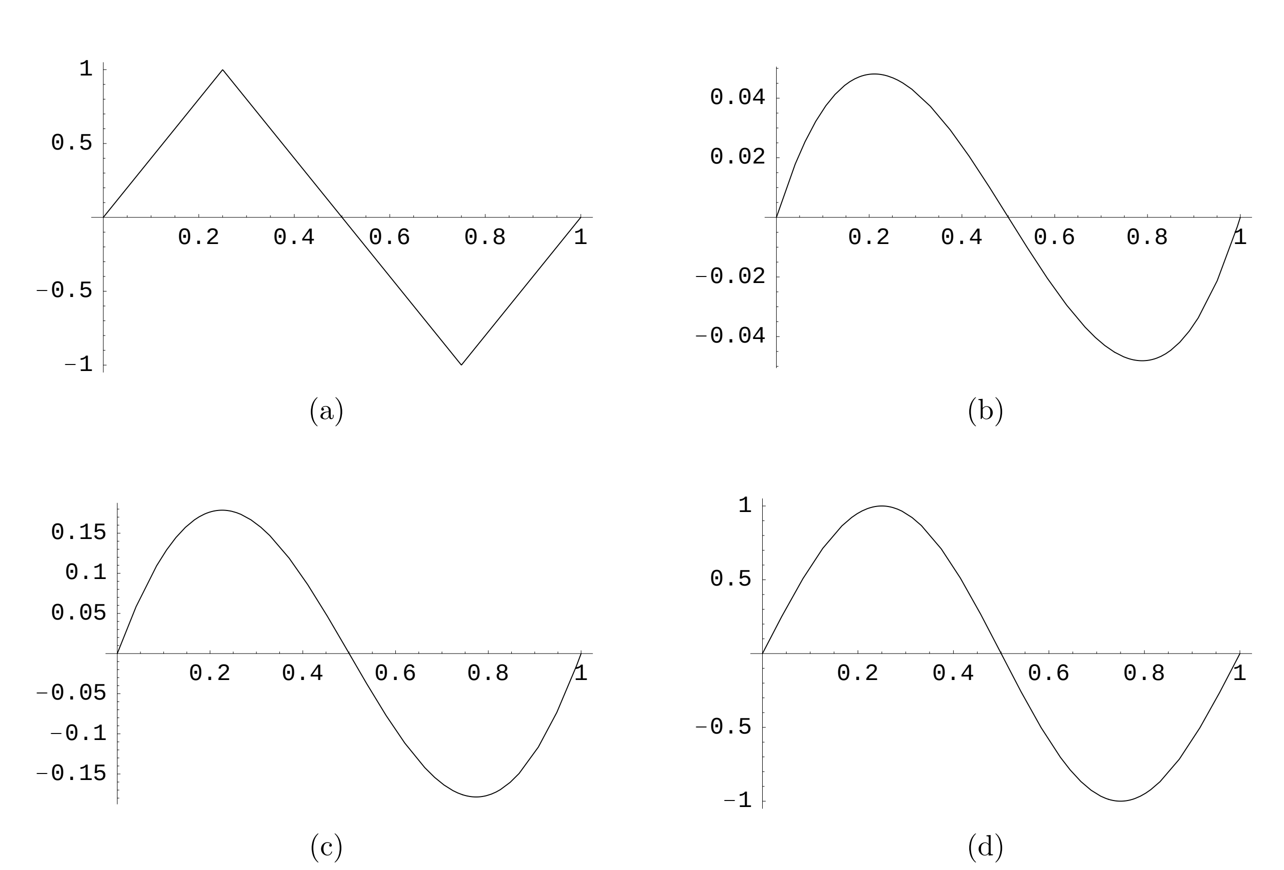


Figura 1.12: Funciones prueba $u_1(x)$: (a) ecuación (1.190); (b) ecuación (1.191) con $\alpha = 1/\sqrt{2}$; (c) ecuación (1.192); (d) ecuación (1.195) (autofunción exacta).

Esta función es ortogonal a cualquiera de las funciones u_0 que hemos usado antes por razones de simetría pues es impar con respecto un origen situado en $x = 1/2$, mientras que las funciones u_0 eran pares con respecto a este punto. Para esta función prueba tenemos que

$$\lambda_1 \leq R[u_1] = \frac{\displaystyle\int_0^1 4^2 dx}{\displaystyle 2\int_0^{1/4} (4x)^2\, dx + 2\int_{1/4}^{1/2} (2-4x)^2\, dx} = 48.$$

2.

$$u_1 = x\,(1-x)\,\left(\frac{1}{2} - x\right). \tag{1.191}$$

Esta función es ortogonal a cualquiera de las funciones u_0 que hemos usado antes dado que es impar con respecto al punto $x = 1/2$. Para esta función

$$\lambda_1 \leq R[u_1] = \frac{\displaystyle\int_0^1 [-1/2 + 3x(1-x)]^2\, dx}{\displaystyle\int_0^1 x^2(1-x)^2(1/2-x)^2\, dx} = \frac{1/20}{1/840} = 42.$$

Esta función prueba conduce a una estimación de λ_1 que es apreciablemente mejor que la estimación $\lambda_1 \leq 48$ obtenida con la función prueba (1.190).

3.

$$u_1 = \left(\frac{1}{2} - x\right) \operatorname{sen}(\pi x). \tag{1.192}$$

Para esta función

$$\lambda_1 \leq R[u_1] = \frac{\displaystyle\int_0^1 \left[\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos(\pi x) - \operatorname{sen}(\pi x)\right]^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}-x\right)^2 \operatorname{sen}^2(\pi x)\, dx} \tag{1.193}$$

$$= \frac{1/4+\pi^2/24}{1/24-1/4\pi^2} = \frac{\pi^2+6}{\pi^2-6}\pi^2 = 4'1011\pi^2 \simeq 40'48. \tag{1.194}$$

4.

$$u_1 = \operatorname{sen}(2\pi x). \tag{1.195}$$

Para esta función

$$\lambda_1 \leq R[u_1] = \frac{\displaystyle\int_0^1 4\pi^2\cos^2(\pi x)\, dx}{\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2(2\pi x)\, dx} = 4\pi^2 \simeq 39'478,$$

que es justamente el valor exacto porque u_1 es igual a la autofunción ψ_1.

◀

El cálculo aproximado de los autovalores de un problema de Sturm-Liouville es especialmente importante en Física Cuántica. Por ejemplo, la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo tiene la forma

$$H\psi = E\psi$$

donde H es el operador hamiltoniano. En una dimensión, el hamiltoniano para una partícula de masa m sometida a un potencial $V(x)$ viene dado por

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

donde $\hbar$ es la constante de Planck divida por 2π. La ecuación de Schrödinger toma para este caso la forma

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(x)\right]\psi + \frac{2m}{\hbar^2}E\,\psi = 0$$

que es claramente una ecuación de Sturm-Liouville con $p(x) = r(x) = 1$, $q(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}V(x)$ y $\lambda = \frac{2m}{\hbar^2}E$. El cálculo aproximado de λ es pues equivalente al cálculo aproximado de las energías permitidas para la partícula que se encuentra sometida al potencial $V(x)$.[36]

[36]En las secciones 10.9–10.12 de A. Galindo y P. Pascual, *Mécanica cuántica*, Eudema, Madrid, 1989, puede encontrarse una introducción a los métodos variacionales con aplicaciones a problemas de Mecánica Cuántica.

1.11. Problemas

1.1. Sea $\{f_n(x)\}$, con $n = 0, 1, 2, \cdots$ una familia de funciones mutuamente ortogonales en el recorrido de 0 a ∞, con función peso e^{-x}. Halla la ecuación diferencial de la forma

$$x f_n''(x) + g(x) f_n'(x) + \lambda f_n(x) = 0$$

que satisface la función $f_n(x)$.

1.2. Sea la ecuación de Sturm-Liouville $p(x)y'' + p'(x)y' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$ en el intervalo $[a, b]$ sujeta a las condiciones de contorno $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ con $p(a) = p(b)$. Demuestra que si las funciones $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ son definidas positivas, los autovalores λ del operador de Sturm-Liouville son positivos.

1.3. Sea la ecuación diferencial (que podría no ser una ecuación de Sturm-Liouville)

$$c_2(x)y''(x) + c_1(x)y'(x) + c_0(x)y(x) = \delta(x - x'), \quad a \le x \le b\,,$$

donde $a < x' < b$ y $c_i(x)$ es una función bien comportada. Demuestra que la solución $y(x)$ es una función continua y que $y'(x)$ es continua excepto en $x = x'$. En este último caso halla el valor de la discontinuidad.

1.4. Halla todas las soluciones posibles del problema de Sturm-Liouville singular (lato)

$$\begin{aligned}
&x^2 y'' + x y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \ge 1,\\
&y(1) = 0,\\
&y(x) \text{ acotada para } x \to \infty\,.
\end{aligned}$$

1.5. Encuentra la función de Green del problema de Sturm-Liouville singular (lato)

$$\begin{aligned}
&x y'' + y' - \frac{4}{x}\, y = f(x), \quad x \ge 1,\\
&y(1) = 0,\\
&\lim_{x\to\infty} y(x) = \text{finito}.
\end{aligned}$$

Halla $y(x)$ si $f(x) = 1/x$.

1.6. Los modos normales de vibración de una cuerda tensa de longitud $2L$, densidad ρ, y que tiene una partícula puntual de masa m situada en su punto medio, son las soluciones del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$y'' = -k^2 \left[1 + \frac{m}{\rho}\,\delta(x)\right] y, \quad -L \le x \le L, \quad y(-L) = y(L) = 0\,.$$

donde k^2 es proporcional a las frecuencias ω de estos modos normales ($k^2 = \omega^2\rho/T$ siendo T la tensión de la cuerda). Se pide hallar los autovalores y autofunciones de este problema. Calcula explícitamente los diez primeros autovalores y sus correspondiente autofunciones cuando $L = 1$ y (i) $m/\rho = 0'1$, (ii) , y $m/\rho = 1$. Representa gráficamente las autofunciones obtenidas.

1.7. *a)* Halla la ecuación transcendente que determina los autovalores λ_n y obtén las autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville definido por la ecuación diferencial $y''(x) = -\lambda y(x)$ en el intervalo $0 \le x \le a$ con las condiciones de contorno $y(0) + a y'(0) = 0$, $y(a) - a y'(a) = 0$.

b) ¿Existe, en general, solución del problema inhomogéneo

$$y'' + (\pi/a)^2 y = f(x), \;\; y(0) + ay'(0) = y(a) - ay'(a) = 0\,?$$

En caso afirmativo, halla la función de Green correspondiente.

1.8. Halla los autovalores y autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) - 2y'(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Expresa la función $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ como combinación lineal de las autofunciones.

1.9. Demuestra que

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}\,y = 0, \quad 1 \le x \le \mathrm{e}^{2\pi}, \quad y'(1) = 0, \quad y'(\mathrm{e}^{2\pi}) = 0,$$

es un problema de Sturm-Liouville y halla sus autovalores y autofunciones.

1.10. *a*) Demuestra que $y''(x) + y'(x) + (1 + \lambda)y(x) = 0$ es una ecuación de Sturm-Liouville

b) Encuentra los autovalores λ_n y autofunciones $\psi_n(x)$ del problema de Sturm-Liouville

$$y''(x) + y'(x) + (1 + \lambda)y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

c) Encuentra la solución del problema de Sturm-Liouville inhomogéneo

$$y''(x) + y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

en la forma de desarrollo en serie de las autofunciones $\psi_n(x)$.

1.11. Sea el problema de Sturm-Liouville

$$(xy')' + \lambda xy = 0\,, \qquad 0 \le x \le 1\,,$$

con $y(0) =$ finito e $y(1) = 0$.

a) Halla los autovalores y las autofunciones correspondientes.

b) Usa los resultados del apartado anterior para obtener la solución, si existe, del problema no homogéneo

$$(xy')' + xy = 2x\,, \qquad 0 \le x \le 1\,,$$

con $y(0) =$ finito e $y(1) = 0$. ¿Por qué puedes asegurar que este problema no homogéneo tiene solución?

1.12. Encuentra la función de Green del problema

$$x^2y'' + xy' - 9y = f(x), \quad x \ge 0, \quad y(0) = \text{finito}, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

Halla la solución si $f(x) = x^2$.

1.13. Encuentra la función de Green del problema

$$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{e}^{-kx}\,y'(x)\right] = f(x), \quad 0 < k < 1, \quad 0 \le x, \quad y(0) = 0, \quad y(\infty) = \text{finito}.$$

Halla $y(x)$ si $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

1.14. Encuentra la función de Green asociada al problema $y'' - k^2 y = f(x)$, $k^2 > 0$, con las condiciones de contorno $y(\pm\infty) < \infty$.

1.15. Obtén en forma cerrada la función de Green para el problema inhomogéneo $y'' - k^2 y = f(x)$, $0 \le x < \infty$, con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\infty) < \infty$, si (a) $k \neq 0$, (b) $k = 0$. En ambos casos halla $y(x)$ si $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

1.16. Halla la función de Green en forma cerrada del problema de Sturm-Liouville no homogéneo

$$xy'' + y' = x, \quad 0 \le x \le 1, \quad y(1) = y'(1), \quad y(0) = \text{finito}.$$

Halla la solución $y(x)$ del problema a partir de esta función de Green.

1.17. Halla la solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' + k^2 \left[1 + \frac{m}{\rho}\, \delta(x) \right] y = F_0, \quad -L \le x \le L, \quad y(-L) = y(L) = 0,$$

donde $m > 0$, $\rho > 0$ y F_0 son constantes, expresándola como combinación lineal de funciones de un conjunto completo. (Resuélvase primero el problema 1.6.)

1.18. Sea el problema no homogéneo $y'' = f(x)$, $0 \le x \le L$, $y(0) = y'(L) = 0$.

a) Encuentra las autofunciones normalizadas del operador d^2/dx^2 para las condiciones de contorno dadas.

b) Escribe la función de Green $G(x, x')$ mediante desarrollo en serie.

c) Obtén $G(x, x')$ en forma cerrada.

d) Encontrar la solución del problema para el caso particular $f(x) = x^2$ con $L = 1$.

1.19. Sea el problema inhomogéneo

$$y'' = \operatorname{sen}(3x) , \qquad 0 \le x \le \pi ,$$

con las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

a) Halla la función Green del problema en forma cerrada.

b) Halla la función de Green como desarrollo de la autofunciones asociadas al problema.

c) Usa la función de Green para hallar la solución del problema inhomogéneo.

d) Supón que la ecuación hubiera sido $y'' + 4y = \operatorname{sen}(3x)$. ¿Tendría solución este problema inhomogéneo? Halla, si fuera posible, esta solución a partir de la función de Green expresada en forma de autofunciones.

e) Contesta a las mismas preguntas que en el apartado anterior pero para la ecuación $y'' + 9y = \operatorname{sen}(3x)$.

1.20. Sea el problema no homogéneo $y'' + y = \operatorname{sen} x$ con las condiciones de contorno $y(0) = y'(2\pi) = 0$. (a) Halla la función de Green mediante un desarrollo en serie de las autofunciones normalizadas correspondientes. (b) Obtén la función de Green en forma cerrada. (c) A partir de ella, resuelve el problema no homogéneo. (d) Halla la solución para las condiciones de contorno *no* homogéneas $y(0) = 2$, $y'(2\pi) = 0$.

1.21. Sea el problema no homogéneo

$$y'' - k^2 y = f(x), \quad 0 \le x \le L, \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Halla la función de Green (a) como un desarrollo en serie y (b) en forma cerrada. Comprueba la equivalencia de ambas expresiones.

1.22. *a*) Resuelve el problema de autovalores $y'' = -\lambda y$ con las condiciones de contorno $y(0) = y(\pi) + y'(\pi) = 0$.

b) Encuentra la función de Green de $y'' = f(x)$ que satisface las condiciones de contorno anteriores mediante desarrollo en serie y también en forma cerrada.

1.23. (a) Halla en forma cerrada la función de Green correspondiente a la ecuación

$$y'' + \omega^2 y = f(x), \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad \omega^2 > 0,$$

con las condiciones de contorno $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$. ¿Para qué valores de $\omega^2 > 0$ no existe solución del problema? (b) Demuestra que estos valores de ω^2 son justamente los autovalores del problema homogéneo y halla las correspondientes autofunciones. ¿Cuál es su grado de degeneración?

1.24. Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

donde $m^2 > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma de desarrollo en serie de autofunciones.

1.25. Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

donde $m^2 > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma de desarrollo en serie de autofunciones.

1.26. Sea la ecuación de Sturm-Liouville no homogénea

$$y'' - m^2 y = f(x), \quad 0 \le x, \quad y(1) = 0, \quad y(\infty) < \infty$$

donde $m^2 > 0$. Se pide hallar la función de Green correspondiente en forma cerrada.

1.27. El método de la función de Green puede aplicarse a ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales.[37] Considérese un oscilador armónico amortiguado gobernado por la ecuación

$$x'' + 2\lambda x' + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m},$$

donde $\lambda^2 < \omega_0^2$ y supóngase que la fuerza externa es cero para $t < 0$. (a) Desarrolla la función de Green y escribe la solución $x(t)$ que satisface las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$. (b) ¿Cuál es la solución en el caso sobreamortiguado ($\lambda^2 > \omega_0^2$)?

[37]Véase, por ejemplo, la sección 4.6 de [Mar75].

1.28. Sea el problema de Sturm-Liouville (ecuación de Schrödinger del oscilador armónico):

$$y'' - x^2 y + \lambda y = 0, \quad y(-\infty) = 0, \quad y(\infty) = 0 \; .$$

a) Justifica que $u_0(x;\alpha) = (1+\alpha x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ es una función prueba razonable para calcular el autovalor más pequeño mediante el cociente de Rayleigh. Halla el valor de α que conduce a un cociente de Rayleigh mínimo. Compara el resultado así obtenido con el autovalor exacto $\lambda_0 = 1$ (energía del punto cero del oscilador lineal cuántico).

b) Justifica que la solución tiende a cero como $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ para $|x| \gg 1$. (Puedes ahorrarte este trabajo si consultas la sección 2.6.1).

c) Repite el apartado (a) con la función prueba $u_0(x;\alpha) = (1+\alpha x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

d) Justifica que $u_1(x;\alpha) = x(1+\alpha x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ es una función prueba que permite estimar λ_1. Halla el valor mínimo del cociente de Rayleigh correspondiente y compáralo con el autovalor exacto $\lambda_1 = 3$.

Ayuda: para $a > 0$

$$\int_0^\infty x^{2n}\;\mathrm{e}^{-ax^2}\;dx = \frac{(2n-1)!}{2^{n+1}}\sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1.29. Sea el problema de Sturm-Liouville $y'' - V(x)y + \lambda y = 0, \;\; y(-\infty) = 0, \;\; y(\infty) = 0$.

a) Para $V(x) = x^4$ (ecuación de Schrödinger de un oscilador cuártico) calcula los dos primeros autovalores mediante el cociente de Rayleigh usando las funciones prueba $u_0(x;\alpha) = (1+\alpha x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, $u_1(x;\alpha) = x(1+\alpha x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$. Compara con los resultados exactos $\lambda_0 = 1'0604$, $\lambda_1 = 2'7997$.

b) Repite el apartado anterior para el potencial $V(x) = |x|$. Los resultados exactos son $\lambda_0 = 1'0188$, $\lambda_1 = 2'3381$.

1.30. Sea el problema de Sturm-Liouville 1.6 anterior.

a) Usa el método del cociente de Rayleigh para hacer una estimación del primer autovalor y de la primera autofunción mediante aproximación "lineal" de la autofunción ψ_0:

$$u_0(x) = \begin{cases} x + L, & -L \le x \le 0, \\ -x + L, & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

b) Usa el método del cociente de Rayleigh para hacer una estimación del primer autovalor y de la primera autofunción mediante una aproximación "cuadrática" de ψ_0:

$$u_0(x) = \begin{cases} x + L + \alpha(x+L)^2, & -L \le x \le 0, \\ -x + L + \alpha(x-L)^2, & 0 \le x \le L. \end{cases}$$

En este último caso hay que hallar el valor óptimo de α.

c) Propón una función prueba que, mediante el cociente de Rayleigh, te permita estimar el segundo autovalor y la segunda autofunción.

d) Compara los resultados aproximados obtenidos en los apartados (a), (b) y (c) con los resultados exactos (que se deben haber obtenido en el problema 1.6) cuando $L = 1$ y (i) $m/\rho = 0'1$, (ii) $m/\rho = 1$.

1.31. Las energías permitidas y las funciones de ondas correspondientes de un sistema cuántico formado por una partícula sometida a un potencial pozo cuadrado de ancho $2L$ y una barrera/pozo de tipo delta de Dirac situada en el medio pueden hallarse resolviendo el siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$y'' - a\delta(x)y + \lambda y = 0, \quad a = \text{const}, \quad -L \leq x \leq L, \quad y(-L) = y(L) = 0\,.$$

a) Escribe la ecuación de Schrödinger de este sistema y muestra que λ es proporcional a la energía.

b) Compara los autovalores y autofunciones que se obtienen cuando $a > 0$, $a = 0$, $0 > a > -2/L$, $a = -2/L$ y $a < -2/L$.

c) Calcula explícitamente los diez primeros autovalores y sus correspondiente autofunciones si $L = 1$ y (i) $a = 0'1$, (ii) $a = 0$, (iii) $a = -0'1$, (iv) $a = -2$, (v) $a = -4$.

d) Representa gráficamente las autofunciones obtenidas.

e) Usa el método del cociente de Rayleigh para hallar estimaciones de los dos primeros autovalores y y las dos primeras autofunciones de este problema. Compara con los resultados exactos para $L = 1$ y (i) $a = 1$, (ii) $a = 0$, (iii) $a = -0'1$, (iv) $a = -2$, (v) $a = -4$.

Capítulo 2

Funciones especiales

Special functions are sometimes called higher transcendental functions (higher than what?) or functions of mathematical physics (but they occur in other fields also) or functions that satisfy certain frequently occurring second-order differential equations (but not all special functions do). One might simply call them "useful functions" and let it go at that ...
W. H. Press *et al.* [PFT93]

To paraphrase an aphorism attributed to the biochemist Albert Szent-Györgyi, perhaps special functions provide an economical and shared culture analogous to books: places to keep our knowledge in, so that we can use our heads for better things.
M. Berry, *Physics Today*, vol. 54, n. 5, p. 11 (2001)

2.1. Introducción

Las funciones (quizás mal llamadas) *especiales* de la Física Matemática no tienen nada de "especial". En principio son tan "especiales" como las funciones trigonométricas o los logaritmos, aunque por supuesto son menos habituales. Un nombre más adecuado sería, sin duda, el de funciones *útiles*. En todo caso, es lícito preguntarse por el motivo de estudiar estas funciones y sus propiedades.[1]

Es cierto que para la comprensión y buen uso de las matemáticas no se requiere una memoria prodigiosa, pero, sin embargo, sí es cierto que apenas podemos avanzar en matemáticas si no conocemos algunos resultados básicos. Entre estos resultados están el conocimiento de las propiedades de ciertas funciones "elementales" como las potencias, las exponenciales, las funciones trigonométricas... Sin embargo, en muchas otras ocasiones, para ciertos problemas que aparecen en Ciencia y en Ingeniería, hay *otras* funciones, habitualmente llamadas funciones "especiales", que pueden resultar tanto o más útiles que las llamadas funciones "elementales". En estos casos, conocer las propiedades de estas funciones es clave para entender la propiedades del problema que queremos analizar. Para ilustrar esta idea, supongamos que el comportamiento de cierto sistema

[1] En este punto, es muy adecuado (y divertido) leer las opiniones al respecto de Michael Berry en el artículo *Why are special functions special?*, Physics Today, vol. 54, n. 5, p. 11, Abril 2001.

(por ejemplo, el desplazamiento de cierto engranaje) viene regido por la siguiente expresión :

$$\begin{aligned} y(x) =& 1 - a\,x^2 + \frac{a^2\,x^4}{2} - \frac{a^3\,x^6}{6} + \frac{a^4\,x^8}{24} - \frac{a^5\,x^{10}}{120} + \frac{a^6\,x^{12}}{720} - \frac{a^7\,x^{14}}{5040} + \frac{a^8\,x^{16}}{40320} \\ & - \frac{a^9\,x^{18}}{362880} + \frac{a^{10}\,x^{20}}{3628800} - \frac{a^{11}\,x^{22}}{39916800} + \frac{a^{12}\,x^{24}}{479001600} - \frac{a^{13}\,x^{26}}{6227020800} + \cdots \end{aligned} \tag{2.1}$$

Seguramente, esta expresión nos informa de bien poco acerca del comportamiento de nuestro sistema. Hay muchas preguntas que son difíciles de responder a la vista de la anterior expresión: ¿es oscilante la solución? ¿es creciente o decreciente? ¿de qué forma influye en la solución el valor del parámetro a? Sin embargo, si supiéramos que esa expresión no es más que el desarrollo en serie de potencias de $y(x) = \exp(-ax^2)$, nuestro conocimiento del sistema se torna, en un instante, casi total. Sabemos que la solución no es oscilante, sabemos que la solución es muy rápidamente decreciente si $a > 0$ y muy rápidamente creciente si $a < 0$. Es evidente que la solución expresada en términos de la función exponencial, $y(x) = \exp(-ax^2)$, es mucho más útil, es mucho más informativa, que la dada por la ecuación (2.1) debido a que conocemos muchas propiedades de la función exponencial. De igual modo, si el comportamiento de un sistema viene descrito por la función

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

probablemente muchos científicos tendrían dificultades para saber qué pasa con ese sistema. Pero si a esos científicos les decimos que el comportamiento del sistema viene dado por la función de Bessel de orden cero, $y(x) = J_0(x)$, entonces, todo se vuelve claro. Que ingresemos en este afortunado club de personas que pueden entender las expresiones matemáticas en las que aparecen funciones especiales como las funciones de Bessel, los polinomios de Legendre o los de Hermite, es uno de los objetivos principales de este capítulo.

Un gran número de estas funciones especiales son autofunciones de ciertos problemas de Sturm-Liouville. Este será el modo habitual en el que presentaremos estas funciones: como soluciones de un problema de Sturm-Liouville.

Antes de comenzar con el estudio de las distintas funciones especiales, vamos a discutir propiedades *generales* de cierta clase importante de funciones especiales: los polinomios ortogonales.

2.2. Propiedades generales de los polinomios ortogonales

Sea $\{P_n(x)\}$ una familia de polinomios ortogonales *reales* (donde $n = 0, 1, 2, \ldots$ indica el grado del polinomio) los cuales son solución de un problema de Sturm-Liouville definido sobre el intervalo $[a, b]$ y función peso $r(x)$. Como sabemos por la sección 1.6, una función $Q(x)$ de cuadrado sumable en el intervalo $[a, b]$ con respecto a la función peso $r(x)$, puede expresarse como serie de las autofunciones $P_n(x)$:

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

con[2]

$$c_n = \frac{\langle P_n | Q \rangle}{\|P_n\|^2} = \frac{1}{\|P_n\|^2} \int_a^b dx\, r(x)\, P_n(x) Q(x)$$

y

$$\|P_n\|^2 = \langle P_n | P_n \rangle = \int_a^b dx\, r(x)\, P_n^2(x).$$

[2]Recuérdese que estamos asumiendo que los polinomios $P_n(x)$ son reales.

En particular, si $Q(x)$ es un polinomio de grado n, se tiene que (nótese el límite superior del sumatorio)

$$Q(x) = \sum_{m=1}^{n} c_m P_m(x) \quad \text{con} \quad c_m = \frac{\langle P_m | Q \rangle}{\|P_m\|^2}. \tag{2.2}$$

▷ ***Ejercicio** 2.1*

La afirmación anterior parece natural y razonable: para construir una función polinómica cualquiera $Q(x)$ de grado n sólo necesitamos combinar un conjunto de $n+1$ polinomios $P_m(x)$ de grado $m = 0, 1, \cdots, n$; parece absurdo utilizar polinomios $P_m(x)$ de grado m mayor que el grado de $Q(x)$. Puede verse una demostración rigurosa en la sección III-10 de P. D. Dennery y A. Krzywicki, Mathematics for Physicists, *(Dover, Nueva York, 1996). Este ejercicio tiene por objetivo mostrar un procedimiento para deducir este resultado, es decir, para deducir la relación (2.2).*

1. *Sea $Q(x) = \sum_{m=0}^{n} q_m x^m$ y $P_m(x) = \sum_{l=0}^{m} a_l^{(m)} x^l$. Calcula los coeficientes b_m en función de $a_l^{(m)}$ y q_m de modo que*

$$Q(x) = \sum_{m=0}^{n} b_m P_m(x).$$

   Sugerencias: calcula de modo recursivo los coeficientes b_m empezando por el de índice mayor y terminando con el de índice menor (por ejemplo, deduce que $q_n = b_n a_n^{(n)}$, es decir, que $b_n = a_n^{(n)}/q_n$) y halla a continuación que $q_{n-1} = b_{n-1} a_{n-1}^{(n-1)} + b_n a_{n-1}^{(n)}$, es decir, que

$$b_{n-1} = \frac{q_{n-1} - b_n a_{n-1}^{(n)}}{a_{n-1}^{(n-1)}}.$$

   Convéncete de que el procedimiento puede implementarse para el cálculo sucesivo de $q_{n-2}, q_{n-3}, \cdots, q_1, q$

2. *Usa la propiedad de ortogonalidad de los polinomios $P_n(x)$ para demostrar que*

$$b_m = c_m \equiv \frac{\langle P_m | Q \rangle}{\|P_m\|^2}.$$

2.2.1. Relación de recurrencia

Teorema 2.1 *Los polinomios ortogonales verifican la siguiente relación de recurrencia*[3]

$$\boxed{x\,P_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x)} \tag{2.3}$$

donde los coeficientes A_n y C_n no son nulos y $n \geq 1$.

Este resultado simplemente nos dice que en el desarrollo del polinomio $x\,P_n(x)$ en serie de polinomios ortogonales $P_m(x)$ sólo aparecen los polinomios de grado $m = n+1, n, n-1$.

La demostración no es difícil. Sabemos que $\{P_n(x)\}$ son, por definición, autofunciones de un problema de Sturm-Liouville por lo que cualquier función (bien comportada) puede expresarse como una combinación lineal de los polinomios $P_n(x)$. En particular, la función $xP_n(x)$ es una función polinómica y, por tanto, suave por lo que es válido escribir

$$x\,P_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m P_m(x) \quad \text{con} \quad c_m = \frac{\langle P_m | x P_n \rangle}{\|P_m\|^2}.$$

[3] Se llama relación de recurrencia porque permite obtener *recurrentemente* todos los polinomios a partir de unos cuantos conocidos inicialmente.

Pero, además la función $xP_n(x)$ es un polinomio de grado $n+1$ por lo que [véase la ecuación (2.2)] el desarrollo se trunca a partir del término $n+1$, es decir,

$$x\,P_n(x) = \sum_{m=0}^{n+1} c_m P_m(x).$$

Esto significa que

$$c_m = \frac{\langle P_m|xP_n\rangle}{\|P_m\|^2} = 0 \quad \text{para} \quad m > n+1. \tag{2.4}$$

Es decir, concluimos que

$$\langle P_i|xP_j\rangle = 0 \quad \text{si} \quad i > j+1. \tag{2.5}$$

Pero, como es fácil de ver a partir de la definición del producto escalar,

$$\langle P_i|xP_j\rangle = \int_a^b dx\, r(x)\, P_i(x)\, x\, P_j(x) = \langle P_j|xP_i\rangle$$

(esto equivale a decir que x es un operador hermítico) por lo que (2.5) equivale a

$$\langle P_j|xP_i\rangle = 0 \quad \text{si} \quad i > j+1, \tag{2.6}$$

es decir,

$$\langle P_j|xP_i\rangle = 0 \quad \text{si} \quad j < i-1\,.$$

En resumen, hemos así probado que

$$\langle P_j|xP_i\rangle = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} j < i-1 \\ j > i+1 \end{cases}$$

Esta relación implica que

$$c_m = \frac{\langle P_m|xP_n\rangle}{\|P_m\|^2} = 0 \quad \text{si} \quad \begin{cases} m < n-1 \\ m > n+1 \end{cases} \quad . \tag{2.7}$$

Por tanto, sólo son en principio distintos de cero los coeficientes c_m con m tal que $m \leq n+1$ y $m \geq n-1$. En definitiva, sólo son en principio distintos de cero los coeficientes c_{n+1}, c_n y c_{n-1}, es decir,

$$x\,P_n(x) = c_{n+1}P_{n+1}(x) + c_nP_n(x) + c_{n-1}P_{n-1}(x),$$

tal como queríamos demostrar.

Hallaremos ahora A_n, B_n, C_n lo que nos servirá de paso para demostrar que $A_n, C_n \neq 0$. Empezamos escribiendo los polinomios en forma explícita como suma de monomios:

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m^{(n)} x^m. \tag{2.8}$$

Mediante esta expresión, la relación de recurrencia (2.3) se convierte en

$$\sum_{m=0}^{n} a_m^{(n)} x^{m+1} = A_n \sum_{m=0}^{n+1} a_m^{(n+1)} x^m + B_n \sum_{m=0}^{n} a_m^{(n)} x^m + C_n \sum_{m=0}^{n-1} a_m^{(n-1)} x^m$$

de la cual:

- Igualando los coeficientes de los términos (monomios) de mayor grado, x^{n+1}, se deduce que

$$a_n^{(n)} = A_n a_{n+1}^{(n+1)} \Rightarrow A_n = \frac{a_n^{(n)}}{a_{n+1}^{(n+1)}} \neq 0. \tag{2.9}$$

  Esta última expresión no puede ser nula porque $a_n^{(n)} \neq 0$ y $a_{n+1}^{(n+1)} \neq 0$ si P_n y P_{n+1} son polinomios de grado n y $n+1$, respectivamente.

- Igualando los coeficientes de los términos de x^n tenemos

$$a_{n-1}^{(n)} = A_n a_n^{(n+1)} + B_n a_n^{(n)} \Rightarrow B_n = \frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}} - A_n \frac{a_n^{(n+1)}}{a_n^{(n)}}$$

  y por tanto

$$B_n = \frac{a_{n-1}^{(n)}}{a_n^{(n)}} - \frac{a_n^{(n+1)}}{a_{n+1}^{(n+1)}}, \tag{2.10}$$

  expresión que podría ser igual a cero, pero no necesariamente.

El coeficiente C_n lo calculamos de un modo diferente: si multiplicamos escalarmente la expresión (2.3) por $P_{n-1}(x)$ obtenemos que

$$C_n = \frac{\langle P_{n-1}|xP_n\rangle}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{\langle P_n|xP_{n-1}\rangle}{\|P_{n-1}\|^2}. \tag{2.11}$$

Pero, por (2.3), sabemos que $x\,P_{n-1}(x) = A_{n-1}P_n(x) + B_{n-1}P_{n-1}(x) + C_{n-1}P_{n-2}(x)$, luego la ecuación (2.11) se reduce a

$$C_n = \frac{A_{n-1}\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \neq 0. \tag{2.12}$$

Esta última expresión no puede ser nula porque $A_{n-1} \neq 0$ (como acabamos de demostrar) y las normas de los polinomios son distintas de cero.

Aunque no lo haremos aquí, puede demostrarse (véase, por ejemplo, la sección 8.3 de [AB74]) que:

Teorema 2.2 *Los n ceros de los polinomios ortogonales $P_n(x)$ son reales, simples, y contenidos en el intervalo abierto (a, b).*

► *Ejemplo 2.1*

Vamos a utilizar las fórmulas anteriores para deducir la llamada fórmula de Christoffel-Darboux de los polinomios ortogonales. Supongamos que una cierta una cierta clase de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$ satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$x\,P_n(x) = A_n P_{n+1}(x) + B_n P_n(x) + C_n P_{n-1}(x)\,,$$

relación que por conveniencia volvemos a escribir así:

$$y\,P_n(y) = A_n P_{n+1}(y) + B_n P_n(y) + C_n P_{n-1}(y).$$

Multiplicamos la primera relación por $P_n(y)$, la segunda por $P_n(x)$ y restamos miembro a miembro:

$$(x-y)\,P_n(x)\,P_n(y) = A_n[P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)\,P_{n+1}(y)] - C_n[P_n(x)\,P_{n-1}(y) - P_{n-1}(x)\,P_n(y)].$$

Expresando C_n mediante la relación (2.12) y dividiendo por la norma de $P_n(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned}(x-y)\frac{P_n(x)\,P_n(y)}{\|P_n\|^2} &= \frac{A_n}{\|P_n\|^2}[P_{n+1}(x)P_n(y)-P_n(x)\,P_{n+1}(y)] \\ &\quad - \frac{A_{n-1}}{\|P_{n-1}\|^2}[P_n(x)\,P_{n-1}(y)-P_{n-1}(x)\,P_n(y)].\end{aligned}$$

Ahora sumamos sobre n desde 1 hasta m:

$$\begin{aligned}(x-y)\sum_{n=1}^{m}\frac{P_n(x)\,P_n(y)}{\|P_n\|^2} &= \frac{A_m}{\|P_m\|^2}[P_{m+1}(x)P_m(y)-P_m(x)\,P_{m+1}(y)] \\ &\quad - \frac{A_0}{\|P_0\|^2}[P_1(x)\,P_0(y)-P_0(x)\,P_1(y)].\end{aligned} \tag{2.13}$$

Vamos a evaluar el término que hay dentro del segundo corchete teniendo en cuenta las relaciones (2.8) y (2.9):

$$\begin{aligned}A_0P_1(x)P_0(y) &= \frac{a_0^{(0)}}{a_1^{(1)}}(a_1^{(1)}x+a_0^{(1)})\,a_0^{(0)} \\ &= (a_0^{(0)})^2x+\frac{(a_0^{(0)})^2a_0^{(1)}}{a_1^{(1)}} \\ &= x\,P_0(x)P_0(y)+\frac{(a_0^{(0)})^2a_0^{(1)}}{a_1^{(1)}}\,.\end{aligned}$$

De modo análogo se calcula $A_0P_0(x)P_1(y)$ sin más que intercambiar el papel de x e y:

$$A_0P_1(y)P_0(x) = y\,P_0(y)P_0(x)+\frac{(a_0^{(0)})^2a_0^{(1)}}{a_1^{(1)}}.$$

Por consiguiente

$$A_0[P_1(x)\,P_0(y)-P_0(x)\,P_1(y)] = (x-y)\,P_0(x)\,P_0(y).$$

Pasando este término al miembro izquierdo de (2.13) se obtiene

$$(x-y)\sum_{n=0}^{m}\frac{P_n(x)\,P_n(y)}{\|P_n\|^2} = \frac{A_m}{\|P_m\|^2}\,[P_{m+1}(x)P_m(y)-P_m(x)\,P_{m+1}(y)], \tag{2.14}$$

o equivalentemente, usando la ecuación (2.9), obtenemos la relación

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{P_n(x)\,P_n(y)}{\|P_n\|^2} = \frac{a_m^{(m)}}{a_{m+1}^{(m+1)}}\,\frac{P_{m+1}(x)P_m(y)-P_m(x)\,P_{m+1}(y)}{\|P_m\|^2\,(x-y)}, \tag{2.15}$$

conocida como la *fórmula de Christoffel-Darboux.*

◀

2.2.2. Función generatriz

Dada una familia de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$, se llama función generatriz de esta familia a una función $G(x,t)$ tal que cuando se desarrolla en potencias de t los coeficientes del desarrollo son los polinomios $P_n(x)$:[4]

$$\boxed{G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n}, \qquad x\in[a,b]. \tag{2.16}$$

[4]En ocasiones es más conveniente definir la función generatriz de un modo ligeramente diferente. Veremos un ejemplo de esto con los polinomios de Hermite en la sección 2.6.4. La idea de la función generatriz de un conjunto de funciones no se limita a funciones polinómicas. Por ejemplo, en la sección 2.8.5 se estudiará la función generatriz de las funciones de Bessel de primera especie.

También puede interpretarse como una función de x cuyos coeficientes son t^n cuando se desarrolla en serie de polinomios $P_n(x)$.

Una propiedad útil de la función generatriz que permite deducir resultados acerca de los polinomios ortogonales (en particular, el cálculo de sus normas; véanse las secciones 2.6.5 y 2.7.1) viene dada por el siguiente teorema.

Teorema 2.3 *La condición necesaria y suficiente para que $\{P_n(x)\}$ sea una familia de polinomios ortogonales en el intervalo $[a,b]$, relativo al peso $r(x)$, es que la integral*

$$I(t,t') = \int_a^b dx\, r(x)\, G(x,t)\, G(x,t') \equiv \langle G(x,t)|G(x,t')\rangle \tag{2.17}$$

sólo dependa de las variables t y t' a través del producto tt'.

Para demostrar este teorema desarrollaremos un poco la integral anterior. Dado que

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \qquad G(x,t') = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t'^m,$$

la ecuación (2.17) se transforma en

$$I(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} t^n t'^m \,\langle P_n|P_m\rangle. \tag{2.18}$$

Pero:

1. **Condición necesaria:** Si $\{P_n(x)\}$ son ortogonales se tiene que $\langle P_n|P_m\rangle = \|P_n\|^2\delta_{nm}$, luego $I(t,t')$ queda

$$I(t,t') \equiv \langle G(x,t)|G(x,t')\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n(x)\|^2 (tt')^n, \tag{2.19}$$

   que es un función sólo de tt'. Esta propiedad se usará en las secciones 2.6.5 y 2.7.1 para hallar la norma de los polinomios de Hermite y polinomios asociados de Laguerre, respectivamente.

2. **Condición suficiente:** Si $I(t,t')$ sólo depende de tt', su desarrollo en serie de Taylor sobre esta variable tt' toma la forma

$$I(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} (tt')^n\, I_n.$$

   Comparando con (2.18) encontramos que

$$\langle P_n|P_m\rangle = I_n\delta_{nm}.$$

   Esto significa que $\{P_n(x)\}$ es una familia ortogonal, tal como queríamos demostrar.

2.2.3. Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

Vimos en el capítulo anterior que este método servía para construir un conjunto de funciones ortogonales a partir de un conjunto de funciones degeneradas correspondientes a un mismo autovalor. La idea ahora es la misma: a partir de un conjunto de funciones linealmente independientes

$\{\varphi_n(x)\}$ construimos una familia de funciones ortogonales $\{\psi_n(x)\}$ con respecto al peso $r(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Las fórmulas del método de ortogonalización de Gram-Schmidt son:

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x),$$
$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \psi_m(x) \quad \text{con } a_m = \frac{\langle \psi_m | \varphi_n \rangle}{\|\psi_m\|^2},$$

siendo, por supuesto,

$$\langle \psi_m | \varphi_n \rangle = \int_a^b dx\, r(x) \psi_m(x) \varphi_n(x).$$

En particular, si la familia de funciones linealmente independiente $\{\varphi_n(x)\}$ son los monomios $\{x^n\}$, es decir, $\{\varphi_n(x) = x^n\}$, el procedimiento de Gram-Schmidt nos permite hallar un conjunto de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$ con respecto al peso $r(x)$ en el intervalo $[a,b]$.

► *Ejemplo 2.2*

Usando el procedimiento de Gram-Schmidt, los tres primeros polinomios ortogonales en el intervalo $[a,b] = [-1,1]$ con respecto a la función peso $r(x) = 1$ son:

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x - \frac{\langle P_0(x)|x\rangle}{\|P_0\|^2} P_0(x),$$
$$P_2(x) = x^2 - \frac{\langle P_0(x)|x^2\rangle}{\|P_0\|^2} P_0(x) - \frac{\langle P_1(x)|x^2\rangle}{\|P_1\|^2} P_1(x).$$

Pero

$$\langle P_0|x\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, 1\, x = 0,$$
$$\langle P_0|x^2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, 1\, x^2 = \frac{2}{3},$$
$$\langle P_1|x^2\rangle = \int_{-1}^{1} dx\, x\, x^2 = 0,$$
$$\|P_0\|^2 = \int_{-1}^{1} dx\, 1^2 = 2,$$

luego,

$$P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Es claro que $\langle P_m|x^n\rangle = 0$ si n y m son de paridad distinta, por lo que $P_n(x)$ son polinomios alternativamente pares e impares: $P_0(x)$ par, $P_1(x)$ impar, $P_2(x)$ par, $P_3(x)$ impar, etc.
Los polinomios que se generan de este modo son, salvo por el valor de la constante de normalización, los polinomios de Legendre, $\tilde{P}_n(x)$. Es decir,

$$\tilde{P}_n(x) = c_n P_n(x),$$

donde los coeficientes c_n se escogen, por convención, de modo que la norma de $\tilde{P}_n(x)$ sea igual a $2/(2n+1)$:

$$\|\tilde{P}_n(x)\|^2 = c_n^2 \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,.$$

En la tabla 2.1 se pueden ver los intervalos, funciones peso y normas que conducen a otros polinomios ortogonales.

◄

Polinomios	Intervalo	r(x)	Normalización estándar
Legendre	$-1 \leq x \leq 1$	1	$\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$
Chebychev (Tipo I)	$-1 \leq x \leq 1$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\|P_n\|^2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n \neq 0, \\ \pi & n = 0, \end{cases}$
Laguerre	$0 \leq x < \infty$	e^{-x}	$\|P_n\|^2 = 1$
Asociados Laguerre	$0 \leq x < \infty$	$x^k\,\mathrm{e}^{-x}$	$\|P_n\|^2 = \dfrac{(n+k)!}{n!}$
Hermite	$-\infty < x < \infty$	e^{-x^2}	$\|P_n\|^2 = 2^n \pi^{1/2} n!$

Tabla 2.1: Intervalos, funciones peso y normas de algunos polinomios ortogonales.

2.3. Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre son las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville

$$\boxed{(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + l(l+1)\,y = 0}, \qquad -1 \leq x \leq 1, \tag{2.20}$$

que verifican la condición de ser regulares en $x = \pm 1$. En otros términos, son las soluciones de problema de Sturm-Liouville *singular*,

$$\mathcal{L}P_l(x) = -\lambda_l P_l(x), \tag{2.21}$$

donde $p(x) = 1 - x^2, q(x) = 0, r(x) = 1$ y $\lambda_l \equiv l(l+1)$, con las condiciones de contorno

$$P_l(\pm 1) = \text{finito}. \tag{2.22}$$

Cuando se resuelve la ecuación de Legendre mediante serie de potencias (véase la sección 2.3.1 siguiente) se encuentra que las condiciones de finitud de la solución en $x = \pm 1$ sólo pueden satisfacerse si $l = 0, 1, 2, \ldots$ Es decir, los autovalores del problema de Sturm-Liouville singular dado por (2.20) y (2.22) son

$$\lambda_l \equiv l(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

Para estos valores de l, las soluciones (autofunciones) de la ecuación de Legendre que satisfacen las condiciones de contorno (2.22) existen y son los polinomios de Legendre, cuya representación en serie de potencias es

$$P_l(x) = \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^l m!\,(l-m)!\,(l-2m)!}\,x^{l-2m}, \tag{2.24}$$

donde por $[l/2]$ denotamos la parte entera de $l/2$. La constante de normalización se ha elegido de modo que $P_l(1) = 1$.

2.3.1. Resolución de la ecuación de Legendre mediante serie de potencias

En esta sección comprobaremos que, efectivamente, los polinomios de Legendre son la solución del problema de Sturm-Lioville singular dado por las ecuaciones (2.20) y (2.22). Una discusión más detallada puede encontrarse en casi cualquier libro que trate sobre la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante serie de potencias pues la ecuación de Legendre es un ejemplo clásico.[5]

[5]Véase, por ejemplo, la sección 4.2 de [Myi78], la sección 28 de [Sim93] o la sección 12.10 de [Arf85].

Empezamos buscando una solución de la ecuación de Legendre en forma de serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Sustituimos en la ecuación de Legendre y obtenemos

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

es decir,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n} + l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{2.25}$$

Podemos reescribir el primer término de esta ecuación de otra manera haciendo el cambio $n \to n+2$ en el sumatorio, es decir:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

(¡compruébese escribiendo explícitamente los primeros términos de la serie!) de modo que la ecuación (2.25) se transforma en

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + l(l+1)a_n\right]x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n. \tag{2.26}$$

Ahora agrupamos los términos que contienen potencias de x^0 (término independiente), x^1 y x^n con $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} 0 = &\left[2a_2 + l(l+1)a_0\right] + \left\{\left[l(l+1) - 2\right]a_1 + 6a_3\right\}x \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[-n(n-1) - 2n + l(l+1)\right]a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2}\right\}x^n. \end{aligned}$$

Para que esta relación se verifique, los coeficientes que acompañan a las potencias x^m con $m = 0, 1, \cdots$ deben ser nulos y por tanto:

$$a_2 = -\frac{l(l+1)}{2}\,a_0, \tag{2.27a}$$

$$a_3 = -\frac{l(l+1)-2}{6}\,a_1 = -\frac{(l-1)(l+2)}{3!}\,a_1 \tag{2.27b}$$

$$a_{n+2} = -\frac{l(l+1)-n(n+1)}{(n+2)(n+1)}\,a_n = -\frac{(l-n)(l+n+1)}{(n+1)(n+2)}\,a_n, \quad n \geq 2. \tag{2.27c}$$

La solución general de la ecuación de Legendre, como la de toda ecuación diferencial de segundo orden, se escribe como la combinación lineal de dos soluciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linealmente independientes. Si escogemos $a_1 = 0$, obtenemos la solución

$$\begin{aligned} y_1(x) = a_0 \Bigg[&1 - l(l+1)\frac{x^2}{2!} + (l-2)l(l+1)(l+3)\frac{x^4}{4!} \\ &- (l-4)(l-2)l(l+1)(l+3)(l+5)\frac{x^6}{6!} + \cdots \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Si escogemos $a_0 = 0$, la solución linealmente independiente es

$$\begin{aligned} y_2(x) =& a_1 \left[x - (l-1)(l+2)\frac{x^3}{3!} + (l-3)(l-1)(l+2)(l+4)\frac{x^5}{5!} \right. \\ & \left. -(l-5)(l-3)(l-1)(l+2)(l+4)(l+6)\frac{x^7}{7!} + \cdots \right]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

▷ ***Ejercicio** 2.2*

Comprueba que de las ecuaciones (2.27) *se deducen las expresiones* (2.28) *y* (2.29).

Las series *infinitas* anteriores nos definen dos funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ que son linealmente independientes pues en $y_1(x)$ sólo hay potencias pares y en $y_2(x)$ sólo potencias impares de x. La solución general de la ecuación de Legendre es pues $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, con c_1 y c_2 constantes arbitrarias. Estas funciones $y_1(x)$ e $y_2(x)$ se conocen como funciones de Legendre y, en *general*, divergen para $x = \pm 1$ por lo que no satisfacen la condición de contorno singular (2.22). Hemos dicho que las funciones de Legendre divergen *en general* para $x = \pm 1$ porque para valores enteros de l estas funciones se hacen regulares en $x = \pm 1$. Esto no es difícil de ver: si l es un número entero ($l = 0, 1, \cdots$), la relación de recurrencia (2.27c) nos dice que $a_{l+2} = 0$, y por consiguiente, $0 = a_{l+4} = a_{l+6} = \cdots$. Por tanto, si $l =$ par, la serie que define a $y_1(x)$ se trunca y la función $y_1(x)$ no es más que un polinomio de grado l; si $l =$ impar, es la serie que define a $y_2(x)$ la que se trunca y la función $y_2(x)$ es un polinomio de grado l. En definitiva, si $l = 0, 1, \cdots$, hay soluciones en forma de polinomio de la ecuación de Legendre. Dado que los polinomios son funciones regulares para todo argumento, concluimos que estos polinomios son la solución del problema de Sturm-Liouville descrito por las ecuaciones (2.20) y (2.22) dado que son soluciones de la ecuación de Legendre y, *además*, son regulares en $x = \pm 1$. Estos polinomios son justamente los polinomios de Legendre si se escogen las constantes a_0 y a_1 de modo que el valor de los polinomios sea 1 en $x = 1$.

2.3.2. Paridad y valores especiales

Por inspección de la fórmula explícita (2.24) de $P_l(x)$ puede verse que $P_l(x)$ tiene la misma paridad que l:[6]

$$\begin{aligned} P_l(x) &= -P_l(-x) \quad \text{si } l \text{ es impar}, \\ P_l(x) &= P_l(-x) \quad \text{si } l \text{ es par}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Esto implica que

$$P_l(0) = 0 \quad \text{si } l = \text{impar}$$

pues, en este caso, $P_l(0) = -P_l(-0)$ lo cual exige $P_l(0) = 0$.

Si l es par, entonces sólo el término (sumando) constante (es decir, el coeficiente de x^0) no es nulo cuando $x = 0$, con lo cual $P_l(0)$ será igual al coeficiente de x^0. Como el término correspondiente a x^0 se da cuando $l - 2m = 0$, es decir, para $m = l/2$, se deduce que

$$\begin{aligned} P_l(0) &= (-1)^{l/2} \frac{l!}{2^l \left(\frac{l}{2}\right)! \left(\frac{l}{2}\right)! \, 0!} \\ &= (-1)^{l/2} \frac{l!}{2^l \left[\left(\frac{l}{2}\right)!\right]^2}. \end{aligned}$$

[6]Si l es par [impar] entonces $l - 2m$ es par [impar] para todo $m =$ entero, luego x^{l-2m} es función par [impar] y por tanto $P_l(x)$ es función par [impar].

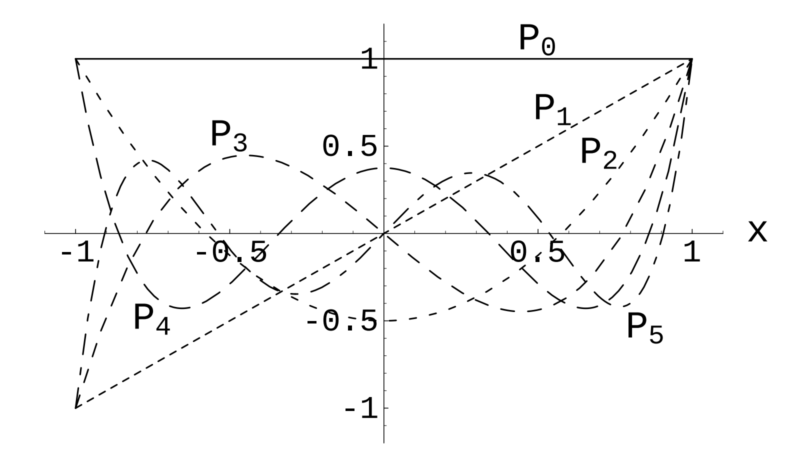


Figura 2.1: Primeros polinomios de Legendre $P_l(x)$ con $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. La línea que corta l veces a la abscisa es la representación del polinomio $P_l(x)$.

2.3.3. Primeros polinomios

Los primeros polinomios de Legendre normalizados mediante la condición $P_l(1) = 1$ son:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \\ &\vdots \end{aligned}$$

En la figura 2.1 se representan estos seis primeros polinomios. Nótese que el número de ceros de $P_l(x)$ es igual a l.

2.3.4. Fórmula de Rodrigues

La fórmula de Rodrigues proporciona una representación diferencial de los polinomios de Legendre.

Partimos de las siguientes propiedades de la derivada de un monomio:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^m &= \frac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n} \quad \text{para } n \leq m, \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n x^m &= 0 \quad \text{para } n > m. \end{aligned} \tag{2.31}$$

En particular se tiene que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^l x^{2l-2m} = \frac{(2l-2m)!}{(l-2m)!} x^{l-2m} \Rightarrow x^{l-2m} = \frac{(l-2m)!}{(2l-2m)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l x^{2l-2m}.$$

Usamos esta última relación en la expresión (2.24) de $P_l(x)$:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \frac{1}{2^l m!(l-m)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l x^{2l-2m} \\ &= \frac{1}{2^l} \left(\frac{d}{dx}\right)^l \sum_{m=0}^{[l/2]} \frac{1}{m!(l-m)!} (-1)^m x^{2(l-m)}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Esta última expresión es muy similar a la fórmula del binomio de Newton. Sería igual si el sumatorio se extendiera hasta l y estuviera multiplicado por $l!$ Pero, ¿es lícito extender el sumatorio hasta l? La respuesta es sí ya que

$$\sum_{m=0}^{l} \frac{(-1)^m x^{2(l-m)}}{m!(l-m)!} = \sum_{m=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^m x^{2(l-m)}}{m!(l-m)!} + \sum_{m=[l/2]+1}^{l} \frac{(-1)^m x^{2(l-m)}}{m!(l-m)!} \tag{2.33}$$

y resulta que el segundo sumatorio, tras ser derivado l veces, es nulo. Justificaremos esta afirmación escribiendo

$$\sum_{m=[l/2]+1}^{l} \frac{(-1)^m x^{2(l-m)}}{m!(l-m)!} = x^{2l-2[l/2]-2} + \text{monomios de grado menor}$$

Como

$$2[l/2] = \begin{cases} l & \text{si } l \text{ es par,} \\ l-1 & \text{si } l \text{ es impar,} \end{cases}$$

se tiene que

$$2l - 2[l/2] - 2 = \begin{cases} l-2 & \text{si } l \text{ es par,} \\ l-1 & \text{si } l \text{ es impar,} \end{cases}$$

y por tanto el monomio de mayor grado que añadimos en (2.33) es x^{l-2} si l es par, o x^{l-1} si l es impar. Pero, según (2.31), su derivada l-ésima es nula en cualquiera de estos dos casos. Esto significa que, efectivamente, los términos que añadimos, tras ser derivados l veces, dan una contribución nula. Por tanto podemos escribir (2.32) en forma del binomio de Newton:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l \sum_{m=0}^{l} \frac{l!}{m!(l-m)!} (-1)^m x^{2(l-m)} \\ &= \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Esta última expresión se conoce como *fórmula de Rodrigues.*

2.3.5. Representaciones integrales

Fórmula de Schläfli

Partimos de la fórmula integral de Cauchy,

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C ds\, \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}, \tag{2.35}$$

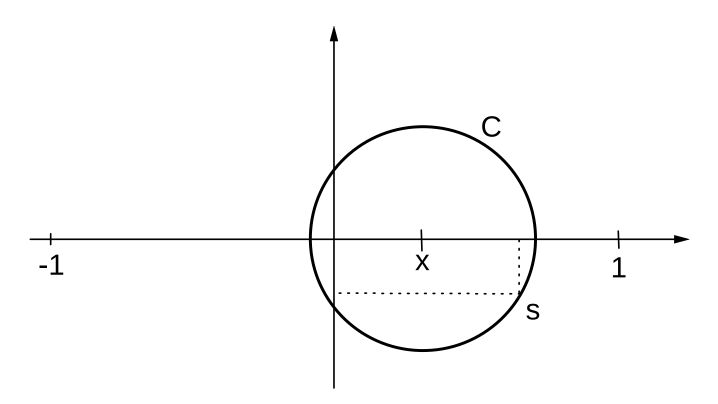


Figura 2.2: Un contorno de integración válido para la fórmula de Schläfli en donde $z = x \in \mathbb{R}$.

siendo C un contorno cerrado dentro del cual f es regular (analítica) y que incluye al punto $s = z$ (véase la figura 2.2). Escogemos ahora la función $f(s) = (s^2-1)^l$, que es regular en todo el plano complejo, y elegimos como valor de z a un número real x dentro del intervalo $[-1, 1]$. Por tanto

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^l (x^2-1)^l = \frac{l!}{2\pi i}\oint_C ds\,\frac{(s^2-1)^l}{(s-x)^{l+1}}.$$

Usando la fórmula de Rodrigues (2.34) se tiene que

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l 2\pi i}\oint_C ds\,\frac{(s^2-1)^l}{(s-x)^{l+1}}, \tag{2.36}$$

que es la *fórmula de Schläfli.*

Fórmula de Laplace

Partimos de la representación de Schläfli, escogiendo como contorno C a la circunferencia con centro en $x \in (-1, 1)$ y de radio $\sqrt{|x^2-1|}$, es decir, excluimos los puntos $x = \pm 1$ como centros. De este modo tenemos que

$$s = x + (x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi}, \qquad -\pi \le \varphi \le \pi. \tag{2.37}$$

El numerador de la integral de la fórmula de Schläfli (2.36) toma la forma

$$\begin{aligned}
s^2 - 1 &= (s+1)\,(s-1)\\
&= [x + 1 + (x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi}]\,[x - 1 + (x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi}]\\
&= (x^2-1) + 2x\,(x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi} + (x^2-1)\,\mathrm{e}^{i2\varphi}\\
&= 2x(x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi} + (x^2-1)\,(1+\mathrm{e}^{i2\varphi})\\
&= 2(x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi}\left[x + (x^2-1)^{1/2}\frac{\mathrm{e}^{-i\varphi}+\mathrm{e}^{i\varphi}}{2}\right]\\
&= 2(x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi}[x + (x^2-1)^{1/2}\cos\varphi].
\end{aligned}$$

Por tanto

$$(s^2-1)^l = 2^l (x^2-1)^{l/2}\,\mathrm{e}^{il\varphi}[x + (x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^l. \tag{2.38}$$

De la ecuación (2.37) se deduce que

$$ds = i\,(x^2-1)^{1/2}\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,d\varphi. \tag{2.39}$$

Sustituyendo (2.38) y (2.39) en la fórmula de Schläfli (2.36), obtenemos

$$
\begin{aligned}
P_l(x) &= \frac{1}{2^l 2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2^l (x^2-1)^{l/2}\, \mathrm{e}^{il\varphi}[x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^l}{(x^2-1)^{\frac{l+1}{2}}\, \mathrm{e}^{i(l+1)\varphi}}\, i\,(x^2-1)^{1/2}\, \mathrm{e}^{i\varphi}\, d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^l\, d\varphi.
\end{aligned}
$$

Como la función $\cos\varphi$ es par, podemos escribir

$$
P_l(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^l\, d\varphi, \tag{2.40}
$$

que es la *fórmula de Laplace*. Esta fórmula es también válida para $x = \pm 1$ ya que para estos valores conduce a $P_l(1) = 1$ y $P_l(-1) = (-1)^l$, tal como debe ser. Nótese también que $P_l(x)$ es siempre real a pesar de que $(x^2-1)^{1/2}$ es imaginario para $-1 < x < 1$. Esto puede justificarse de la siguiente manera: si desarrollamos $[x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^l$ mediante la fórmula del binomio de Newton, obtendremos sumandos proporcionales a:

- $[(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^m$ siendo m par ($m \leq l$), y estos términos son reales, como puede verse fácilmente:

  $$
  [(x^2-1)^{1/2}]^m = [i\,(1-x^2)^{1/2}]^m = i^m (1-x^2)^{m/2} = \pm(1-x^2)^{m/2} \in \mathbb{R}
  $$

  para $-1 \leq x \leq 1$.

- $[(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^m$ siendo m impar. Ahora es cierto que $(x^2-1)^{1/2}$ es un número imaginario puro, pero si m es impar entonces en (2.40) estamos integrando una potencia impar de $\cos\varphi$ en el intervalo $[0,\pi]$. Esta integral es nula, por lo que estos sumandos con m impar dan una contribución nula. En resumen, si m es impar, los términos imaginarios se anulan al integrarse:

  $$
  \int_0^{\pi} (x^2-1)^{m/2}\cos^m\varphi\, d\varphi = (x^2-1)^{m/2}\int_0^{\pi}\cos^m\varphi\, d\varphi = 0 \quad \text{si } m \text{ impar.}
  $$

2.3.6. Función generatriz

Vamos a hallar la función generatriz a partir de la fórmula de Laplace (2.40):

$$
\begin{aligned}
G(x,t) &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi \sum_{l=0}^{\infty} t^l [x+(x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^l \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1-t\,(x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)},
\end{aligned}
$$

donde se ha hecho uso de la relación $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \ldots$ La integral anterior tiene primitiva:

$$
G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\pi}\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}
$$

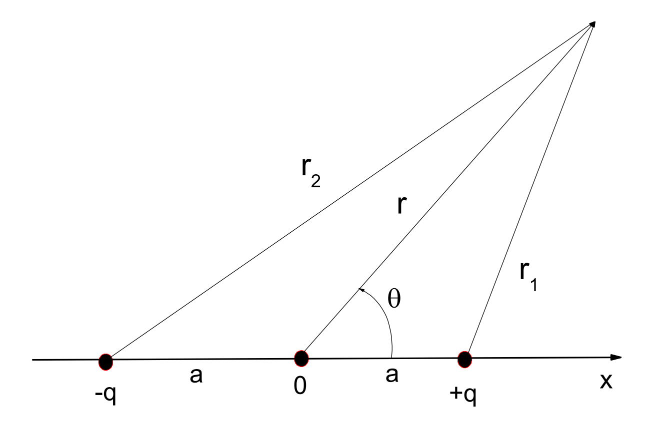


Figura 2.3: Cálculo del campo eléctrico dipolar.

con $a = 1 - tx$ y $b = -t\sqrt{x^2-1}$. Pero

$$\left.\begin{array}{ccc} \tan 0 = 0 & \rightarrow & \arctan 0 = 0 \\ \tan \frac{\pi}{2} = \infty & \rightarrow & \arctan \infty = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

y por tanto la función generatriz será

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}}. \tag{2.41}$$

A partir de la función generatriz pueden obtenerse diversas propiedades de los polinomios de Legendre. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} G(x=1,t) &= \frac{1}{1-t} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l \qquad \Rightarrow \qquad P_l(1) = 1, \\ G(x=-1,t) &= \frac{1}{1+t} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l t^l \quad \Rightarrow \quad P_l(-1) = (-1)^l. \end{aligned}$$

2.3.7. Función generatriz y campo eléctrico dipolar

Puede usarse la función generatriz de los polinomios de Legendre para hallar una expresión aproximada del campo eléctrico generado por un dipolo eléctrico. Sea un dipolo formado por dos cargas q y $-q$ equidistantes del origen de coordenadas y que están separadas por la distancia $2a$, tal como se muestra en la figura 2.3. Usando coordenadas polares (pues el campo tiene simetría de rotación con respecto al eje que pasa por las dos cargas $+q$ y $-q$), el campo eléctrico en un punto de coordenadas (r, θ) viene dado por

$$V(r,\theta) = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}$$

con

$$\begin{aligned} r_1 &= \left(r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta\right)^{1/2}, \\ r_2 &= \left(r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\cos(\theta)(a/r)+(a/r)^2}} = G(\cos\theta, a/r),$$
$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+2\cos(\theta)(a/r)+(a/r)^2}} = G(\cos\theta, -a/r).$$

Por tanto

$$V(r,\theta) = \frac{q}{r}\left[G(\cos\theta, a/r) - G(\cos\theta, -a/r)\right]$$

De la definición de la función generatriz se deduce que

$$V(r,\theta) = \frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) - (-1)^n P_n(\cos\theta)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^n$$

Por tanto, usando las propiedades de simetría (2.30) de los polinomios de Legendre obtenemos

$$V(r,\theta) = \frac{2q}{r}\sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n+1},$$

que es la expresión del potencial de un dipolo eléctrico expresado en la forma de un desarrollo en serie de polinomios de Legendre. En particular, si r es mucho más grande que a, la serie anterior converge muy rápidamente y se puede aproximar el potencial $V(r,\theta)$ del dipolo por su primer término, $(2qa/r^2)P_1(\cos\theta)$, es decir,

$$V(r,\theta) \simeq \frac{2qa}{r^2}\cos\theta \qquad \text{para} \quad r \gg a.$$

Esta es la expresión aproximada habitual utilizada en las aplicaciones físicas. La cantidad $2qa$ es conocida como momento del dipolo.

Si la disposición de las cargas hubiera sido $+q$ en $x = a$, $-2q$ en $x = 0$ y $+q$ en $x = -a$, tendríamos un cuadripolo eléctrico lineal cuyo campo eléctrico, como es fácil de comprobar, vendría dado por

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \frac{q}{r}\left[-2 + G(\cos\theta, a/r) + G(\cos\theta, -a/r)\right] \\ &= \frac{q}{r}\left\{-2 + \sum_{n=0}^{\infty}\left[P_n(\cos\theta) + (-1)^n P_n(\cos\theta)\right]\left(\frac{a}{r}\right)^n\right\} \\ &= \frac{2q}{r}\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n}(\cos\theta)\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Si $r \gg a$, el potencial del cuadripolo eléctrico linear se puede aproximar por

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \frac{2qa^2}{r^3}P_2(\cos\theta) + \cdots \\ &= \frac{qa^2}{r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \cdots \end{aligned}$$

Siempre es posible disponer las cargas eléctricas de modo que el primer término del desarrollo de $V(r,\theta)$ en polinomios de Legendre sea P_m, es decir, $V(r,\theta) \sim P_m(\cos\theta) + \cdots$. A esta disposición de cargas se la llama monopolo si $m = 0$, dipolo si $m = 1$, cuadripolo si $m = 2$, octupolo si $m = 3$, etc.

▷ ***Ejercicio** 2.3*

Se pide hallar la disposición de cargas de un octupolo lineal, es decir, la disposición de cargas que conduce a un campo eléctrico con la propiedad de que $V(r,\theta) \sim P_3(\cos\theta) + \cdots$. Una pista muy sugerente: la disposición de cargas del dipolo y del cuadripolo están "curiosamente" relacionadas con las fórmulas más sencillas de la derivada primera y segunda central, respectivamente, mediante diferencias finitas de una función (véase la sección 4.3.1); ¿podría ser que la disposición del octupolo estuviera relacionada con la expresión (más sencilla) de la derivada tercera central? La respuesta es sí. ¿Es esto sólo casualidad?

2.3.8. Desarrollo en serie de polinomios de Legendre

Sea $\varphi(x)$ una función de cuadrado sumable en el intervalo $I = [-1,1]$. Entonces podemos escribir dicha función como

$$\varphi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x) \quad \text{con } c_l = \frac{\langle P_l|\varphi\rangle}{\|P_l\|^2}. \tag{2.42}$$

Dentro de un momento vamos a demostrar que la norma de los polinomios de Legendre viene dada por

$$\|P_l\|^2 = \frac{2}{2l+1}. \tag{2.43}$$

Usando este resultado podemos escribir el desarrollo en polinomios de Legendre de una función $\varphi(x)$ de un modo más explícito:

$$\varphi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x) \quad \text{con} \quad c_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, \varphi(x) P_l(x). \tag{2.44}$$

Por supuesto, tal como se decía en los teoremas 1.6 y 1.5, página 27, el tipo de convergencia de la serie Fourier generalizada (2.42) a la función $\varphi(x)$ depende de la continuidad y suavidad de esta función.

A continuación vamos a demostrar la fórmula (2.43) para la norma de P_l. Lo haremos de dos modos: mediante la fórmula de Rodrigues y mediante la función generatriz.

Primer modo: mediante la fórmula de Rodrigues.

El cuadrado de la norma de $P_l(x)$ es

$$\begin{aligned}
\|P_l\|^2 &= \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, P_l(x) \\
&= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\int_{-1}^{1} [D^l(x^2-1)^l]\,[D^l(x^2-1)^l]\, dx
\end{aligned} \tag{2.45}$$

donde hemos utilizado la notación $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ y $D^m = \dfrac{d^m}{dx^m} = \left(\dfrac{d}{dx}\right)^m$. Integramos (2.45) por partes con $u = [D^l(x^2-1)^l]$ y $dv = [D^l(x^2-1)^l]\, dx$, de modo que

$$\|P_l\|^2 = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}\left\{ [D^{l-1}(x^2-1)^l]\,[D^l(x^2-1)^l]\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} dx\, [D^{l-1}(x^2-1)^l]\,[D^{l+1}(x^2-1)^l] \right\}. \tag{2.46}$$

El primer término (el término de contorno) es nulo ya que

$$D^n(x^2-1)^l\Big|_{x=\pm 1} = D^n(x-1)^l(x+1)^l\Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad \text{si } n<l$$

pues en esta derivada n-ésima, los términos resultantes contienen términos proporcionales a $x-1$ y a $x+1$ que son nulos en $x=1$ y $x=-1$, respectivamente. Integrando por partes l veces la integral remanente en (2.46) se tiene que

$$\|P_l\|^2 = \frac{1}{2^{2l}(l!)^2}(-1)^l \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l \, dx. \tag{2.47}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} (x^2-1)^l &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} x^{2n}(-1)^{n-l} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^{2l} [x^{2l} - l x^{2l-2} + \cdots] \\
&= D^{2l}x^{2l} - l\, D^{2l}x^{2l-2} + \cdots \\
&= (2l)! + 0 + 0 + \cdots
\end{aligned}$$

Por tanto $\|P_l\|^2$ se reduce a

$$\|P_l\|^2 = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}(-1)^l \int_{-1}^{1} dx\,(x^2-1)^l.$$

Para evaluar esta integral usaremos el cambio de variable $u=(x+1)/2$, es decir, $x=2u-1$. Entonces

$$\begin{aligned}
x = -1 &\Rightarrow u = 0, \\
x = 1 &\Rightarrow u = 1, \\
x^2 - 1 = (x+1)(x-1) &= 4u(u-1),
\end{aligned}$$

y la integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx\,(x^2-1)^l &= 2\int_0^1 du\,[2^2(u-1)\,u]^l \\
&= (-1)^l\, 2^{2l+1} \int_0^1 du\, u^l (1-u)^l \\
&= (-1)^l\, 2^{2l+1} B(l+1, l+1),
\end{aligned}$$

donde $B(r,s)$ es la función beta:

$$B(r,s) = \int_0^1 du\, u^{r-1}(1-u)^{s-1} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

Recordando que $\Gamma(l+1)=l!$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|P_l\|^2 &= \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}(-1)^l\,(-1)^l 2^{2l+1}\frac{(l!)^2}{(2l+1)!} \\
&= \frac{2}{2l+1},
\end{aligned} \tag{2.48}$$

que es el resultado que queríamos probar.

▷ ***Ejercicio*** *2.4*

Sabemos que $\langle P_l | P_m \rangle = 0$ *si* $l \neq m$ *porque los polinomios de Legendre son soluciones de un problema de Sturm-Liouville y* $P_l(x)$ *y* $P_m(x)$ *son autofunciones con autovalores distintos. No obstante, podemos demostrar esta propiedad de forma directa mediante un procedimiento muy similar al que acabamos de seguir para hallar la norma de* $P_l(x)$*. Supongamos por concretar que* $m < l$*. Entonces:*

1. *Usa la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre para demostrar que*

$$\langle P_l | P_m \rangle \propto \int_{-1}^{1} [D^l (x^2-1)^l] \, [D^m (x^2-1)^m] \, dx.$$

2. *Mediante integración por partes [mira la deducción que va de la ecuación* (2.45) *a la ecuación* (2.47)*] demuestra que*

$$\langle P_l | P_m \rangle \propto \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \left(\frac{d}{dx} \right)^{l+m} (x^2-1)^m \, dx.$$

3. *Usa la relación anterior para demostrar que* $\langle P_l | P_m \rangle = 0$ *si* $m < l$*.*

Por supuesto, si hubiera ocurrido que $m > l$*, sólo habría que intercambiar los papeles de* l *y* m *en la demostración anterior, por lo que se deduce entonces que* $\langle P_l | P_m \rangle = 0$ *si* $l \neq m$*, que es lo que se quiere demostrar.*

Segundo modo: mediante la función generatriz.

Este método es más sencillo que el anterior. Partimos de la función generatriz

$$G(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) \, t^l.$$

Elevamos al cuadrado esta expresión e integramos en el intervalo $[-1, 1]$,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-2xt+t^2} = \int_{-1}^{1} G^2(x,t) \, dx \tag{2.49}$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^l t^m P_l(x) \, P_m(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^l t^m \int_{-1}^{1} dx \, P_l(x) \, P_m(x)$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} t^{2l} \|P_l\|^2. \tag{2.50}$$

Hacemos ahora el cambio $y = 1 - 2tx + t^2$ en la integral (2.49). De este modo $dy = -2t \, dx$, los límites de integración son

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 2t + t^2 = (1-t)^2,$$
$$x = -1 \Rightarrow y = 1 + 2t + t^2 = (1+t)^2,$$

y la integral se transforma en

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2} &= -\int_{(1+t)^2}^{(1-t)^2}\frac{1}{2t}\frac{dy}{y}\\ &= \frac{1}{2t}\int_{(1-t)^2}^{(1+t)^2}\frac{dy}{y}\\ &= \frac{1}{2t}\ln\left(\frac{(1+t)^2}{(1-t)^2}\right)\\ &= \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).\end{aligned}$$

Pero $\ln(1\pm t) = \pm t - \frac{t^2}{2} \pm \frac{t^2}{3} - \cdots$, por lo que

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = \ln(1+t) - \ln(1-t) = 2\left[t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \cdots\right],$$

y la integral puede escribirse así:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2} &= 2\left[1 + \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{5} + \cdots\right]\\ &= 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l}}{2l+1}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Comparando el desarrollo (2.51) con el (2.50) se ve que

$$\|P_l\|^2 = \frac{2}{2l+1}. \tag{2.52}$$

► *Ejemplo 2.3*

En este ejemplo queremos desarrollar en serie de polinomios de Legendre la función $|x|$ definida en el intervalo $[-1,1]$.
El desarrollo de $|x|$ viene dado por la expresión

$$|x| = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}P_{2n}(x),$$

donde sólo aparecen índices pares debido a que $|x|$ es una función par.[7] Usando la expresión (2.44) tenemos que

$$\begin{aligned}c_{2n} &= \frac{\langle P_{2n} \mid |x|\rangle}{\|P_{2n}\|^2}\\ &= \frac{4n+1}{2}\int_{-1}^{1}dx\,|x|P_{2n}(x)\\ &= (4n+1)\int_{0}^{1}dx\,xP_{2n}(x)\end{aligned} \tag{2.53}$$

[7]Los términos impares son nulos porque $c_{2n+1} \propto \int_{-1}^{1}|x|P_{2n+1} = 0$, ya que las integrales sobre un intervalo simétrico en torno a $x = 0$ (aquí el intervalo es $[-1,1]$) cuyo integrando sea impar son nulas. En nuestro caso el integrando es impar por ser el producto de una función par, $|x|$, por una función impar, $P_{2n+1}(x)$. Este último resultado lo vimos en la ecuación (2.30) de la página 81.

pues $|x|$ y $P_{2n}(x)$ son funciones pares. Usamos ahora la fórmula de Rodrigues (2.34):

$$\begin{aligned} c_{2n} &= (4n+1)\int_0^1 dx\, \frac{1}{2^{2n}(2n)!}\, x\, D^{2n}(x^2-1)^{2n} \\ &= \frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\left\{\int_0^1 \frac{d}{dx}\left[x\, D^{2n-1}(x^2-1)^{2n}\right] dx - \int_0^1 D^{2n-1}(x^2-1)^{2n}\, dx\right\}. \end{aligned} \tag{2.54}$$

La última relación requiere $n \geq 1$. La primera integral que hay dentro de las llaves de (2.54) es nula,

$$x\, D^{2n-1}(x^2-1)^{2n}\Big|_{x=0}^{x=1} = 0,$$

puesto que:

- En $x=0$ se tiene que $0 \cdot \left[D^{2n-1}(x^2-1)^{2n}\right]_{x=0} = 0$.
- $D^{2n-1}(x^2-1)^{2n}$ es una suma de términos en los que siempre hay, al menos, un factor (x^2-1) (demuéstrese) por lo que todos estos términos son nulos en $x=1$.

Analicemos ahora el valor de la segunda integral que hay dentro de las llaves de la ecuación (2.54):

$$\int_0^1 D^{2n-1}(x^2-1)^{2n}\, dx = D^{2n-2}(x^2-1)^{2n}\Big|_{x=0}^{x=1}.$$

Esta expresión es nula en $x=1$ por los mismos motivos que hemos dado anteriormente para justificar que $D^{2n-1}(x^2-1)^{2n}$ es cero en $x=1$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n-2}(x^2-1)^{2n}\Bigg|_{x=0} \\ &= \frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{2n}{m}(-1)^m\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n-2}(x^2)^{2n-m}\Bigg|_{x=0}, \end{aligned}$$

donde hemos desarrollado $(x^2-1)^{2n}$ mediante la fórmula del binomio de Newton. Es claro que todos lo términos son nulos para $x=0$ excepto el término independiente (el término que no depende de x). Este término es

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{2n-2} x^{2n-2} = (2n-2)!$$

Pero el monomio x^{2n-2} es igual a $(x^2)^{2n-m}$ si m es tal que

$$2n-2 = 4n-2m \Rightarrow 2m = 4n-2n+2 = 2n+2 \Rightarrow m = n+1.$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\binom{2n}{n+1}(-1)^{n+1}(2n-2)! \\ &= (-1)^{n+1}\frac{4n+1}{2^{2n}}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n+1)!}, \qquad n \geq 1\,. \end{aligned}$$

El coeficiente para $n=0$ viene dado por

$$c_0 = \frac{1}{2}\langle P_0 \mid |x|\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 1\,|x|\,dx = \frac{1}{2}.$$

Los primeros coeficientes del desarrollo en serie de $|x|$ en polinomios de Legendre son

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{5}{8}, \quad c_4 = -\frac{3}{16}, \quad c_6 = \frac{13}{128}, \quad \cdots$$

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
$x=0$	0.5	0.1875	0.1172	0.0854
$x=0.5$	0.5	0.4219	0.4761	0.5089
$x=1$	0.5	1.125	0.9375	1.0391

Tabla 2.2: Aproximación $S_N(x)$ a la función $|x|$ para varios valores de x y N.

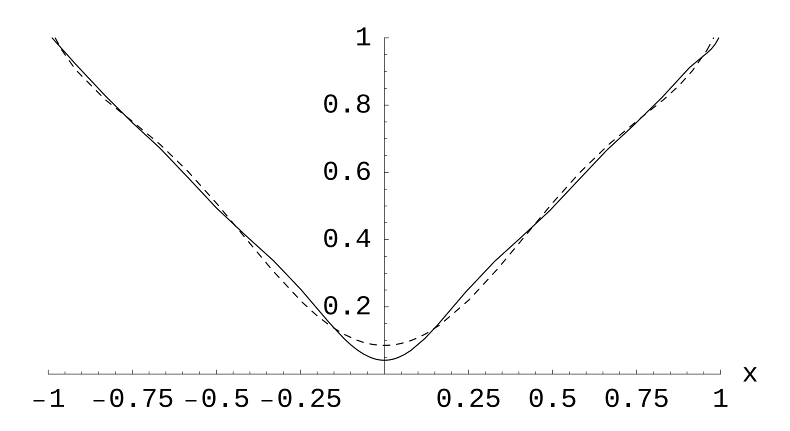


Figura 2.4: Aproximación $S_4(x)$ (línea quebrada) y $S_8(x)$ (línea continua) de la función $|x|$.

y por tanto

$$\begin{aligned} |x| &= \frac{1}{2}P_0(x) + \frac{5}{8}P_2(x) - \frac{3}{16}P_4(x) + O\left(\frac{13}{128}P_6(x)\right) \\ &= \frac{15}{64}\left(\frac{1}{2} + 7x^2 - \frac{7}{2}x^4\right) + O\left(\frac{13}{128}\right) \end{aligned} \tag{2.55}$$

Hemos escrito

$$O\left(\frac{13}{128}P_6(x)\right) = O\left(\frac{13}{128}\right)$$

porque $P_n(x)$ es del orden de la unidad ($|P_n(x)| \le 1$).
Sea S_N el desarrollo en serie de polinomios de Legendre de $|x|$ con N términos:

$$S_N(x) = \sum_{l=0}^{N-1} c_{2l}P_{2l}(x).$$

Esta serie converge muy rápidamente tal y como se muestra en la tabla 2.2 y en la figura 2.4.

◀

Aproximación de mínimos cuadrados

Queremos hallar el polinomio $p_n(x) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m$ de grado n definido en el intervalo $[-1, 1]$ que proporciona la mejor estimación (en el sentido de mínimos cuadrados) a una función dada $\varphi(x)$. Es decir, queremos hallar los coeficientes a_m que hacen que el error cuadrático medio

$$E_n = \int_{-1}^{1} dx\, [\varphi(x) - p_n(x)]^2 = \int_{-1}^{1} dx \left[\varphi(x) - \sum_{m=0}^{n} a_m x^m\right]^2$$

sea mínimo. La respuesta a esta cuestión ha sido esencialmente dada en la sección 1.6.1, página 31 y siguientes, si nos damos cuenta de que los polinomios de Legendre están definidos en el intervalo $[-1,1]$ y *su función peso es la unidad*, $r(x)=1$. Esto significa que el polinomio $p_n(x)$ óptimo (en media cuadrática), es decir, el polinomio de grado n que conduce a error cuadrático mínimo viene dado por

$$p_n(x)=\sum_{l=0}^{n} c_l P_l(x), \quad \text{con } c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} dx\,\varphi(x)P_l(x).$$

▷ ***Ejercicio*** *2.5*

Obtén las fórmulas del polinomio óptimo en media cuadrática de una función definida en el intervalo $[-a,a]$. Hazlo también si el intervalo es $[a,b]$.

► *Ejemplo 2.4*

En este ejemplo vamos a obtener el polinomio óptimo (en media cuadrática) de grado cuatro que aproxima la función $\cos(x)$ en el intervalo $[-1,1]$ y vamos a compararlo con el desarrollo en serie de Taylor hasta orden cuatro de esta función. Llevando a cabo las integrales de la ecuación (2.44) para $\varphi(x)=\cos(x)$, se obtiene que $c_0=\operatorname{sen}(1)$, $c_2=15\cos(1)-10\operatorname{sen}(1)$, $c_4=855\cos(1)-549\operatorname{sen}(1)$. Por supuesto, por ser $\cos(x)$ una función par, ocurre que $c_n=0$ cuando n es impar. Entonces

$$\begin{aligned} p_4^{\text{opt}}(x) &= \sum_{l=0}^{4} c_m P_l(x) \\ &= \frac{1695\sin(1)-2625\cos(1)}{8}+\frac{8295\sin(1)+12915\cos(1)}{4}x^2+\frac{19215\sin(1)-29925\cos(1)}{8}x^4 \\ &= 0'999971-0'499385x^2+0'0398087x^4. \end{aligned}$$

La aproximación que se obtiene mediante el desarrollo en serie de Taylor es

$$p_4^{\text{tay}}(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

En la figura 2.5 se representa la diferencia de las dos aproximaciones anteriores con la función $\cos(x)$. Es evidente la superioridad de $p_4^{\text{opt}}(x)$ sobre el simple truncamiento de la serie de Taylor, $p_4^{\text{tay}}(x)$.

◄

2.3.9. Relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre

Hallaremos la relación de recurrencia de los polinomios de Legendre de dos maneras: la primera a través de la relación de recurrencia general (2.3) de la página 73, y la segunda mediante la función generatriz. Terminaremos esta sección obteniendo algunas relaciones de recurrencia para la derivada $P_l'(x)$ de los polinomios de Legendre.

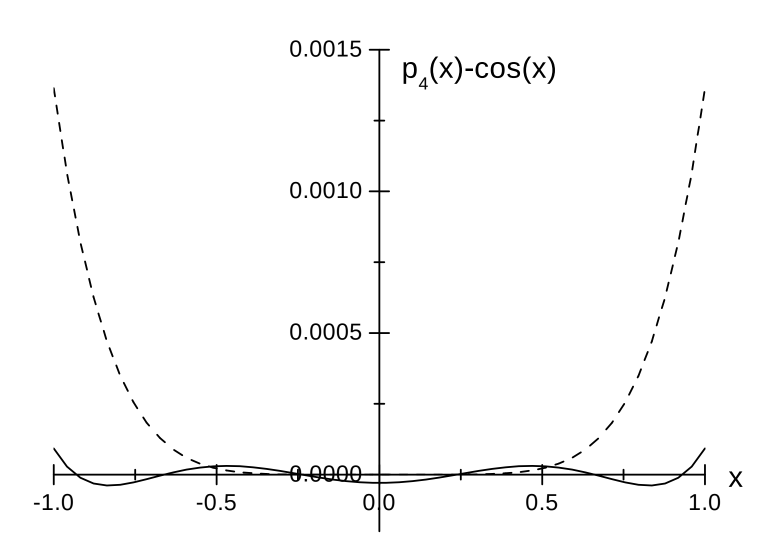


Figura 2.5: Comparación del error $p_4(x) - \cos(x)$ donde $p_4(x) = p_4^{\text{opt}}(x)$ (línea continua) y $p_4(x) = p_4^{\text{tay}}(x)$ (línea quebrada).

Relación de recurrencia a partir de la relación de recurrencia general

La relación de recurrencia general (2.3) es

$$xP_l(x) = A_l P_{l+1}(x) + B_l P_l(x) + C_l P_{l-1}(x) \tag{2.56}$$

verificándose [véanse las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.12)] que

$$A_l = \frac{a_l^{(l)}}{a_{l+1}^{(l+1)}}, \qquad B_l = \frac{a_{l-1}^{(l)}}{a_l^{(l)}} - \frac{a_l^{(l+1)}}{a_{l+1}^{(l+1)}}, \qquad C_l = A_{l-1}\frac{\|P_l\|^2}{\|P_{l-1}\|^2}, \tag{2.57}$$

donde $a_m^{(l)}$ se define por la relación

$$P_l(x) = \sum_{m=0}^{l} a_m^{(l)} x^m.$$

Pero sabemos por la ecuación (2.24) que los polinomios de Legendre vienen dados por

$$P_l(x) = \sum_{m=0}^{[l/2]} (-1)^m \frac{(2l-2m)!}{2^l m!(l-m)!(l-2m)!} x^{l-2m} = \sum_{m=0}^{[l/2]} a_{l-2m}^{(l)} x^{l-2m} \tag{2.58}$$

donde, en particular,

$$a_l^{(l)} = (-1)^0 \frac{(2l - 2\cdot 0)!}{2^l\, 0!\, l!\, l!} = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2},$$

$$a_{l-1}^{(l)} = 0.$$

Usando estas expresiones en (2.57) se tiene

$$A_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\,\frac{2^{l+1}[(l+1)!]^2}{(2l+2)!} = \frac{2(l+1)^2}{(2l+1)(2l+2)} = \frac{l+1}{2l+1}, \tag{2.59}$$

$$B_l = 0, \tag{2.60}$$

$$C_l = \frac{l}{2l-1}\,\frac{2}{2l+1}\,\frac{2l-1}{2} = \frac{l}{2l+1}. \tag{2.61}$$

Sustituyendo en (2.56) se encuentra

$$xP_l(x) = \frac{l+1}{2l+1}P_{l+1}(x) + \frac{l}{2l+1}P_{l-1}(x),$$

es decir

$$(2l+1)\,x\,P_l(x) = (l+1)\,P_{l+1}(x) + l\,P_{l-1}(x). \tag{2.62}$$

Relación de recurrencia a partir de la función generatriz

Ahora vamos a hallar la relación de recurrencia (2.62) partiendo de la función generatriz dada en (2.41),

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1/2}.$$

Derivamos $G(x,t)$ respecto a la variable t,

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2x+2t) = \frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}},$$

para, reordenando términos, obtener

$$(1-2xt+t^2)\frac{\partial G}{\partial t} = (x-t)\,G(x,t). \tag{2.63}$$

Pero la función generatriz se define como

$$G(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l$$

lo que implica

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \sum_{l=1}^{\infty} P_l(x)\,l\,t^{l-1}.$$

Sustituyendo este resultado en (2.63) obtenemos

$$\sum_{l=1}^{\infty} l\,P_l(x)t^{l-1} - 2x\sum_{l=1}^{\infty} l\,P_l(x)t^l + \sum_{l=1}^{\infty} l\,P_l(x)t^{l+1} = x\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^{l+1}. \tag{2.64}$$

Aprovechando que los índices de los sumatorios son "mudos" vamos cambiar los índices en los sumatorios teniendo cuidado de no invalidar la igualdad. Lo que haremos es cambiar los índices de modo que nos queden todos los sumatorios expresados en potencias de t^l. En general, si nos encontramos con la suma $\sum_{l=n}^{\infty} F(l)t^{l+m}$ y queremos expresarla en potencias de t^l debemos realizar el cambio $l_{old} \to l_{new} - m$, o, como escribiremos a menudo sin tanto detalle, $l \to l - m$. Por ejemplo, esto significa que

$$l_{old} + m \to l_{new}$$
$$l_{old} = n \to l_{new} - m = n \Rightarrow l_{new} = m + n,$$

y por tanto la suma $\sum_{l=n}^{\infty} F(l)t^{l+m}$ en términos del nuevo índice se escribiría $\sum_{l=n+m}^{\infty} F(l-m)t^l$, expresión que ya está escrita en potencias de t^l.[8] Volviendo a la ecuación (2.64), lo que hacemos

[8] Está claro que ir arrastrando los subíndices *old* y *new* es pesado y, además, innecesario siempre que se preste la atención debida. Otra posibilidad menos "elegante" pero que provoca menos confusión es utilizar símbolos distintos para el índice nuevo y viejo; digamos escribir l en vez de l_{old} y j en vez de l_{new}.

es efectuar el cambio $l \to l+1$ en el primer sumatorio, dejamos el segundo y el cuarto tal como están (pues ya están expresados en potencias de t^l), y en el tercer y quinto sumatorio llevamos a cabo el cambio $l \to l-1$. El resultado es

$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)\,P_{l+1}t^l - 2x\sum_{l=1}^{\infty} l\,P_l t^l + \sum_{l=2}^{\infty}(l-1)\,P_{l-1}t^l = x\sum_{l=0}^{\infty} P_l t^l - \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}t^l.$$

Como todas las sumas están expresadas con términos t^l, es fácil darse cuenta que el único modo de que la relación anterior se satisfaga para todo t es si los coeficientes de t^l $(l = 0, 1, 2\cdots)$ satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned} t^0 :&\quad P_1 = xP_0, \\ t^1 :&\quad 2P_2 - 2x\,P_1 = xP_1 - P_0, \\ t^l \text{ con } l \geq 2 :&\quad (l+1)\,P_{l+1} - 2xl\,P_l + (l-1)\,P_{l-1} = xP_l - P_{l-1}. \end{aligned}$$

Nótese que la segunda relación es un caso particular de la tercera. También la primera relación sería un caso particular de la tercera si aceptamos la convención de considerar que $P_l(x) \equiv 0$ si $l < 0$. En este caso, las tres relaciones anteriores se pueden sintetizar en la tercera de ellas:

$$(l+1)\,P_{l+1} - 2xl\,P_l + (l-1)\,P_{l-1} = xP_l - P_{l-1}, \qquad l = 0, 1, 2, \cdots$$

o, equivalentemente,

$$(2l+1)\,x\,P_l(x) = (l+1)\,P_{l+1}(x) + l\,P_{l-1}(x), \qquad l = 0, 1, 2, \cdots \tag{2.65}$$

que es la relación de recurrencia buscada.

Relaciones de recurrencia sobre $\frac{d}{dx}P_l(x)$

Del mismo modo que en la sección anterior, partimos de la función generatriz (2.41) pero derivando ahora con respecto a x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= -\frac{1}{2}(1 - 2xt + t^2)^{-3/2}(-2t) \\ &= \frac{t}{1 - 2xt + t^2}G(x,t), \end{aligned}$$

es decir,

$$(1 - 2xt + t^2)\frac{\partial G}{\partial x} = t\,G(x,t). \tag{2.66}$$

De la definición de función generatriz se deduce que

$$G(x,t) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial x} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)t^l.$$

Sustituyendo este resultado en (2.66) se encuentra

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l' t^l - 2x\sum_{l=0}^{\infty} P_l' t^{l+1} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l' t^{l+2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l t^{l+1}.$$

Tal como procedimos anteriormente, hacemos cambios en los índices para que las sumas queden expresadas en potencias de t^l y de este modo poder igualar los coeficientes:

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l' t^l - 2x \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1}' t^l + \sum_{l=2}^{\infty} P_{l-2}' t^l = \sum_{l=1}^{\infty} P_{l-1} t^l .$$

Esta ecuación implica

$$P_l'(x) - 2x\, P_{l-1}'(x) + P_{l-2}'(x) = P_{l-1}(x) \tag{2.67}$$

para $l \geq 2$. Si consideramos que $P_l(x) \equiv 0$ si $l < 0$, entonces es fácil ver que es también válida para todo l. Esta es una de las relaciones de recurrencia (que involucran a la derivada) que satisfacen los polinomios de Legendre.

Es posible deducir otras muchas relaciones que involucran a $P_l'(x)$ a partir de (2.65) y (2.67). A continuación deducimos unas cuantas relaciones más usando una notación que debiera ser diáfana:

$$2\frac{d}{dx}(2.65) + (2l+1)(2.67) \Rightarrow P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) = (2l+1)\, P_l(x), \tag{2.68}$$

$$\frac{1}{2}[(2.67){+}(2.68)] \Rightarrow P_{l+1}'(x) = (l+1)\, P_l(x) + x\, P_l'(x), \tag{2.69}$$

$$\frac{1}{2}[(2.67){-}(2.68)] \Rightarrow P_{l-1}'(x) = -l\, P_l(x) + x\, P_l'(x), \tag{2.70}$$

$$(2.69)_{l\to l-1} + x(2.70) \Rightarrow (1-x^2)\, P_l'(x) = l\, P_{l-1}(x) - lx\, P_l(x), \tag{2.71}$$

$$\frac{d}{dx}(2.71) + l(2.70) \Rightarrow (1-x^2)\, P_l'(x) = (l+1)x\, P_l(x) - (l+1)\, P_{l+1}(x) \tag{2.72}$$

Derivado una vez (2.71) y usando (2.70) para eliminar $P_{l-1}'(x)$ redescubrimos que $P_l(x)$ satisface la ecuación de Legendre,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(1-x^2)\, P_l'(x)] &= l\, P_{l-1}'(x) - l\, P_l(x) - lx\, P_l'(x)\\ &= l\,[-l\, P_l(x) + x\, P_l'(x)] - l\, P_l(x) - lx\, P_l'(x)\\ &= -l(l+1)\, P_l(x)\end{aligned}$$

es decir,

$$(1-x^2)\, P_l''(x) - 2x\, P_l'(x) + l\,(l+1)\, P_l(x) = 0,$$

que es justamente la ecuación de Legendre tal como la escribimos en (2.20).

▷ ***Ejercicio** 2.6*

Obtendremos ahora la fórmula de Christoffel-Darboux para los polinomios de Legendre. Partimos de la fórmula general (2.15)*:*

$$(x-y)\sum_{n=0}^{m} \frac{P_n(x)\, P_n(y)}{\|P_n\|^2} = \frac{A_m}{\|P_m\|^2}[P_{m+1}(x)P_m(y) - P_m(x)\, P_{m+1}(y)].$$

Pero para los polinomios de Legendre se tiene [véanse las ecuaciones (2.43) *y* (2.59)*] que*

$$\|P_l\|^2 = \frac{2}{2l+1}, \qquad A_l = \frac{l+1}{2l+1},$$

con lo que sustituyendo estas relaciones en la fórmula general encontramos

$$(x-y)\sum_{m=0}^{l}(2m+1)\, P_m(x)\, P_m(y) = (l+1)\,[P_{l+1}(x)P_l(y) - P_l(x)P_{l+1}(y)] \tag{2.73}$$

que es la fórmula de Christoffel-Darboux para los polinomios de Legendre.

2.4. Funciones asociadas de Legendre

Las funciones asociadas de Legendre $P_l^m(x)$ pueden definirse como las soluciones de la ecuación de Sturm-Liouville

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,y' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right] y = 0, \quad -1 \le x \le 1, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{2.74}$$

que son regulares en $x = \pm 1$. En otras palabras, son las soluciones del problema Sturm-Liouville singular

$$\mathcal{L}\,P_l^m(x) = -\lambda_l P_l^m(x), \qquad \lambda_l \equiv l(l+1) \tag{2.75a}$$

con $p(x) = 1-x^2$, $q(x) = -m^2/(1-x^2)$, $r(x) = 1$ y condiciones de contorno

$$P_l^m(-1) = \text{finito}, \quad P_l^m(+1) = \text{finito}. \tag{2.75b}$$

Los autovalores λ_l vienen dados por

$$\lambda_l = l(l+1), \quad \text{donde } l = \text{entero y } |m| \le l. \tag{2.76}$$

Las autofunciones, $P_l^m(x)$, son las *funciones asociadas de Legendre de grado l y orden m*. Estas funciones P_l^m pueden expresarse mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x) \tag{2.77}$$

$$= \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (x^2-1)^l. \tag{2.78}$$

Esta relación se demostrará en la sección 2.4.1.

Observaciones:

- La relación (2.78) es válida para m negativos siempre que $l+m \ge 0$, es decir siempre que $l \ge -m$, lo cual, por (2.76), siempre se verifica.

- Si $m = 0$ entonces las funciones asociadas de Legendre son simplemente los polinomios de Legendre, $P_l^0(x) = P_l(x)$.

- La función asociada de Legendre $P_l^m(x)$ es un polinomio de grado l si m es par, pues

  $$\text{grado}[(x^2-1)^l] = 2l$$

  por lo que

  $$\text{grado}\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (x^2-1)^l\right] = 2l - (l+m) = l-m$$

  y por tanto

  $$\text{grado}\,[P_l^m(x)] = \text{grado}\left[(1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m} (x^2-1)^l\right] = m + (l-m) = l.$$

2.4.1. Demostración de la fórmula de Rodrigues

Vamos a comprobar ahora que la función dada por la fórmula de Rodrigues (2.77) es solución de la ecuación asociada de Legendre (2.74). Por simplicidad en la notación escribiremos la fórmula de Rodrigues así:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} D^m P_l(x) \equiv (1-x^2)^{m/2} u(x) \tag{2.79}$$

donde

$$D^n \equiv \frac{d^n}{dx^n}$$

y

$$u(x) \equiv D^m P_l(x).$$

Si sustituimos (2.79) en la ecuación asociada de Legendre (2.74) y tenemos en cuenta que

$$\begin{aligned} DP_l^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\left(-\frac{mx}{1-x^2}\,u + u'\right), \\ D^2P_l^m(x) &= (1-x^2)^{m/2}\left[u'' - \frac{2mx}{1-x^2}\,u' + \frac{m(m-1)x^2 - m}{(1-x^2)^2}\,u\right], \end{aligned}$$

encontramos que $u(x)$ ha de satisfacer la ecuación

$$(1-x^2)u'' - 2(m+1)xu' + [l(l+1) - m(m+1)] = 0. \tag{2.80}$$

Por tanto, *la fórmula de Rodrigues* (2.79) *será verdadera si la función* $u(x) = D^m P_l(x)$ *satisface la ecuación* (2.80). Vamos a comprobar que esto es lo que efectivamente ocurre derivando m veces la ecuación de Legendre (2.20):

$$D^m\left[(1-x^2)\,P_l''(x)\right] - 2D^m\left[x\,P_l'(x)\right] + l(l+1)\,D^m P_l = 0. \tag{2.81}$$

Usando la regla (o fórmula) de Leibniz que nos proporciona la derivada de orden arbitrario de un producto de funciones,

$$D^n\left[f(x)\,g(x)\right] = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left[D^{n-j}f(x)\right]\left[D^j g(x)\right], \tag{2.82}$$

se deduce que

$$D^m\left[(1-x^2)P_l''(x)\right] = \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left[D^{m-j}(1-x^2)\right]\left[D^j P_l''\right].$$

Teniendo en cuenta que $D^{m-j}(1-x^2) = 0$ si $m-j \geq 3$, es decir, si $j \leq m-3$, se obtiene que

$$D^m\left[(1-x^2)P_l''(x)\right] = \sum_{j=m-2}^{m}\binom{m}{j}\left[D^{m-j}(1-x^2)\right]\left[D^j P_l''\right].$$

Por tanto

$$\begin{aligned} D^m\left[(1-x^2)P_l''(x)\right] &= \frac{m(m-1)}{2}D^2\left[(1-x^2)\right]D^{m-2}P_l'' \\ &\quad + mD\left[(1-x^2)\right]D^{m-1}P_l'' + (1-x^2)D^m P_l'' \\ &= -m(m-1)D^m P_l - 2mx\frac{d}{dx}D^m P_l + (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}D^m P_l \\ &= -m(m-1)u - 2mxu' + (1-x^2)u''. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Procediendo de igual modo se obtiene que

$$\begin{aligned}
D^m\left[xP_l'(x)\right] &= \sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left[D^{m-j}\,x\right]\left[D^jP_l'\right]\\
&= \sum_{\mathbf{j=m-1}}^{m}\binom{m}{j}\left[D^{m-j}\,x\right]\left[D^jP_l'\right]\\
&= mD^{m-1}P_l' + xD^mP_l'\\
&= mD^mP_l + x\frac{d}{dx}D^mP_l\\
&= mu + xu'. \qquad (2.84)
\end{aligned}$$

Insertando (2.83) y (2.84) en (2.81) es fácil comprobar que $u(x)$ verifica la ecuación (2.80). Esto es justamente lo que queríamos demostrar.

Por ultimo, debe notarse que las funciones $P_l^m(x)$ definidas por la ecuación (2.79) satisfacen las condiciones de contorno (2.75b) dado que los polinomios de Legendre $P_l(x)$ son funciones continuas. Esto significa que las funciones $P_l^m(x)$ definidas por la fórmula de Rodrigues son autofunciones del problema de Sturm-Liouville (2.75) dado que satisfacen la ecuación de Sturm-Liouville (2.75a) y las condiciones de contorno (2.75b).

2.4.2. Relación de proporcionalidad de las funciones asociadas de Legendre

Las funciones asociadas de Legendre cumplen la siguiente relación de proporcionalidad

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(x). \qquad (2.85)$$

Para demostrarlo emplearemos la representación diferencial (2.78) de las funciones asociadas de Legendre y haremos uso de la regla de Leibniz para evaluar las derivadas de orden $l+m$ y $l-m$ que aparecen en la relación (2.78).

Para concretar, vamos a suponer que m no es negativo: $m \geq 0$. Evaluaremos primero $D^{l+m}(x^2-1)^l$ y después $D^{l-m}(x^2-1)^l$ para hallar la relación que liga a los dos resultados y así inferir la relación que liga $P_l^m(x)$ y $P_l^{-m}(x)$.

- Empezaremos evaluando $D^{l+m}(x^2-1)^l$ aplicando la fórmula de Leibniz:

$$D^{l+m}(x^2-1)^l = \sum_{j=0}^{l+m}\binom{l+m}{j}\left[D^{l+m-j}(x+1)^l\right]\left[D^j(x-1)^l\right]. \qquad (2.86)$$

Es claro que

$$\begin{aligned}
D^{l+m-j}(x+1)^l &= 0 \quad \text{si} \quad l+m-j > l \Leftrightarrow j < m,\\
D^j(x-1)^l &= 0 \quad \text{si} \quad j > l,
\end{aligned}$$

y por tanto (nótese que los límites del sumatorio han cambiado)

$$\begin{aligned}
D^{l+m}(x^2-1)^l &= \sum_{j=m}^{l}\binom{l+m}{j}\left[D^{l+m-j}(x+1)^l\right]\left[D^j(x-1)^l\right]\\
&= \sum_{j=m}^{l}\frac{(l+m)!}{j!\,(l+m-j)!}\,\frac{l!(x+1)^{j-m}}{(j-m)!}\,\frac{l!(x-1)^{l-j}}{(l-j)!}. \qquad (2.87)
\end{aligned}$$

- Evaluemos ahora $D^{l-m}(x^2-1)^l$ para después relacionar el resultado con la expresión que acabamos de obtener en (2.87) para $D^{l+m}(x^2-1)^l$. Procediendo como en el caso anterior no es difícil ver que

$$\begin{aligned} D^{l-m}(x^2-1)^l &= \sum_{j=0}^{l-m} \binom{l-m}{j} \left[D^{l-m-j}(x+1)^l\right] \left[D^j(x-1)^l\right] \\ &= \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(l-m)!}{j!\,(l-m-j)!} \frac{l!(x+1)^{m+j}}{(m+j)!} \frac{l!(x-1)^{l-j}}{(l-j)!}. \end{aligned}$$

Vamos a intentar escribir esta expresión de modo que se parezca lo más posible a (2.87) para poder así ver claramente de qué modo se relacionan. Empezamos haciendo que el sumatorio anterior tenga los mismos límites que el de (2.87) mediante el cambio $j \to j+m$. Entonces $j=0 \to j=m$ y $j=l-m \to j=l$ y se tiene que

$$D^{l-m}(x^2-1)^l = \sum_{j=m}^{l} \frac{(l-m)!}{(j-m)!\,(l-j)!} \frac{l!(x+1)^{m+j-m}}{j!} \frac{l!(x-1)^{l-j+m}}{(l-k+m)!}$$

Sacando el factor $(x+1)^m(x-1)^m = (x^2-1)^m$ fuera del sumatorio, encontramos

$$D^{l-m}(x^2-1) = (x^2-1)^m \sum_{j=m}^{l} \frac{(l-m)!}{(j-m)!(l-j)!} \frac{l!(x+1)^{j-m}}{j!} \frac{l!(x-1)^{l-j}}{(l-j+m)!}. \tag{2.88}$$

Si comparamos (2.88) con (2.87) podemos ver que son muy parecidas pues ambas expresiones contienen el término

$$\frac{1}{j!\,(l+m-j)!} \frac{l!}{(j-m)!}(x+1)^{j-m} \frac{l!}{(l-j)!}(x-1)^{l-j}$$

dentro del sumatorio. Sin embargo, en (2.87) este término va multiplicado por $(l+m)!$ mientras que en (2.88) va multiplicado por $(l-m)!$ Es por tanto evidente que

$$\begin{aligned} D^{l-m}(x^2-1) &= (x^2-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} D^{l+m}(x^2-1)^l \\ &= (-1)^m(1-x^2)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} D^{l+m}(x^2-1)^l. \end{aligned}$$

Usando este resultado en la definición (2.78) de $P_l^m(x)$,

$$P_l^{-m}(x) = \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^l l!} D^{l-m}(x^2-1)^l,$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} P_l^{-m}(x) &= \frac{(1-x^2)^{-m/2}}{2^l l!}(-1)^m(1-x^2)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} D^{l+m}(x^2-1)^l \\ &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} D^{l+m}(x^2-1)^l \\ &= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x), \end{aligned}$$

que es justamente la relación (2.85) que queríamos demostrar.

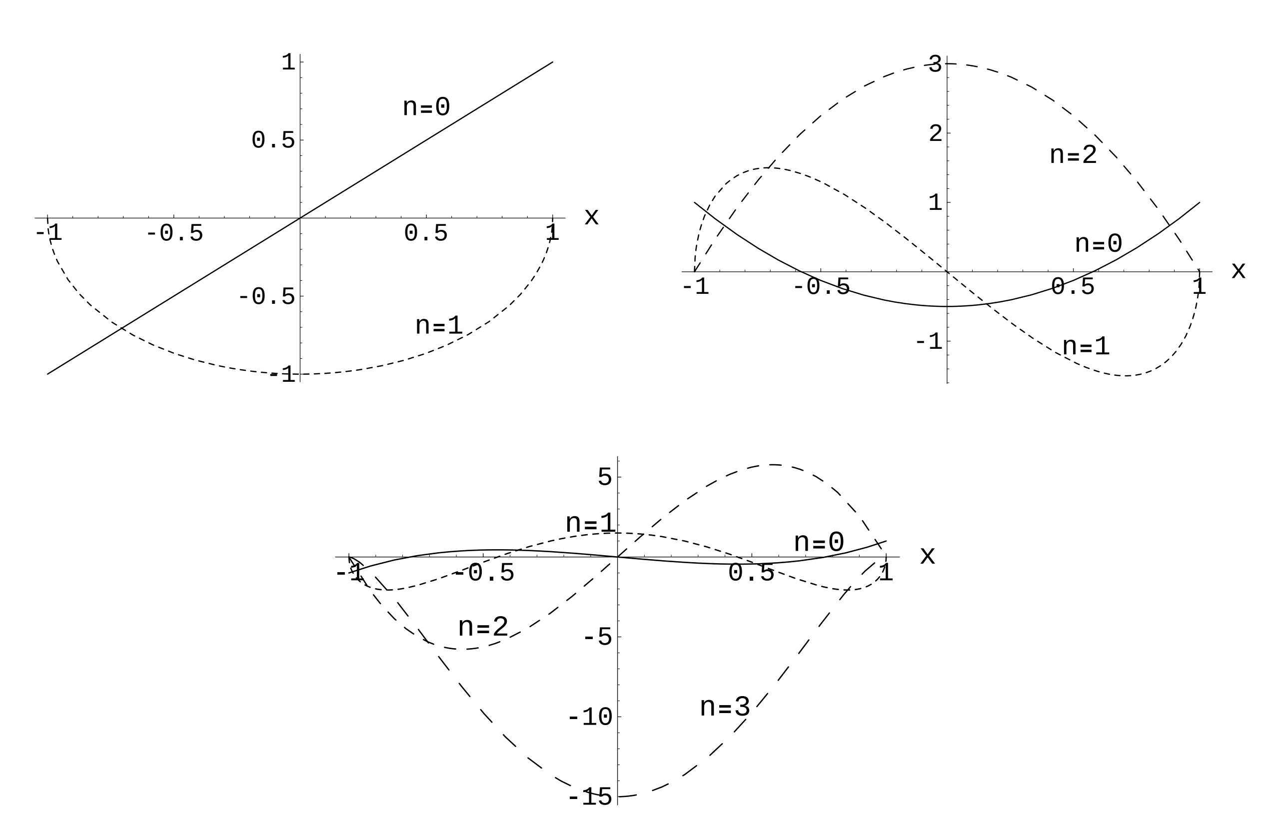


Figura 2.6: Primeras funciones asociadas de Legendre. Figura superior izquierda: P_1^n con $n = 0, 1$; figura superior derecha: P_2^n con $n = 0, 1, 2$; figura inferior: P_3^n con $n = 0, 1, 2, 3$.

2.4.3. Primeras funciones asociadas de Legendre

Es muy habitual utilizar funciones asociadas de Legendre en las que su variable independiente recorre el intervalo $0 \le \theta \le \pi$ tras realizarse el cambio de variable $x \equiv \cos\theta$. A continuación damos las primeras funciones de Legendre usando las dos variables:

$$
\begin{aligned}
P_1^1 &= (1 - x^2)^{1/2} = \operatorname{sen}\theta, \\
P_2^1 &= 3x(1 - x^2)^{1/2} = 3\cos\theta \operatorname{sen}\theta, \\
P_2^2 &= 3(1 - x^2) = 3\operatorname{sen}^2\theta, \\
P_3^1 &= \frac{3}{2}(5x^2 - 1)(1 - x^2)^{1/2} = \frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\operatorname{sen}\theta, \\
P_3^2 &= 15x(1 - x^2) = 15\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta, \\
P_3^3 &= 15(1 - x^2)^{3/2} = 15\operatorname{sen}^3\theta.
\end{aligned}
$$

2.4.4. Ortogonalidad, norma y simetría

Relación de ortogonalidad

Las funciones asociadas de Legendre tienen la siguiente propiedad de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \|P_l^m\|^2 \delta_{l,l'}, \tag{2.89}$$

donde el orden de m ha de ser el mismo en las dos funciones asociadas de Legendre para que sean autofunciones del mismo operador de Sturm-Liouville.

Norma de las funciones asociadas de Legendre

La norma de $P_l^m(x)$ viene dada por

$$\|P_l^m\|^2 = \frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \tag{2.90}$$

Vamos a demostrarlo. Empezaremos calculando $\|P_l^m\|^2$ para $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}\|P_l^m\|^2 &= \int_{-1}^{1} dx\, P_l^m(x)P_l^m(x)\\ &= \int_{-1}^{1} dx\,(1-x^2)^m\big[D^m P_l(x)\big]\,\big[D^m P_l(x)\big]\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha hecho uso de la relación (2.77). A continuación integramos por partes[9]:

$$\|P_l^m\|^2 = \Big[(1-x^2)\big[D^m P_l(x)\big]\,\big[D^{m-1}P_l(x)\big]\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} dx\,\left[D^{m-1}P_l(x)\frac{d}{dx}\right]\big[(1-x^2)^m D^m P_l(x)\big].$$

El término de contorno es nulo pues el factor $(1-x^2)$ es nulo en $x \pm 1$. Repitiendo este proceso otras $m-1$ veces (es decir, integrando por partes de igual modo $m-1$ veces más) se obtiene

$$\begin{aligned}\|P_l^m\|^2 &= (-1)^m \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, D^m\big[(1-x^2)^m D^m P_l(x)\big]\\ &\equiv (-1)^m \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, Q_l(x).\end{aligned} \tag{2.91}$$

Es fácil darse cuenta que el término

$$Q_l(x) = D^m\big[(1-x^2)^m D^m P_l(x)\big] \tag{2.92}$$

es un polinomio de grado l ya que:

$P_l(x)$	es polinomio de grado l,
$D^m P_l(x)$	es polinomio de grado $l-m$,
$(1-x^2)D^m P_l(x)$	es polinomio de grado $(l-m)+2m$,
$D^m\big[(1-x^2)^m D^m P_l(x)\big]$	es polinomio de grado $(l-m)+2m-m=l$.

Dado que $Q_l(x)$ es un polinomio de grado l podemos escribirlo como un desarrollo en términos de los primeros $l+1$ polinomios de Legendre:

$$Q_l(x) = \sum_{j=0}^{l} q_j P_j(x), \qquad q_j = \frac{\langle P_j|Q_l\rangle}{\|P_l\|^2},$$

y por tanto podemos reescribir (2.91) como

$$\|P_l^m\|^2 = (-1)^m \sum_{j=0}^{l} q_j \int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)P_j(x). \tag{2.93}$$

[9] Usamos el cambio $u = (1-x^2)^m D^m P_l(x)$ y $dv = D^m P_l(x)\,dx$

Dado que $\langle P_j|P_i\rangle = \|P_j\|^2\delta_{ij}$, se tiene que

$$\|P_l^m\|^2 = (-1)^m\|P_l\|^2 q_l = (-1)^m \frac{2}{2l+1}\, q_l \,. \tag{2.94}$$

Vamos a calcular q_l. Sabemos que

$$\begin{aligned} P_l(x) &= a_l^{(l)} x^l + \sum \text{monomios con grado inferior a } l \\ &= a_l^{(l)} x^l + \cdots \end{aligned}$$

En lo que sigue, los puntos $\cdots$ representan monomios de grado inferior al término que se da explícitamente y cuyos valores no tienen importancia en la demostración. De este modo, escribiremos

$$Q_l(x) = q_l a_l^{(l)} x^l + \cdots \tag{2.95}$$

Evaluamos ahora el término (monomio) de mayor grado de $Q_l(x)$ a partir de su definición (2.92):

$$\begin{aligned} D^m P_l(x) &= D^m\big[a_l^{(l)} x^l + \cdots\big] \\ &= a_l^{(l)} D^m x^l + \cdots \\ &= a_l^{(l)} \frac{l!}{(l-m)!} x^{l-m} + \cdots \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} (1-x^2)^m D^m P_l(x) &= (-1)^m (x^2+\cdots)^m D^m P_l(x) \\ &= (-1)^m a_l^{(l)} \frac{l!}{(l-m)!} x^{l+m} + \cdots \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Q_l(x) = D^m\big[(1-x^2)^m D^m P_l(x)\big] &= (-1)^m a_l^{(l)} \frac{l!}{(l-m)!} \frac{(l+m)!}{l!} x^l + \cdots \\ &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} a_l^{(l)} x^l + \cdots \end{aligned}$$

Comparando con (2.95) vemos que

$$q_l = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \tag{2.96}$$

Insertando este resultado en (2.94) se tiene

$$\|P_l^m\|^2 = (-1)^m \frac{2}{2l+1} (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!},$$

es decir,

$$\|P_l^m\|^2 = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \tag{2.97}$$

La norma de $P_l^{-m}(x)$ podemos calcularla haciendo uso de (2.85):

$$\begin{aligned} \|P_l^{-m}\|^2 &= \left[(-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^2 \|P_l^m(x)\|^2 \\ &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Simetría

Las funciones asociadas de Legendre tienen una paridad determinada por la suma de los índices l y m. Vamos a verlo haciendo uso de (2.78) con la variable $-x$:

$$P_l^m(-x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!} \left(\frac{d}{d(-x)} \right)^{l+m} (x^2-1)^l. \tag{2.99}$$

Pero

$$\left(\frac{d}{d(-x)} \right)^{l+m} = \left(\frac{dx}{d(-x)} \frac{d}{dx} \right)^{l+m} = (-1)^{l+m} \left(\frac{d}{dx} \right)^{l+m}.$$

Luego insertando esta relación en (2.99) y teniendo en cuenta (2.78), se deduce que

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x). \tag{2.100}$$

2.4.5. Desarrollo en serie de funciones asociadas de Legendre

Sea $\varphi(x)$ una función de cuadrado sumable en el intervalo $I = [-1, 1]$, es decir, $\varphi \in L_I^2$. Entonces, en el sentido de la convergencia en media cuadrática, se verifica que

$$\varphi(x) = \sum_{l=|m|}^{\infty} c_l P_l^m, \qquad c_l = \frac{\langle P_l^m | \varphi \rangle}{\| P_l^m \|^2}, \tag{2.101}$$

para m entero arbitrario. Usando (2.98), se tiene que

$$c_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^{1} dx \, P_l^m(x) \varphi(x).$$

2.4.6. Relaciones de recurrencia

Debido a que las funciones asociadas de Legendre poseen dos índices, el orden m y el grado l, existe una gran variedad de relaciones de recurrencia. Damos a continuación unas cuantas.[10]

Relaciones de recurrencia sobre las funciones asociadas de Legendre:

- De mismo orden y distinto grado:

$$(2l+1) \, x \, P_l^m(x) = (l+m) \, P_{l-1}^m(x) + (l-m+1) \, P_{l+1}^m(x). \tag{2.102}$$

- De mismo grado y distinto orden:

$$P_l^{m+1}(x) - \frac{2m \, x}{(1-x^2)^{1/2}} \, P_l^m(x) + [l \, (l+1) - m \, (m-1)] \, P_l^{m-1}(x) = 0. \tag{2.103}$$

Relaciones de recurrencia sobre las derivadas de las funciones asociadas de Legendre:

- De mismo orden y distinto grado:

$$(1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} P_l^m(x) = l \, x \, P_l^m(x) - (l+m) \, P_{l-1}^m(x). \tag{2.104}$$

- De mismo grado y distinto orden:

$$(1-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} P_l^m(x) = \frac{1}{2} P_l^{m+1}(x) - \frac{1}{2} (l+m) \, (l-m+1) \, P_l^{m-1}(x). \tag{2.105}$$

[10] Pueden verse éstas y otras relaciones más, y, en algunos casos, sus demostraciones en [Arf85, AB74].

2.5. Armónicos esféricos

Las funciones conocidas como armónicos esféricos aparecen, por ejemplo, en la resolución de la ecuación de Schrödinger para potenciales centrales, $V(\vec{r}) = V(r)$, constituyendo la parte angular de las autofunciones (orbitales). Aquí las definiremos de un modo diferente.

Sea el problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2y}{d\varphi} + m^2 y = 0, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \tag{2.106}$$

con las condiciones de contorno periódicas

$$y(0) = y(2\pi), \tag{2.107}$$

$$y'(0) = y'(2\pi). \tag{2.108}$$

Este problema es de fácil resolución. Las autofunciones son

$$\psi_m(\varphi) = \mathrm{e}^{im\varphi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{2.109}$$

con autovalor asociado m^2. Existe degeneración pues ψ_m y ψ_{-m} tienen el mismo autovalor. La norma de estas autofunciones es

$$\|\psi_m\|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \mathrm{e}^{-im\varphi}\, \mathrm{e}^{im\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

Los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \varphi)$ se definen por la relación

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = N_{lm}\, \mathrm{e}^{im\varphi}\, P_l^m(\cos\theta), \tag{2.110}$$

donde $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y N_{lm} es una constante que se escoge de modo que la norma de Y_l^m,

$$\|Y_l^m\|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \Big[Y_l^m(\theta, \varphi)\Big]^* Y_l^m(\theta, \varphi), \tag{2.111}$$

sea igual a 1. Veamos qué valor ha de tomar N_{lm}. Insertando la definición (2.110) en (2.111) encontramos

$$\begin{aligned} \|Y_l^m\|^2 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, |N_{lm}|^2 \left[P_l^m(\cos\theta)\right]^2 \\ &= |N_{lm}|^2\, 2\pi\, \|P_l^m\|^2 \\ &= |N_{lm}|^2\, 2\pi \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \end{aligned}$$

Por tanto, la exigencia de que la norma de los armónicos esféricos sea igual a la unidad, $\|Y_l^m\| = 1$, requiere que

$$N_{lm} = \pm\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}.$$

¿Cuál de los dos signos escogemos? La elección es arbitraria. Muy habitualmente se escoge el signo negativo cuando m es impar y el positivo cuando m es par, es decir

$$N_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}. \tag{2.112}$$

A esta elección se la conoce elección de *fase de Condon-Shortley*.

En definitva, los armónicos esféricos se definen así:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; \mathrm{e}^{im\varphi}\, P_l^m(\cos\theta). \tag{2.113}$$

2.5.1. Ortonormalidad y propiedad de conjugación de los armónicos esféricos

Ortonormalidad

Los armónicos esféricos forman una familia ortonormal de funciones, como es fácil de comprobar usando las propiedades de ortogonalidad de las autofunciones $\psi_m(x) = \mathrm{e}^{im\varphi}$ y $P_l^m(\theta)$:

$$
\begin{aligned}
\langle Y_l^m | Y_{l'}^{m'} \rangle &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, N_{lm} N_{l'm'}\, \mathrm{e}^{-im\varphi}\, P_l^{m*}\, \mathrm{e}^{im'\varphi}\, P_{l'}^{m'}(\cos\theta) \\
&= N_{lm} N_{l'm'} \int_0^{2\pi} d\varphi\; \mathrm{e}^{i(m'-m)\varphi} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, P_l^m P_{l'}^{m'}(\cos\theta) \\
&= \delta_{m\,m'}\, \delta_{l\,l'}.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, el producto escalar $\langle Y_l^m | Y_{l'}^{m'} \rangle$ es 1 si $m = m'$ y $l = l'$; en cualquier otro caso es nulo.

Propiedad de conjugación

Los armónicos esféricos exhiben la siguiente propiedad bajo conjugación compleja:

$$
Y_l^{-m} = (-1)^m Y_l^{m*}.
$$

Esta relación es fácil de demostrar:

$$
\begin{aligned}
Y_l^{-m}(\varphi,\theta) &= (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\; \mathrm{e}^{-im\varphi} (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) \\
&= (-1)^m\,(-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; \mathrm{e}^{-im\varphi}\, P_l^m(\cos\theta) \\
&= (-1)^m Y_l^{m*}(\varphi,\theta).
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

2.5.2. Simetría de los armónicos esféricos

Si identificamos φ con el ángulo azimutal y θ con el ángulo polar de las coordenadas esféricas [véase la figura 2.7(a)], entonces $Y_l^m(\theta,\varphi)$, y en general cualquier función $F(\theta,\varphi)$, con $0 \le \varphi \le \pi$ y $0 \le \theta \le \pi$, podemos interpretarla como una función de la dirección en el espacio.

Los armónicos esféricos tienen la importante propiedad de que el valor de Y_l^m para una dirección dada es igual a $(-1)^l$ del armónico esférico Y_l^m evaluado en la dirección opuesta, es decir,

$$
Y_l^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) = (-1)^l\, Y_l^m(\theta,\varphi). \tag{2.115}
$$

Esta propiedad es clave para la justificación de la reglas de selección sobre el número cuántico orbital de las transiciones electrónicas permitidas en los átomos.[11] La demostración es simple. Por la definición (2.110) se tiene que

$$
\begin{aligned}
Y_l^m(\pi-\theta,\varphi+\pi) &= N_{lm}\, \mathrm{e}^{im(\varphi+\pi)}\, P_l^m\big(\cos(\pi-\theta)\big) \\
&= (-1)^m N_{lm}\, \mathrm{e}^{im\varphi}\, P_l^m\big(-\cos(\theta)\big)
\end{aligned}
$$

puesto que $\mathrm{e}^{im\pi} = (-1)^m$ por ser m entero. Haciendo uso de la relación (2.100) se encuentra

$$
\begin{aligned}
Y_l^m(\pi-\theta,\varphi+\pi) &= (-1)^m (-1)^{l+m} N_{lm}\, \mathrm{e}^{im\varphi}\, P_l^m(\cos\theta) \\
&= (-1)^l\, Y_l^m(\theta,\varphi),
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

tal y como queríamos demostrar.

[11]Véase, por ejemplo, la sección 8.7 de "Física Cuántica", R. Eisberg y R. Resnick (Limusa, México, 1979).

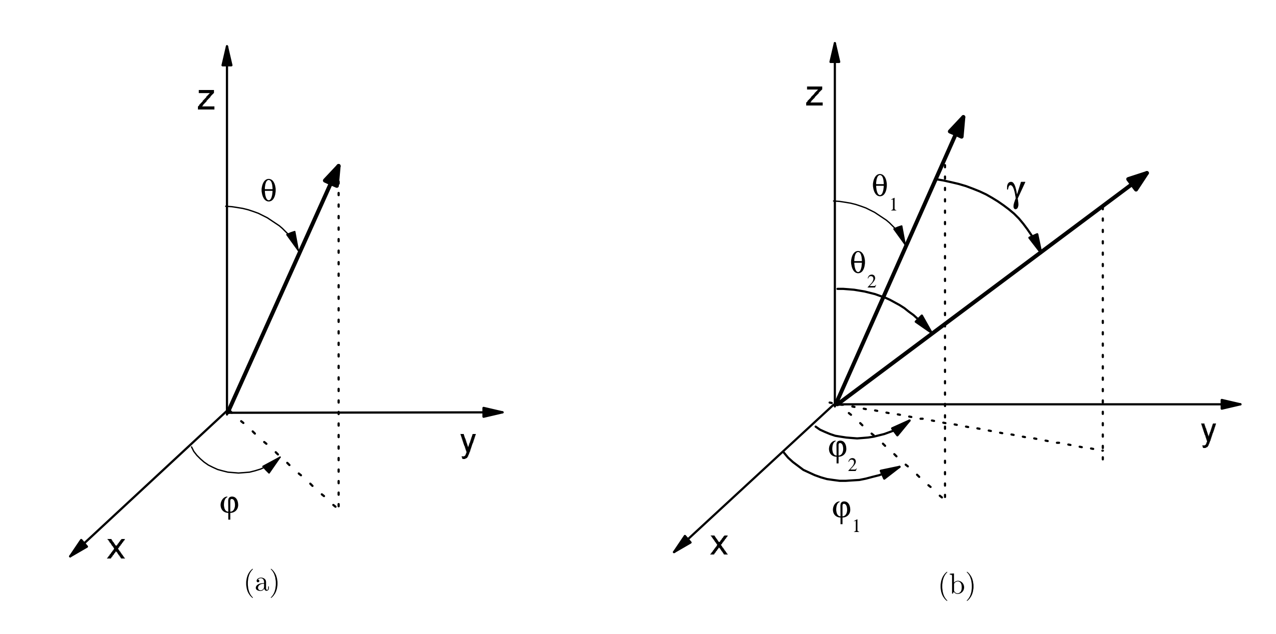


Figura 2.7: (a) El ángulo polar θ y azimutal φ describen una dirección (con sentido) en el espacio. (b) Ilustración del teorema de la adición: γ es el ángulo subtendido por las dos direcciones descritas por los ángulos (θ_1, φ_1) y (θ_2, φ_2).

2.5.3. Primeros armónicos esféricos

Estos son los primeros nueve armónicos esféricos con la fase de Condon-Shortley:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \tag{2.117}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \tag{2.118}$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\mathrm{sen}\,\theta\;\mathrm{e}^{\pm i\varphi}, \tag{2.119}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right), \tag{2.120}$$

$$Y_2^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{5}{24\pi}}\,3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\;\mathrm{e}^{\pm i\varphi}, \tag{2.121}$$

$$Y_2^{\pm 2} = \sqrt{\frac{5}{96\pi}}\,3\,\mathrm{sen}^2\,\theta\;\mathrm{e}^{\pm i2\varphi}\,. \tag{2.122}$$

2.5.4. Desarrollo en serie de los armónicos esféricos

Teorema 2.4 *Los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta,\varphi)$ constituyen una base ortonormal del espacio de funciones de cuadrado sumable definidas sobre la superficie de una esfera, o en otros términos, funciones de cuadrado sumable cuyas variables son los ángulos azimutal y polar de las coordenadas esféricas.*

Esto significa que podemos escribir

$$F(\theta,\varphi) = \sum_{l,m=0}^{\infty} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi) \qquad \text{con} \quad c_{lm} = \langle Y_l^m | F\rangle. \tag{2.123}$$

Como $|m| \le l$ [recuérdese la relación (2.76), página 99, de los polinomios de Legendre], se tiene que

$$F(\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} c_{lm} Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{2.124}$$

con

$$c_{lm} = \langle Y_l^m | F \rangle = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, Y_l^m(\theta,\varphi)\, F(\theta,\varphi). \tag{2.125}$$

No hemos presentado a Y_l^m como autofunciones de un operador de Sturm-Liouville (entre otras cosas porque sólo hemos estudiado problemas de Sturm-Liouville sobre una variable independiente) por lo que para demostrar este teorema no acudiremos a la teoría de Sturm-Liouville tal como hemos ido haciendo hasta ahora. Sin embargo podemos justificar este teorema interpretando o "viendo" $F(\theta,\varphi)$ como una función que depende de la variable φ y del "parámetro" θ. Entonces podemos desarrollar $F(\theta,\varphi)$ primero en serie de Fourier sobre la variable φ:

$$F(\theta,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(\cos\theta)\ \mathrm{e}^{im\varphi}, \tag{2.126}$$

donde los coeficientes de Fourier a_m dependen del "parámetro" θ. Pero ahora "vemos" $a_m(\cos\theta)$ como funciones de θ de modo que podemos expresarlas como serie de funciones asociadas de Legendre

$$a_m(\cos\theta) = \sum_{l=|m|}^{\infty} A_{lm} P_l^m(\cos\theta).$$

Insertando esta relación en la ecuación (2.126) encontramos que

$$\begin{aligned} F(\theta,\varphi) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=|m|}^{\infty} A_{lm}\, \mathrm{e}^{im\varphi}\, P_l^m(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{A_{lm}}{N_{lm}} N_{lm}\, \mathrm{e}^{im\varphi}\, P_l^m(\cos\theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{A_{lm}}{N_{lm}}\, Y_l^m(\theta,\varphi), \end{aligned}$$

de acuerdo con la ecuación (2.124).

2.5.5. Teorema de la adición

Este es un teorema muy útil que no demostraremos aquí.[12]

Teorema 2.5 *Sean dos direcciones en el espacio definidas por (θ_1,φ_1) y (θ_2,φ_2) y sea γ el ángulo subtendido entre estas dos direcciones (véase la figura 2.7(b)). Entonces*

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} [Y_l^m(\theta_1,\varphi_1)]^*\ Y_l^m(\theta_2,\varphi_2). \tag{2.127}$$

[12] Puede encontrarse la demostración en la sección 12.8 de [Arf85] o en la sección 9.8 de [AB74].

► *Ejemplo 2.5*

En Mecánica Cuántica y en Electromagnetismo es a menudo conveniente expresar el potencial eléctrico $V(r_{12})$ entre dos cargas puntuales situadas en $\vec{r}_2$ y $\vec{r}_1$ con $r_{12} \equiv |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ en la forma de un desarrollo de armónicos esféricos (por ejemplo, para calcular la energía media de una configuración electrónica de un átomo multielectrónico mediante perturbaciones[13]). Vamos a hallar esta expresión en este ejemplo. Como $V(r_{12}) \propto 1/r_{12}$, basta con desarrollar $1/r_{12}$ en armónicos esféricos. Por concretar, vamos a suponer en lo que sigue que $r_2 \equiv |\vec{r}_2|$ es mayor que $r_1 \equiv |\vec{r}_1|$. En este caso:

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{[\vec{r}_{12} \cdot \vec{r}_{12}]^{1/2}} = \frac{1}{[r_2^2 + r_1^2 - 2r_1 r_2 \cos(\gamma)]^{1/2}} = \frac{r_2^{-1}}{[1 + (r_1/r_2)^2 - 2(r_1/r_2)\cos(\gamma)]^{1/2}}.$$

Por tanto, empleando la definición (2.41) de la función generatriz de los polinomios de Legendre se encuentra que

$$\frac{1}{r_{12}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}} P_l(\cos\gamma).$$

Usando ahora la expresión (2.127) del teorema de adición podemos expresar el potencial eléctrico $V(r_{12})$ entre dos cargas puntuales como serie de armónicos esféricos:

$$V(r_{12}) \propto \frac{1}{r_{12}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_1^l}{r_2^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\theta_1, \varphi_1)\, Y_l^m(\theta_2, \varphi_2).$$

◄

2.6. Polinomios de Hermite

2.6.1. Oscilador armónico en Mecánica Cuántica. Ecuación de Hermite

Los polinomios de Hermite surgen en la resolución del problema del oscilador armónico unidimensional en Mecánica Cuántica. La ecuación de Schrödinger para una partícula de masa m sujeta al potencial armónico unidimensional

$$V(y) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

es

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dy^2} + V(y)\Psi = \mathcal{E}\Psi$$

siendo $\mathcal{E}$ la energía total del oscilador. Haciendo el cambio

$$x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, y$$

la ecuación de Schrödinger del oscilador armónico unidimensional se reduce a

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (E - x^2)\,\Psi = 0 \tag{2.128}$$

donde

$$E = \frac{2\mathcal{E}}{\hbar\omega}. \tag{2.129}$$

[13] Véase, por ejemplo, el capítulo 3 de "Introducción a la teoría del átomo", de C. Sánchez del Río, Ed. Alhambra, Madrid, 1977.

Las soluciones físicamente aceptables de (2.128) deben satisfacer la condición

$$\lim_{|x|\to\infty} \Psi(x) = 0 \tag{2.130}$$

dado que $\Psi(x)$ ha de estar normalizada, es decir, dado que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2\, dx$ ha de ser finita. Para $|x| \gg 1$ la ecuación (2.128) es aproximadamente

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} \simeq x^2\, \Psi$$

lo que implica que

$$\Psi(x) \sim \mathrm{e}^{\pm x^2/2}, \qquad |x| \gg 1. \tag{2.131}$$

Esto se puede justificar fácilmente derivando dos veces $\psi(x) \sim \mathrm{e}^{\pm x^2/2}$ y comprobando que la ecuación $d^2\Psi/dx^2 \simeq x^2\Psi$ se satisface cuando $|x| \to \infty$. La solución que es físicamente aceptable según (2.130) es la de exponente negativo: $\Psi(x) \sim \mathrm{e}^{-x^2/2}$. El resultado (2.131) sugiere expresar la solución $\Psi(x)$ de este modo:

$$\Psi(x) = y(x)\, \mathrm{e}^{-x^2/2}, \tag{2.132}$$

donde $y(x)$ debe ser *subdominante* con respecto a $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ cuando $x^2 \to \infty$, es decir, debe ocurrir que

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{y(x)} = 0.$$

El procedimiento que acabamos de exponer para llegar a la expresión (2.132) se conoce como *factorización en el infinito.*[14]

Vamos a buscar la ecuación que debe satisfacer $y(x)$. Para ello calculamos la primera y segunda derivada de $\Psi(x)$:

$$\begin{aligned}
\Psi'(x) &= \mathrm{e}^{-x^2/2}(-xy + y') \\
\Psi''(x) &= \mathrm{e}^{-x^2/2}(x^2y - xy' - y - xy' + y'') \\
&= \mathrm{e}^{-x^2/2}(x^2y - 2xy' - y + y'').
\end{aligned}$$

Por tanto la ecuación (2.128) se reduce a

$$\mathrm{e}^{-x^2/2}(x^2y - 2x\,y' - y + y'') + (E - x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\, y = 0,$$

luego

$$y'' - 2x\,y' + x^2y - y + Ey - x^2y = 0,$$

es decir

$$y'' - 2x\,y' + 2n\,y = 0, \tag{2.133}$$

donde $2n \equiv E - 1$. Esta ecuación es la *ecuación de Hermite.*

[14] El nombre está bien escogido, ¿verdad?

2.6.2. Resolución de la ecuación de Hermite mediante serie de potencias

El punto $x=0$ es regular y el radio de convergencia es infinito pues no hay puntos singulares, por tanto la solución en serie de potencias de la ecuación de Hermite puede escribirse así:[15]

$$y(x)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.133) llegamos a

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)\,c_m x^{m-2}-\sum_{m=0}^{\infty} 2m\,c_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty} 2n\,c_m x^m=0.$$

Expresamos todos los sumatorios en potencias de x^m mediante cambio de índices.[16] Sólo hemos de cambiar el primer sumatorio, que ahora está en potencias de x^{m-2}. Llevando a cabo el cambio $m\to m+2$ en el primer sumatorio obtenemos

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+2)(m+1)\,c_{m+2}x^m-\sum_{m=0}^{\infty} 2m\,c_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty} 2n\,c_m x^m=0.$$

Ahora podemos igualar coeficiente a coeficiente para obtener

$$(m+2)(m+1)\,c_{m+2}-2(m-n)\,c_m=0.$$

De esta expresión extraemos la relación de recurrencia

$$\frac{c_{m+2}}{c_m}=\frac{-2(n-m)}{(m+2)(m+1)}\,,\qquad m=0,1,2,3,\ldots \tag{2.134}$$

relación que permite hallar los coeficientes c_m a partir de c_0 y c_1 (que son arbitrarios). Por tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} y(x)&=c_0\left[1-2\frac{n}{2!}x^2+2^2\frac{n(n-2)}{4!}x^4-2^3\frac{n(n-2)(n-4)}{6!}x^6+\cdots\right]\\ &\quad+c_1\left[x-2\frac{n-1}{3!}x^3+2^2\frac{(n-1)(n-3)}{5!}x^5-2^3\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{7!}x^7+\cdots\right] \\ &=c_0\,y_1(x)+c_1\,y_2(x). \end{aligned} \tag{2.135}$$

Veamos si $y(x)$ es subdominante con respecto a $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ para $x^2\to\infty$. Para ello hemos de saber cómo se comporta $y(x)$ en esta región. Este comportamiento viene determinado por el comportamiento de c_m para m grandes, comportamiento que, por (2.134), es

$$\frac{c_{m+2}}{c_m}\simeq\frac{2}{m}\qquad\text{para}\qquad m\gg 1. \tag{2.136}$$

¿Conocemos alguna función cuyo desarrollo para m grandes satisfaga (2.136)? La respuesta es e^{x^2}, como es fácil de comprobar:

$$\mathrm{e}^{x^2}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots=\sum_{\substack{m=0\\ \text{m=par}}}^{\infty}\frac{x^m}{\left(\frac{m}{2}\right)!}.$$

[15]Puede encontrarse una discusión detallada de la técnica de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante series de potencias en, por ejemplo, [Arf85, BP92, Sim93].

[16]Este es el mismo procedimiento que empleamos, por ejemplo, para hallar las relaciones de recurrencia de las funciones de Legendre en la página 96.

Por tanto

$$c_m = \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)!} \to \frac{c_{m+2}}{c_m} = \frac{\left(\frac{m}{2}\right)!}{\left(\frac{m}{2}+1\right)!} = \frac{1}{\frac{m}{2}+1},$$

y para $m \gg 1$ se verifica que $\frac{c_{m+2}}{c_m} \simeq \frac{2}{m}$. Por consiguiente $y(x) \sim \mathrm{e}^{x^2}$ para $x^2 \to \infty$. Si sustituimos esto en (2.132) tenemos que

$$\Psi(x) \sim \mathrm{e}^{x^2/2} \to \infty, \qquad |x^2| \to \infty.$$

¡Pero esto no es físicamente aceptable puesto que no se satisface la condición (2.130)! Concluimos que, para que $\Psi(x)$ sea aceptable, $y(x)$ no se puede comportar como e^{x^2} para $x^2 \to \infty$. Esto sólo puede darse si n *es entero*, pues en este caso una de las soluciones particulares de (2.135), $y_1(x)$ o $y_2(x)$, se trunca cuando $m = n$ puesto que, por (2.134), si $m = n$ entonces $c_{n+2} = c_{n+4} = \cdots = 0$. En este caso se tiene que:

- Si n es par entonces la solución $y_1(x)$ es polinomio de grado n y

$$\Psi_1(x) = y_1(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

  es una solución matemática físicamente aceptable.

- Si n es impar, $y_2(x)$ es polinomio de grado n y

$$\Psi_2(x) = y_2(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

  es solución físicamente aceptable.

Nótese que la condición $m = n =$ entero implica la cuantización de la energía: $E_n = 1 + 2n$ con n entero ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) que, por la ecuación (2.129), es lo mismo que decir que la energía total $\mathcal{E}$ del oscilador armónico sólo puede tomar los valores

$$\mathcal{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega.$$

Los polinomios $y_1(x)$ e $y_2(x)$, normalizados de modo que $c_n = 2^n$ (donde c_n es el coeficiente de x^n del polinomio de grado n) son justamente los polinomios de Hermite $H_n(x)$:

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{n!}{(n-2m)!\,m!}\,(2x)^{n-2m}. \tag{2.137}$$

▷ ***Ejercicio** 2.7*

Comprueba que la expresión (2.137) *y la que se deduce de la ecuación* (2.135) *coinciden si se exige que* $c_n = 2^n$.

2.6.3. Definición de los polinomios de Hermite como soluciones de un problema de Sturm-Liouville

En la sección anterior hemos presentado la ecuación de Hermite y los polinomios de Hermite partiendo del problema del oscilador armónico en Mecánica Cuántica. En esta sección vamos a retornar a nuestro procedimiento más habitual en el que definimos las funciones especiales como soluciones (autofunciones) de problemas de Sturm-Liouville.

Los polinomios de Hermite son las autofunciones del problema de Sturm-Liouville singular constituido por la ecuación de Hermite

$$\boxed{y''(x) - 2x\, y'(x) + 2n\, y(x) = 0}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2.138}$$

junto con las condiciones de contorno (singulares)

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{y(x)}{x^N} \to 0 \quad \text{para todo } N \text{ finito}, \tag{2.139}$$

es decir, se exige que la solución $y(x)$ buscada no vaya hacia infinito cuando $|x| \to \infty$ más rápidamente que cualquier potencia finita de x. Esta ecuación no está escrita en la forma estándar de una ecuación de Sturm-Liouville que, como sabemos, es

$$p(x)\, y''(x) + p'(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) + \lambda r(x)\, y(x) = 0$$

o bien

$$y''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)}\, y'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}\, y(x) + \lambda \frac{r(x)}{p(x)}\, y(x) = 0.$$

Comparando esta última ecuación con (2.138) tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{p'(x)}{p(x)} &= -2x \Rightarrow \ln p(x) = -x^2 \Rightarrow p(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \\
q(x) &= 0, \\
\lambda \frac{r(x)}{p(x)} &= 2n \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2n, \\ r(x) = p(x) = \mathrm{e}^{-x^2}, \end{cases}
\end{aligned}$$

de forma que la ecuación de Hermite en la forma de ecuación de Sturm-Liouville es

$$\mathrm{e}^{-x^2}\, y''(x) - 2x\ \mathrm{e}^{-x^2}\, x\, y'(x) + \mathrm{e}^{-x^2}\, \lambda\, y(x) = 0\,, \quad \lambda = 2n. \tag{2.140}$$

Como hemos visto en la sección anterior, el único modo de que las soluciones de la ecuación (2.138) o (2.140) satisfagan las condiciones de contorno (2.139) es si $\lambda = 2n$ con $n = 0, 1, 2, \ldots$. Cuando esta condición se verifica, las soluciones son justamente los polinomios de Hermite $H_n(x)$. Dicho de otro modo, $\lambda = 2n$ son los autovalores del problema de Sturm-Liouville y los polinomios de Hermite $H_n(x)$ son las autofunciones correspondientes.

La constante multiplicativa arbitraria de la solución de la ecuación de Hermite (que es lineal y homogénea, como toda ecuación de Sturm-Liouville) se fija exigiendo la condición de estandarización:

$$c_n^{(n)} = 2^n$$

donde $c_n^{(n)}$ es el coeficiente del término de mayor grado del polinomio de Hermite de grado n: $H_n(x) = 2^n x^n + c_n^{(n-1)} x^{n-1} + \cdots$ El polinomio de Hermite de grado n es

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!\, k!} (2x)^{n-2k}. \tag{2.141}$$

2.6.4. Función generatriz

La función generatriz de los polinomios de Hermite se define del siguiente modo:

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}\, t^n \tag{2.142a}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{1}{k!\,(n-2k)!}\, t^n (2x)^{n-2k}. \tag{2.142b}$$

Nuestro objetivo en lo que sigue es sumar (2.142b) para expresar $G(x,t)$ de un modo más compacto. Para aligerar la escritura en las manipulaciones que llevaremos a cabo dentro de un momento vamos a usar la notación

$$(n, n-2k) \equiv (-1)^k \frac{1}{k!\,(n-2k)!}\, t^n (2x)^{n-2k},$$

de modo que el símbolo (i,j) es el modo abreviado de escribir

$$(i,j) \equiv (-1)^{\frac{i-j}{2}} \frac{1}{\left(\frac{i-j}{2}\right)!\, j!}\, t^i (2x)^j,$$

lo cual se puede comprobar fácilmente sin más que hacer $i = n$ y $j = n-2k = i-2k$. Usando este símbolo, la expresión (2.142b) se convierte en

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} (n, n-2k). \tag{2.143}$$

Vamos a reordenar la suma (2.143) fijándonos en la tabla 2.3. Podemos ver que la suma de (2.143) se lleva a cabo sumando primero los elementos de la tabla 2.3 siguiendo las filas (horizontales). Los resultados de la suma sobre cada fila [$\sum_{k=0}^{[n/2]}(n, n-2k)$ es el resultado de la suma de los términos de la fila n-sima] se suman a continuación para obtener la función generatriz: $G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{[n/2]}(n, n-2k)\right]$. Por supuesto, esta suma puede realizarse en cualquier otro orden (¡siempre que no se nos olvide ningún sumando!). Por ejemplo, en vez de agrupar primero sobre "filas" [que es lo que se hace en (2.142b)], podemos sumar agrupando los términos que están dispuestos sobre las "diagonales" de la tabla 2.3. Si hacemos esto, vemos que, por cada fila que bajamos por la diagonal, el primer índice aumenta en una unidad y disminuye el segundo índice también en una unidad. Por tanto la suma sobre la diagonal que empieza en (m,m) viene dada por

$$\sum_{j=0}^{m} (m+j, m-j). \tag{2.144}$$

Por ejemplo, la suma sobre la diagonal que empieza en $(2,2)$ es $(2,2)+(3,1)+(4,0)$. Por consiguiente, agrupando sobre las "diagonales", tenemos que (2.143) es igual a

$$G(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{m} (m+j, m-j). \tag{2.145}$$

$\mathbf{n}$	$\sum_{\mathbf{k=0}}^{[\mathbf{n/2}]}(\mathbf{n},\mathbf{n-2k})$
0	$\sum_{k=0}^{0}(0,0-2k)=(0,0)$
1	$\sum_{k=0}^{0}(1,1-2k)=(1,1)$
2	$\sum_{k=0}^{1}(2,2-2k)=(2,2)+(2,0)$
3	$\sum_{k=0}^{1}(3,3-2k)=(3,3)+(3,1)$
4	$\sum_{k=0}^{2}(4,4-2k)=(4,4)+(4,2)+(4,0)$
5	$\sum_{k=0}^{2}(5,5-2k)=(5,5)+(5,3)+(5,1)$

Tabla 2.3: Primeros sumandos de (2.142b)

Es decir, retornando a la notación estándar,

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \frac{1}{j!\,(m-j)!}\, t^{m+j}(2x)^{m-j} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!\,(m-j)!}\,(-t)^j(2x)^{m-j}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la fórmula del binomio de Newton encontramos

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\,(2x-t)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\big[t\,(2x-t)\big]^m}{m!}. \end{aligned}$$

Pero esto no es más que el desarrollo en serie de potencias de z de la función e^z con $z=t(2x-t)$. Por tanto

$$G(x,t)=\mathrm{e}^{t(2x-t)}\,. \tag{2.146}$$

Esta es pues la forma compacta de la *función generatriz de los polinomios de Hermite.*

2.6.5. Norma de los polinomios de Hermite

Por supuesto, los polinomios de Hermite son ortogonales con respecto a la función peso $r(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ en el intervalo $(-\infty,\infty)$:

$$\langle H_m|H_n\rangle = \|H_n\|^2\delta_{mn}. \tag{2.147}$$

Evaluaremos la norma $\|H_n\|$ a partir de la función generatriz. Para ello definimos la función $I(t,t')$:

$$I(t,t')=\langle G(x,t)|G(x,t')\rangle. \tag{2.148}$$

Usando (2.142a) y la propiedad (2.147) se deduce fácilmente que

$$I(t,t') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|H_n\|^2}{(n!)^2} (tt')^n. \tag{2.149}$$

Por otro lado, empleando la expresión (2.146) para la función generatriz, se tiene que

$$\begin{aligned} I(t,t') &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{e}^{t(2x-t)} \, \mathrm{e}^{t'(2x-t')} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \mathrm{e}^{-(x^2-2x(t+t')+t^2+t'^2)} \\ &= \mathrm{e}^{2tt'} \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \mathrm{e}^{-(x-t-t')^2} \\ &= \mathrm{e}^{2tt'} \int_{-\infty}^{\infty} dz \ \mathrm{e}^{-z^2} \\ &= \sqrt{\pi} \, \mathrm{e}^{2tt'} \\ &= \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (tt')^n. \end{aligned}$$

Comparando esta última expresión con (2.149) se deduce que

$$\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}. \tag{2.150}$$

2.6.6. Desarrollo en serie de los polinomios de Hermite

Si la función $\varphi(x)$ es de cuadrado sumable con respecto la función peso $r(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, es decir, si $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} |\varphi(x)|^2 \, dx$ existe, entonces, en el sentido de convergencia en media cuadrática, se tiene que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x), \qquad c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \varphi(x) H_n(x) \, dx. \tag{2.151}$$

Por supuesto, si $\varphi(x)$ es suave a trozos, entonces la convergencia es punto a punto.

► *Ejemplo 2.6*

Vamos a hallar el desarrollo en serie de $H_n(x)$ de la función

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{2x}.$$

Es claro que $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, | \, \mathrm{e}^{2x} \, |^2 \, dx$ existe, es decir, $\varphi(x) = \mathrm{e}^{2x}$ es de cuadrado sumable con respecto a e^{-x^2} sobre toda la recta real. Por consiguiente, podemos escribir

$$\mathrm{e}^{2x} = \sum_{m=0}^{\infty} c_n H_n(x).$$

Pero

$$G(x, t=1) = \mathrm{e}^{2x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \, t^n \Big|_{t=1}$$

por lo que si multiplicamos esta expresión por e obtenemos

$$\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}.$$

Los coeficientes c_n del desarrollo (2.151) de e^{2x} en polinomios de Hermite son entonces

$$c_n = \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

◀

2.6.7. Fórmula de Rodrigues y paridad

Para hallar la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Hermite partiremos de la función generatriz. Desarrollando esta función en serie de Taylor vemos que

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n G(x,t)}{\partial t^n}\bigg|_{t=0} t^n.$$

Comparando esta expresión con la de la definición de la función generatriz,

$$G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n!}\, t^n,$$

se deduce que

$$H_n(x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} G(x,t)\bigg|_{t=0}. \tag{2.152}$$

Sabemos que $G(x,t) = \mathrm{e}^{2xt-t^2} = \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{e}^{-(x-t)^2}$, luego

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(x,t) = \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \mathrm{e}^{-(x-t)^2}$$

o, si hacemos el cambio $x - t = z$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n G(x,t) &= \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \mathrm{e}^{-z^2} \\
&= \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \mathrm{e}^{-z^2} \\
&= \mathrm{e}^{x^2} \left(-1\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \mathrm{e}^{-z^2} \\
&= \mathrm{e}^{x^2} (-1)^n \left(\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \mathrm{e}^{-z^2} \\
&= \mathrm{e}^{x^2} (-1)^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \mathrm{e}^{-(x-t)^2}.
\end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$ en esta expresión y usando la ecuación (2.152) se obtiene

$$H_n(x) = (-1)^n\, \mathrm{e}^{x^2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2} \tag{2.153}$$

que es la *fórmula de Rodrigues.*

Paridad

A partir de la formula de Rodrigues es fácil ver que

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x). \tag{2.154}$$

Es decir, la paridad de H_n es igual a la de n.

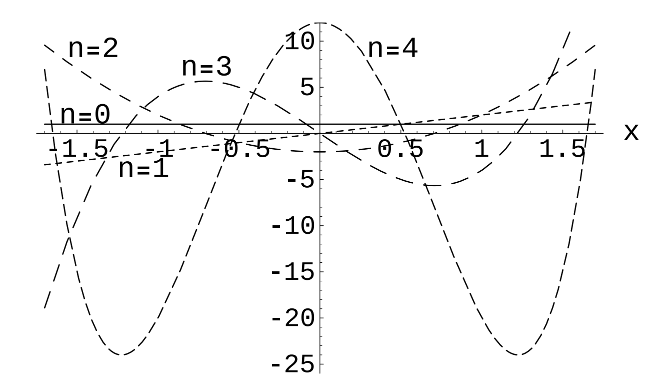


Figura 2.8: Representación gráfica de los cinco primeros polinomios de Hermite $H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

2.6.8. Primeros polinomios de Hermite

Los primeros seis polinomios de Hermite son:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \\
H_1(x) &= 2x, \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x, \\
H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.
\end{aligned}$$

Nótese que el coeficiente de mayor grado del polinomio toma el valor de estandarización 2^n.

2.6.9. Relaciones de recurrencia

Vamos a hallar varias relaciones de recurrencia mediante la función generatriz. Para ello procedemos como lo hicimos con los polinomios de Legendre (véase la sección 2.3.9, página 96). Derivamos la función generatriz respecto a t,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{e}^{2xt-t^2}\right] = (2x - 2t)\, G(x,t).$$

Pero $G(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$ y por tanto la ecuación anterior se puede escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, H_n(x)}{n!} t^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1}.$$

Ahora cambiamos los índices para que aparezcan sólo potencias de t^n dentro de los sumatorios:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n = 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} t^n.$$

Igualamos los coeficientes de los sumatorios para obtener

$$\begin{aligned} t^0: &\qquad H_1(x) = 2xH_0(x) \\ t^n: &\qquad \frac{H_{n+1}}{n!} = 2x\frac{H_n}{n!} - 2\frac{H_{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

es decir

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x), \qquad n \geq 0. \tag{2.155}$$

La función $H_{-1}(x)$ que aparece en esta relación para $n = 0$ no está definida, pero su valor no importa porque está multiplicada por cero. En todo caso, quizás lo más sencillo es considerar que la relación de recurrencia anterior es válida para todo $n \geq 0$ asumiendo que, por definición, $H_{-1}(x) = 0$.

Podemos hallar una relación de recurrencia que involucra a la derivada $H_n'(x)$ de los polinomios de Hermite derivando la función generatriz respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,t) = 2t\, G(x,t).$$

Si sustituimos ahora $G(x,t)$ por la expresión general tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!}t^n &= 2t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^n \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!}t^{n+1}. \end{aligned}$$

Cambiando los índices ($n \to n-1$ en el sumatorio de la derecha),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!}t^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}t^n.$$

e igualando coeficientes con igual potencia de t encontramos

$$\begin{aligned} H'(x) &= 0, \\ \frac{H_n'(x)}{n!} &= 2\frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

es decir

$$H_n'(x) = 2n\, H_{n-1}(x), \qquad n \geq 0. \tag{2.156}$$

2.7. Polinomios asociados de Laguerre

La ecuación de los polinomios asociados de Laguerre es

$$\boxed{x\, y'' + (\alpha + 1 - x)\, y' + n\, y = 0}, \qquad 0 \leq x < \infty, \tag{2.157}$$

donde $\alpha > -1$ es un número dado y n juega el papel de autovalor. Cuando $\alpha = 0$ la ecuación se conoce simplemente como ecuación de Laguerre.

Para poner esta ecuación en forma de ecuación de Sturm-Liouville identificamos

$$y'' + \frac{\alpha + 1 - x}{x}\, y' + \frac{n}{x}\, y = 0$$

con

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}\, y' + \frac{q(x) + \lambda r(x)}{p(x)}\, y = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{p'(x)}{p(x)} &= \frac{\alpha + 1 - x}{x} \Rightarrow \ln p = (\alpha+1)\ln x - x \Rightarrow p(x) = x^{\alpha+1}\,\mathrm{e}^{-x},\\ q(x) &= 0,\\ \frac{\lambda r(x)}{p(x)} &= \frac{n}{x} \rightarrow \begin{cases} \lambda = n, \\ \dfrac{r(x)}{p(x)} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow r(x) = x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de los polinomios de Laguerre en la forma de ecuación de Sturm-Liouville es

$$x^{\alpha+1}\,\mathrm{e}^{-x}\; y'' + x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}(\alpha + 1 - x)\, y' + x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\, n\, y = 0. \tag{2.158}$$

La ecuación es singular en $x = 0$ porque $p(0) = 0$.

El problema de Sturm-Liouville que da lugar a los polinomios asociados de Laguerre está constituido por la ecuación de Sturm-Liouville (2.157) o (2.158) y por las condiciones de contorno (singulares)

$$\begin{cases} y(0) = \text{finito}, \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{y(x)}{x^N} = 0, \quad \text{con } N \text{ finito}. \end{cases} \tag{2.159}$$

Mediante un procedimiento similar al que se utilizó para los polinomios de Hermite en la sección (2.6.2), se puede demostrar [CH62, Sec. 10.4] que los autovalores son $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y las autofunciones son los polinomios asociados de Laguerre de grado n y orden α dados por la relación[17]

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{1}{k!} x^k. \tag{2.160}$$

Si α no es entero el término binomial se expresa mediante funciones gamma:

$$\binom{n+\alpha}{n-k} = \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!\,(\alpha+k)!} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n-k+1)\,\Gamma(\alpha+k+1)}.$$

Si $\alpha = 0$ entonces tenemos que $L_n^{(0)}(x)$ se reduce a los polinomios de Laguerre. En este caso, los polinomios se denotan simplemente por $L_n(x)$, es decir, $L_n(x) \equiv L_n^{(0)}(x)$.

Los cinco primeros polinomios de Laguerre son

$$L_0(x) = 1, \tag{2.161}$$

$$L_1(x) = 1 - x, \tag{2.162}$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2!}[2 - 4x + x^2], \tag{2.163}$$

$$L_3(x) = \frac{1}{3!}[6 - 18x + 9x^2 - x^3], \tag{2.164}$$

$$L_4(x) = \frac{1}{4!}[24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4]. \tag{2.165}$$

[17] En ocasiones [AB74] se definen los polinomios asociados de Laguerre con un factor $n!$ extra, es decir, $L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{n!}{k!}x^k$.

▷ ***Ejercicio** 2.8*

Comprueba que L_n^α es solución de la ecuación asociada de Laguerre. Es decir, sustituye (2.160) en (2.157) y comprueba que la ecuación se satisface término a término.

Relación entre L_n^α y L_n

Si α es entero se verifica que

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} L_{n+\alpha}(x). \tag{2.166}$$

La demostración es la siguiente. Partimos de la fórmula de los polinomios de Laguerre:

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!\,k!} \frac{1}{k!} x^k.$$

Ahora calculamos

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} L_{n+\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n+\alpha} (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{(n+\alpha-k)!} \frac{1}{(k!)^2} \frac{d^\alpha x^k}{dx^\alpha}.$$

Pero

$$\frac{d^\alpha x^k}{dx^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-\alpha)!} x^{k-\alpha} & \text{si } k \geq \alpha, \\ 0 & \text{si } k < \alpha. \end{cases}$$

Por tanto

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} L_{n+\alpha}(x) = \sum_{k=\alpha}^{n+\alpha} (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{(n+\alpha-k)!} \frac{1}{(k!)^2} \frac{k!}{(k-\alpha)!}\, x^{k-\alpha}.$$

Haciendo el cambio de índices $k \to k+\alpha$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} L_{n+\alpha}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+\alpha} \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!} \frac{1}{[(k+\alpha)!]^2} \frac{(k+\alpha)!}{k!}\, x^k \\ &= (-1)^\alpha \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+\alpha)!}{(n-k)!\,(k+\alpha)!} \frac{1}{k!}\, x^k \\ &= (-1)^\alpha\, L_n^\alpha(x), \end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar.

2.7.1. Función generatriz y norma

Función generatriz de los polinomios asociados de Laguerre

La función generatriz de los polinomios asociados de Laguerre es

$$G_\alpha(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x)\, t^n. \tag{2.167}$$

	$\mathbf{k=0}$	$\mathbf{k=1}$	$\mathbf{k=2}$	$\mathbf{k=3}$	$\cdots$
$\mathbf{n=0}$	(0,0)				$\to \sum_{k=0}^{0}(0,k)$
$\mathbf{n=1}$	(1,0)	(1,1)			$\to \sum_{k=0}^{1}(1,k)$
$\mathbf{n=2}$	(2,0)	(2,1)	(2,2)		$\to \sum_{k=0}^{2}(2,k)$
$\mathbf{n=3}$	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	$\to \sum_{k=0}^{3}(3,k)$
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	$\sum_{n=0}^{\infty}(n,0)$	$\sum_{n=1}^{\infty}(n,1)$	$\sum_{n=2}^{\infty}(n,2)$	$\sum_{n=3}^{\infty}(n,3)$	

Tabla 2.4: Equivalencia de $G_\alpha(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(n,k)$ con $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(n,k)$ donde $(n,k) = (-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{1}{k!}t^n x^k$. Los términos que se suman en ambas expresiones son los mismos, pero en $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(n,k)$ primero sumamos las filas [$\sum_{k=0}^{n}(n,k)$ es el resultado de sumar los términos de la fila n-sima] para después sumar los resultados de estas sumas parciales, mientras que en $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(n,k)$ primero sumamos los términos que están sobre la misma columna [$\sum_{n=k}^{\infty}(n,k)$ es el resultado de sumar los términos sobre la columna k-ésima], para después sumar todos estos resultados parciales.

Vamos a buscar una expresión compacta para $G_\alpha(x,t)$. Para ello expresamos L_n^α mediante (2.160) y cambiamos el orden de la suma [véase la tabla (2.4)]:

$$\begin{aligned} G_\alpha(x,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{1}{k!}t^n x^k \qquad [\leftarrow \text{suma primero sobre “filas”}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^k\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{1}{k!}t^n x^k. \qquad [\leftarrow \text{suma primero sobre “columnas”}] \end{aligned}$$

Mediante el cambio de índices $n \to n+k$ se obtiene

$$\begin{aligned} G_\alpha(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n+k+\alpha}{n}\frac{1}{k!}t^{n+k}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(xt)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k+\alpha)!}{n!\,(k+\alpha)!}t^n. \end{aligned}$$

Pero sabemos que el desarrollo en serie de potencias de $1/(1-t)^a$, siendo a un número real cualquiera, viene dado por la fórmula del binomio generalizada

$$(1-t)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+a-1}{n}t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+a-1)!}{(a-1)!\,n!}\,t^n. \tag{2.168}$$

Identificando $a-1$ con $k+\alpha$ vemos que

$$
\begin{aligned}
G_\alpha(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(xt)^k}{k!}(1-t)^{-(k+\alpha+1)}\\
&= (1-t)^{-(\alpha+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{xt}{1-t}\right)^k\\
&= \frac{\mathrm{e}^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}} \qquad (2.169)
\end{aligned}
$$

que es la *función generatriz de los polinomios asociados de Laguerre de orden* α.

Norma de los polinomios asociados de Laguerre

Vamos a hallar la norma de los polinomios asociados de Laguerre del mismo modo que lo hicimos con los polinomios de Hermite. Para ello definimos la función $I(t,t')$ como el producto escalar de dos funciones generatrices:

$$
\begin{aligned}
I_\alpha(t,t') &\equiv \langle G_\alpha(x,t)|G_\alpha(x,t')\rangle\\
&= \int_0^\infty dx\, x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x}\, G_\alpha(x,t)\, G_\alpha(x,t')\\
&= \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}}\frac{1}{(1-t')^{\alpha+1}}\int_0^\infty dx\, x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x}\exp\left[-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{t'}{1-t'}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Pero

$$
1+\frac{t}{1-t}+\frac{t'}{1-t'} = \frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')},
$$

por lo que hacemos el cambio

$$
y = x\frac{1-tt'}{(1-t)(1-t')},
$$

para obtener

$$
I_\alpha(t,t') = (1-tt')^{-(\alpha+1)}\int_0^\infty dy\, y^\alpha\, \mathrm{e}^{-y}\,.
$$

La integral no es más que la función gamma (en la forma conocida como integral de Euler):

$$
\alpha! \equiv \Gamma(1+\alpha) = \int_0^\infty dy\, y^\alpha\, \mathrm{e}^{-y}, \qquad (2.170)
$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
I_\alpha(t,t') &= \alpha!\,(1-tt')^{-(\alpha+1)}\\
&= \alpha!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)!}{\alpha!\,n!}(tt')^n. \qquad (2.171)
\end{aligned}
$$

Pero por las propiedades de ortogonalidad de los polinomios asociados de Laguerre se tiene que

$$
\begin{aligned}
I_\alpha(t,t') &\equiv \langle G_\alpha(x,t)|G_\alpha(x,t')\rangle\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\|L_n^\alpha\|^2(tt')^n. \qquad (2.172)
\end{aligned}
$$

Comparando (2.171) y (2.172) se deduce que

$$
\|L_n^\alpha\|^2 = \frac{(\alpha+n)!}{n!}. \qquad (2.173)
$$

2.7.2. Desarrollo en serie de L_n^α.

Dado que los polinomios asociados de Laguerre son autofunciones de un problema de Sturm-Liouville en el intervalo $0 \le x < \infty$ con función peso $r(x) = x^\alpha \,\mathrm{e}^{-x}$, sabemos que podemos expresar cualquier función $\varphi(x)$ suficientemente bien comportada (véase la sección 1.6, página 25) en la forma de un desarrollo generalizado de Fourier en términos de $L_n^\alpha(x)$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x) \quad \text{con} \quad c_n = \frac{n!}{(\alpha+n)!} \int_0^\infty dx\, x^\alpha \,\mathrm{e}^{-x}\, L_n^\alpha(x)\varphi(x). \tag{2.174}$$

2.7.3. Fórmula de Rodrigues

Usando la fórmula de Leibniz (2.82) encontramos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^{n+\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-k} x^{n+\alpha}\right] \left(\frac{d}{dx}\right)^k \mathrm{e}^{-x} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(n+\alpha)!}{(\alpha+k)!} x^{\alpha+k} \,(-1)^k \,\mathrm{e}^{-x} \\
&= x^\alpha \,\mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \,\frac{(n+\alpha)!}{(\alpha+k)!}\, x^k \\
&= x^\alpha \,\mathrm{e}^{-x}\, n! L_n^\alpha(x)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{x} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(x^{n+\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\right), \tag{2.175}$$

que es la *fórmula de Rodrigues* para las funciones asociadas de Laguerre.

2.7.4. Relaciones de recurrencia

Partimos de la función generatriz (2.169). Procedemos tal como hicimos con los polinomios de Legendre (sección 2.3.9, página 96) y con los polinomios de Hermite (sección 2.6.9, página 120), y derivamos la función generatriz con respecto a t:

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial t} = \frac{\alpha+1}{1-t}\, G_\alpha(x,t) - \frac{x}{(1-t)^2}\, G_\alpha(x,t)\,,$$

es decir,

$$(1-t)^2 \frac{\partial G_\alpha}{\partial t} = \left[(\alpha+1)\,(1-t) - x\right] G_\alpha(x,t).$$

Como $G_\alpha(x,t) = \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha t^n$, la expresión anterior se convierte en

$$\sum_{n=1}^{\infty} n L_n^\alpha t^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n L_n^\alpha t^n + \sum_{n=1}^{\infty} n L_n^\alpha t^{n+1} = (\alpha+1-x) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha t^n - (\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha t^{n+1}.$$

Ahora cambiamos los índices de modo que dentro de los sumatorios sólo aparezcan potencias de t^n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) L_{n+1}^\alpha t^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n L_n^\alpha t^n + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) L_{n-1}^\alpha t^n = (\alpha+1-x) \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha t^n - (\alpha+1) \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}^\alpha t^n.$$

Esto requiere que, para $n \geq 2$,

$$x\, L_n^\alpha(x) = -(n+1)\, L_{n+1}^\alpha(x) + (2n+\alpha+1)\, L_n^\alpha(x) - (n+\alpha)\, L_{n-1}^\alpha(x) \tag{2.176}$$

donde hemos agrupado los términos con igual polinomio de Laguerre, dejando aparte el término $xL_n^\alpha(x)$.

▷ ***Ejercicio*** *2.9*

Escribe las relaciones de recurrencia para $n = 0$ y $n = 1$.

También podemos hallar otra relación de recurrencia que involucra a la derivada de los polinomios asociados de Laguerre si, en vez de derivar respecto a t, derivamos con respecto a x:

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial x} = -\frac{t}{1-t} G_\alpha,$$

es decir

$$(1-t)\, \frac{\partial G_\alpha}{\partial x} = -t\, G_\alpha.$$

Insertando $G_\alpha(x,t) = \sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha\, t^n$ en esta expresión encontramos que

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{dL_n^\alpha}{dx}\, t^n - \sum_{n=0}^\infty \frac{dL_n^\alpha}{dx}\, t^{n+1} = -\sum_{n=0}^\infty L_n^\alpha\, t^{n+1}.$$

Hacemos el consabido cambio de índices para expresar los sumatorios en potencias de t^n y así poder igualar término a término:

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{dL_n^\alpha}{dx}\, t^n - \sum_{n=1}^\infty \frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx}\, t^n = -\sum_{n=1}^\infty L_{n-1}^\alpha\, t^n.$$

De aquí se deduce la siguiente relación de recurrencia para $n \geq 1$:

$$\frac{dL_n^\alpha}{dx} = \frac{dL_{n-1}^\alpha}{dx} - L_{n-1}^\alpha. \tag{2.177}$$

Combinando (2.176) y (2.177) se encuentra fácilmente esta otra relación de recurrencia:

$$x\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = nL_n^\alpha(x) - (n+\alpha)\, L_{n-1}^\alpha(x). \tag{2.178}$$

También existen relaciones de recurrencia entre polinomios de órdenes distintos. Dos ejemplos:

$$L_{n-1}^\alpha(x) + L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x), \tag{2.179}$$

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x). \tag{2.180}$$

▷ ***Ejercicio*** *2.10*

Demuestra la validez de las relaciones (2.179) *y* (2.180).

2.8. Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel son soluciones de la ecuación de Bessel:

$$\boxed{x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0}\,. \tag{2.181}$$

Si ν no es un número entero, las dos soluciones linealmente independientes son las funciones de Bessel de *primera especie* de orden $\pm\nu$, $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$:

$$J_{\pm\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\pm\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k\pm\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{2.182}$$

Por tanto, si $\nu \neq$ entero, la solución general de la ecuación de Bessel es

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x). \tag{2.183}$$

▷ ***Ejercicio*** *2.11*

Comprueba por sustitución directa que (2.182) *es solución de la ecuación de Bessel.*

Si $\nu = n$ es un número entero, las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ *no* son linealmente independientes y, por tanto, $y(x) = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$ *no* sería ya solución general de la ecuación de Bessel.

Veamos que, efectivamente, $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente dependientes. Por concretar, supongamos que n es un entero positivo. Entonces

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Pero los términos del primer sumatorio son nulos porque $1/(k-n)! = 0$ dado que $k < n$ y el inverso del factorial de un entero negativo es nulo. Por tanto

$$J_{-n}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Haciendo el cambio $k \to k+n$, se deduce que

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+2n} \\ &= (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{(k+n)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= (-1)^n J_n(x). \end{aligned} \tag{2.184}$$

Hemos así demostrado que si $\nu = n \in \mathbb{Z}$, entonces J_n y J_{-n} no son linealmente independientes. En la figura 2.9 se representa $J_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

Una solución de la ecuación de Bessel que es linealmente independiente de $J_\nu(x)$ *para todo* ν es la función de Bessel de segunda especie o función de Neumann (en ocasiones también llamada función de Weber):

$$Y_\nu(x) \equiv N_\nu(x) = \lim_{\alpha\to\nu} \frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}. \tag{2.185}$$

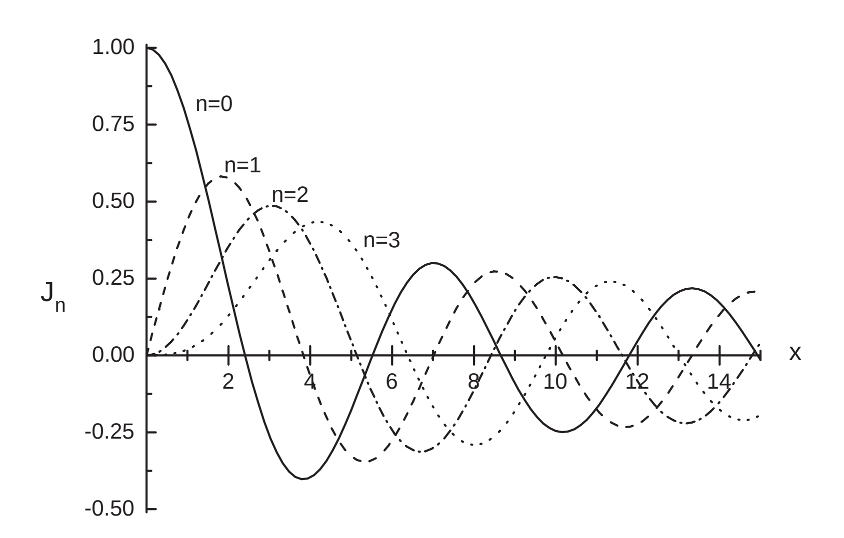


Figura 2.9: Representación gráfica de las cuatro primeras funciones de Bessel de primera especie $J_n(x)$ con $n = 0$ (línea continua), $n = 1$ (rayas), $n = 2$ (rayas y puntos) y $n = 3$ (puntos).

Por consiguiente, tanto para ν entero como para ν no entero, la solución general de la ecuación de Bessel con índice ν puede escribirse como

$$y(x) = A\, J_\nu(x) + B\, N_\nu(x). \tag{2.186}$$

Por supuesto, si ν no es un número entero, el denominador $\operatorname{sen}(\nu\pi)$ no es nulo y el límite anterior es, trivialmente,

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}.$$

En este caso, la solución general de la ecuación de Bessel puede reescribirse como combinación de dos funciones de Bessel de primera especie:

$$\begin{aligned}
y(x) &= A\, J_\nu(x) + B\frac{\cos(\nu\pi)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} J_n(x) - \frac{B}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} J_{-\nu}(x) \\
&= \left[A + B\frac{\cos(\nu\pi)}{\operatorname{sen}(\nu\pi)}\right] J_\nu(x) - \frac{B}{\operatorname{sen}(\nu\pi)} J_{-\nu}(x) \\
&= \widetilde{A}\, J_\nu(x) + \widetilde{B}\, J_{-\nu}(x).
\end{aligned}$$

Si $\nu = n$ es un número entero, entonces $\cos(n\pi) = (-1)^n$, por lo que el numerador de (2.185) es nulo ya que, como hemos visto hace un momento, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Por supuesto, para $n =$ entero, el denominador $\operatorname{sen}(n\pi)$ de (2.185) es también nulo, por lo que, en principio, se da una indeterminación de tipo $0/0$. Esta indeterminación se resuelve efectuando el proceso del

límite con cuidado, por ejemplo, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$
\begin{aligned}
N_n(x) &= \left\{ \frac{\frac{d}{d\alpha}(J_\alpha \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha})}{\frac{d}{d\alpha}\operatorname{sen}(\alpha\pi)} \right\}_{\alpha=n} \\
&= \left\{ \frac{-\alpha \operatorname{sen}(\alpha\pi) J_\alpha + \frac{\partial J_\alpha}{\partial\alpha}\cos(\alpha\pi) - \frac{\partial J_{-\alpha}}{\partial\alpha}}{\pi\cos(\alpha\pi)} \right\}_{\alpha=n} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial\alpha} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial\alpha} \right]_{\alpha=n}.
\end{aligned}
$$

Utilizando en esta ecuación el desarrollo en serie de potencias de $J_{\pm n}(x)$ dado en (2.182) es posible deducir que[18]

$$
N_0(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_0(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\psi(r)}{(r!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r} \tag{2.187a}
$$

y, para $n \geq 1$,

$$
N_n(x) = \frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r \frac{\psi(r)+\psi(n+r)}{r!(n+r)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2r+n} \tag{2.187b}
$$

donde $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ es la función psi (o función digamma) que para valores enteros viene dada por $\psi(1) = -\gamma$ y $\psi(n) = -\gamma + \sum_{r=1}^{n-1} 1/r$, siendo $\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{r} - \ln m\right) = 0'57721\,56649\cdots$ la constante de Euler (también llamada constante de Euler-Mascheroni) [AS72]. Una propiedad importante de las funciones de Bessel de segunda especie $N_\nu(x)$ es que, como puede verse por la expresión anterior, estas funciones divergen en $x = 0$ si ν es entero. Esta propiedad se verifica también *si ν no es entero*, como es fácil de comprobar.

En la figura 2.10 se muestran las funciones de Bessel de segunda especie $N_n(x)$ para $n = 0, 1, 2, 3$.

▷ ***Ejercicio** 2.12*

Teniendo en cuenta que

$$
\nu!\,(-\nu!) = \frac{\pi\nu}{\operatorname{sen}\pi\nu}
$$

comprueba que, para $\nu > 0$,

$$
N_\nu(x) = -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} + \cdots
$$

cuando $x \to 0$.

En resumen, para $x \ll \nu$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
J_\nu(x) &\approx \frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu}, \quad \text{para} \quad \nu \geq 0, \\
N_0(x) &\approx \frac{2}{\pi}\ln x, \\
N_\nu(x) &\approx -\frac{(\nu-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^{\nu}, \quad \text{para} \quad \nu \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.188}
$$

[18] Puede verse la demostración en la sección 6.1 de [AB74]. La demostración requiere conocer la derivada de la función gamma (función factorial), la cual se puede expresar en términos de la función digamma (véase, por ejemplo, el capítulo 10 de [Arf85]).

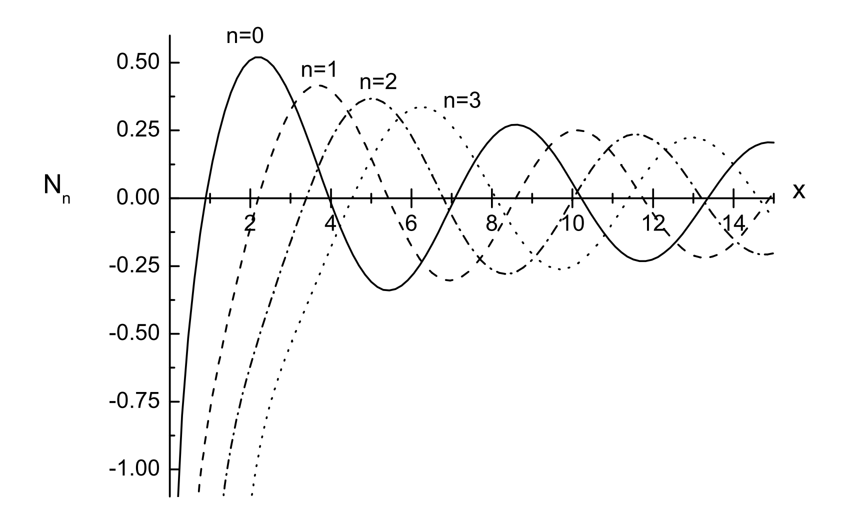


Figura 2.10: Representación gráfica de las cuatro primeras funciones de Bessel de segunda especie N_n con $n = 0$ (línea continua), $n = 1$ (rayas), $n = 2$ (rayas y puntos) y $n = 3$ (puntos).

2.8.1. Ecuaciones reducibles a ecuaciones de Bessel

Muchas ecuaciones que se encuentran en la práctica son resolubles en términos de la funciones de Bessel aunque no tienen, en primera instancia, la forma de la ecuación de Bessel (2.181). Para identificar muchas de estas ecuaciones, el resultado siguiente es especialmente útil:

$$\frac{d}{dx}\left(x^a \frac{dy}{dx}\right) + bx^c\, y = 0 \tag{2.189}$$

se reduce a la ecuación de Bessel (2.181)

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - \nu^2)\, u = 0$$

mediante el cambio

$$t = \alpha\, \sqrt{b}\, x^{1/\alpha}, \tag{2.190}$$

$$u = x^{-\nu/\alpha}\, y, \tag{2.191}$$

donde

$$\alpha = \frac{2}{c - a + 2}, \tag{2.192}$$

$$\nu = \frac{1 - a}{c - a + 2}. \tag{2.193}$$

Es decir, la solución de (2.189) vendría dada por

$$y(x) = x^{\nu/\alpha} u \left(\alpha\sqrt{b}\, x^{1/\alpha}\right) \tag{2.194}$$

$$= x^{\nu/\alpha} \left[A\, J_\nu \left(\alpha\sqrt{b}\, x^{1/\alpha}\right) + B\, N_\nu \left(\alpha\sqrt{b}\, x^{1/\alpha}\right)\right]. \tag{2.195}$$

Si $b < 0$, el argumento de u en (2.195) es imaginario. En este caso, la solución $u(t)$ vendría dada como combinación de las funciones de Bessel modificadas [véase la relación (2.233)] de modo que la solución sería:

$$y(x) = x^{\nu/\alpha} \left[A\, I_\nu \left(\alpha \sqrt{|b|}\, x^{1/\alpha} \right) + B\, K_\nu \left(\alpha \sqrt{|b|}\, x^{1/\alpha} \right) \right], \quad b < 0.$$

Todas las expresiones anteriores carecen de sentido si $c - a + 2 = 0$, pero en este caso la ecuación (2.189) no es más que una ecuación de Euler.

▷ ***Ejercicio*** *2.13*

Comprueba por sustitución directa que, tras los cambios de variable (2.190) *y* (2.191), *la ecuación* (2.189) *se reduce a una ecuación de Bessel.*

► *Ejemplo 2.7*

Queremos resolver la ecuación

$$y'' + \sqrt{x}\, y = 0. \tag{2.196}$$

Esta ecuación es de la forma (2.189) con $a = 0$, $b = 1$ y $c = 1/2$, por lo que $\alpha = 4/5$, $\nu = 2/5$. Por tanto, los cambios (2.190) y (2.191) son

$$t = \frac{4}{5} x^{5/4},$$
$$u = x^{-1/2} y,$$

y la ecuación (2.196) se reduce a

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + t \frac{du}{dt} + \left[t^2 - \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right] u = 0$$

cuya solución es

$$u(t) = A\, J_{2/5}(t) + B\, N_{2/5}(t).$$

Por tanto, según (2.194), la solución de (2.196) es

$$y(x) = x^{1/2} \left[A\, J_{2/5} \left(\frac{4}{5} x^{5/4} \right) + B\, N_{2/5} \left(\frac{4}{5} x^{5/4} \right) \right].$$

◄

2.8.2. Funciones de Bessel como oscilaciones amortiguadas

Las figuras (2.9) y (2.10) muestran que las funciones de Bessel de primera y segunda especie tienen el aspecto de oscilaciones amortiguadas. Esto es fácil de entender si observamos que la ecuación de Bessel (2.181)

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y(x) = 0$$

puede reescribirse en la forma de un oscilador linear amortiguado,

$$y''(t) + \lambda y'(t) + k y(t) = 0,$$

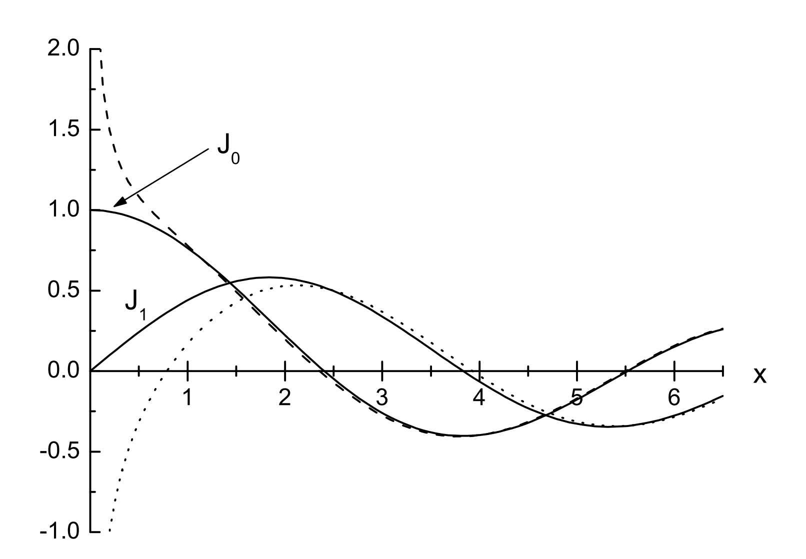


Figura 2.11: Funciones de Bessel de primera especie $J_0(x)$ y $J_1(x)$. Línea continua: valor exacto; línea discontinua y punteada: aproximación asintótica de J_0 y J_1, respectivamente, hallada mediante la ecuación (2.197).

donde el coeficiente de amortiguamiento $\lambda = 1/t$ y el coeficiente de restitución ("constante" elástica) $k = \omega^2 = \left(1 - \nu^2/t^2\right)$ dependen del "tiempo" t. Es claro que, a medida que el tiempo crece, el amortiguamiento es cada vez menor y las oscilaciones se asemejan cada vez más a oscilaciones armónicas de frecuencia unidad pues, para $t \to \infty$, $\omega^2 = k \to 1$. Este comportamiento se aprecia claramente en las figuras (2.9) y (2.10). De hecho [AS72] (véase también el problema 15, página 470)

$$J_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \nu\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{si} \quad x \gg \nu, \tag{2.197}$$

$$N_\nu(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4} - \nu\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{si} \quad x \gg \nu, \tag{2.198}$$

o, con mayor precisión,

$$J_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \nu\frac{\pi}{2}\right) + \frac{r_1(x)}{x^{3/2}},$$

$$N_\nu(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4} - \nu\frac{\pi}{2}\right) + \frac{r_2(x)}{x^{3/2}},$$

donde $r_1(x)$ y $r_2(x)$ son funciones acotadas cuando $x \to \infty$. En las figuras 2.11 y 2.12 se comparan los valores exactos de de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ con sus aproximaciones asintóticas[19] dadas por la relación (2.197), y los valores exactos de $N_0(x)$ y $N_1(x)$, con los proporcionados por la ecuación (2.198). El acuerdo es muy bueno incluso para valores relativamente pequeños del argumento x.

De estas expresiones se deduce inmediatamente una estimación de los ceros de las funciones de Bessel. Sea $\alpha_{\nu m}$ el m-simo cero (cuando ordenamos los ceros de menor a mayor valor) de la función de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$, es decir, $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$, y sea $\beta_{\nu m}$ el m-simo cero de la función de Bessel de segunda especie $N_\nu(x)$, es decir, $N_\nu(\beta_{\nu m}) = 0$. Entonces, es claro que para

[19] El concepto de aproximación asintótica y el significado preciso del símbolo $\sim$ se discute en la sección 7.3.

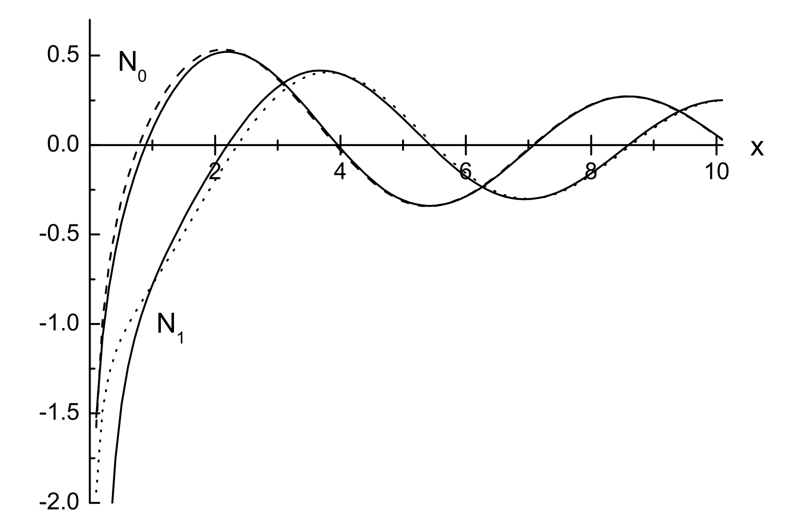


Figura 2.12: Funciones de Bessel de primera especie $N_0(x)$ y $N_1(x)$. Línea continua: valor exacto; línea discontinua y punteada: aproximación asintótica de N_0 y N_1, respectivamente, hallada mediante la ecuación (2.198)

$x \gg \nu$:

$$\alpha_{\nu m} \sim \left(m + \frac{\nu}{2} - \frac{1}{4}\right)\pi, \tag{2.199a}$$

$$\beta_{\nu m} \sim \left(m + \frac{\nu}{2} - \frac{3}{4}\right)\pi. \tag{2.199b}$$

▷ ***Ejercicio** 2.14*

1. *Compara las estimaciones de los primeros ceros de la funciones de Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$ y $N_0(x)$ que se obtienen mediante relación (2.199) con los valores exactos (estos valores puedes encontrarlos en casi cualquier libro de tablas matemáticas, por ejemplo, en [AS72, SA96]).*
2. *Las ecuaciones (2.199) predicen que los ceros tienden a estar separados por la distacia π. Comprueba hasta qué punto esto es cierto.*
3. *¿Por qué es de esperar que estas estimaciones mejoren a medida que el valor de la raíz crece y empeoren cuando el orden ν de la función de Bessel crece?*

2.8.3. Relaciones de recurrencia

Vamos a hallar relaciones de recurrencia para las funciones de Bessel a partir de su desarrollo en serie de potencias dado por la expresión (2.182). Usando esta relación, escribimos:

$$J_{\nu-1} \pm J_{\nu+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1+2k}.$$

Hacemos el cambio $k \to k-1$ en el índice del segundo sumatorio de modo que los dos sumatorios tengan potencias con igual exponente:

$$\begin{aligned}
J_{\nu-1} \pm J_{\nu+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} \pm \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,(\nu+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} \\
&= \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k}\left[\nu+k \pm (-1)^{-1}k\right] \\
&= \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k}\left[\nu+k \mp k\right].
\end{aligned}$$

Si sumamos,

$$\begin{aligned}
J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) &= \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \nu\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1+2k} \\
&= \nu\left(\frac{x}{2}\right)^{-1}\left[\frac{1}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}\right],
\end{aligned}$$

obtenemos finalmente

$$\boxed{J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)}\,, \tag{2.200}$$

que es la (primera) relación de recurrencia buscada. Si ahora restamos

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{\nu!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(\nu+k)!}(\nu+2k)\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-1}$$

obtenemos

$$\boxed{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2\frac{d}{dx} J_\nu(x) \equiv 2J_\nu'(x)}\,, \tag{2.201}$$

como es fácil de comprobar.

Combinando las dos relaciones de recurrencia anteriores podemos construir muchas más. Por ejemplo, si sumamos miembro a miembro (2.200) y (2.201) encontramos

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_\nu'(x). \tag{2.202}$$

Si ahora las restamos miembro a miembro obtenemos

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_\nu'(x). \tag{2.203}$$

Estas dos últimas relaciones nos dicen que a partir de una función de Bessel dada, $J_\nu(x)$, podemos hallar todas las demás funciones de Bessel cuyo orden difiera del de $J_\nu(x)$ en un número entero.

Veamos ahora unas fórmulas que permiten calcular directamente las funciones $J_{\nu+m}(x)$ ó $J_{\nu-m}(x)$ a partir de $J_\nu(x)$. Empezamos evaluando

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^{\pm\nu} J_\nu(x)\right] &= \pm\nu x^{\pm\nu-1} J_\nu(x) + x^{\pm\nu} J_\nu'(x) \\
&= \pm x^{\pm\nu}\left[\frac{\nu}{x} J_\nu(x) \pm J_\nu'(x)\right]
\end{aligned}$$

que por las ecuaciones (2.202) y (2.203) se reduce a

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\pm\nu}J_\nu(x)\right] = \pm x^{\pm\nu}J_{\nu\mp1}(x). \tag{2.204}$$

Por tanto

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}J_\nu(x)\right] = x^{\nu}J_{\nu-1}(x) \Rightarrow \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu}J_\nu\right) = x^{\nu-1}J_{\nu-1}(x). \tag{2.205}$$

Vemos entonces que la aplicación del operador diferencial $\mathcal{D} \equiv \frac{1}{x}\frac{d}{dx}$ sobre la función $f(\nu, x) \equiv x^\nu J_\nu(x)$ tiene por efecto el disminuir en una unidad el índice ν. Es obvio que si repetimos el proceso (aplicamos el operador) m veces, se obtendría $f(\nu - m, , x)$, es decir,

$$\boxed{\mathcal{D}^m\left[x^{\nu}J_\nu(x)\right] \equiv \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \left[x^{\nu}J_\nu(x)\right] = x^{\nu-m}J_{\nu-m}(x)} \tag{2.206}$$

donde la notación $\mathcal{D}^m \equiv \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m$ es un modo (estándar) de indicar que el operador $\mathcal{D} \equiv \frac{1}{x}\frac{d}{dx}$ se aplica m veces.

La ecuación (2.204) nos dice que

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x).$$

Dividiendo esta expresión por x se deduce que

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\,\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^{\nu+1}}, \tag{2.207}$$

y por tanto

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = (-1)^m\frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}}. \tag{2.208}$$

No es difícil demostrar partiendo de la relación (2.185) que la función de Bessel de segunda especie $N_\nu(x)$ satisface las mismas relaciones de recurrencia que las funciones de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$.

▷ ***Ejercicio*** *2.15*

Utiliza la relación (2.185) *para demostrar que si cambiamos J por N en las relaciones de recurrencia* (2.200), (2.201), (2.202), (2.205) *y* (2.207), *las expresiones resultantes son también válidas. Dicho de otro modo, demuestra que las funciones de Bessel de segunda especie $N_\nu(x)$ satisfacen las mismas relaciones de recurrencia que las funciones de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$.*

2.8.4. Cálculo de las funciones de Bessel mediante relaciones de recurrencia

El cómputo de las funciones de Bessel (al igual que muchas otras funciones especiales) puede llevarse a cabo aprovechando sus relaciones de recurrencia. Por ejemplo, uno podría usar la relación (2.200),

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x), \tag{2.209}$$

para calcular $J_{n+1}(x)$ con $n \geq 2$ a partir de, por ejemplo, $J_0(x)$ y $J_1(x)$. Sin embargo, hay que tener cuidado con el uso de las relaciones de recurrencia porque éstas pueden ser inestables de modo que, debido a errores de redondeo (precisión finita de nuestros cómputos), conduzcan a

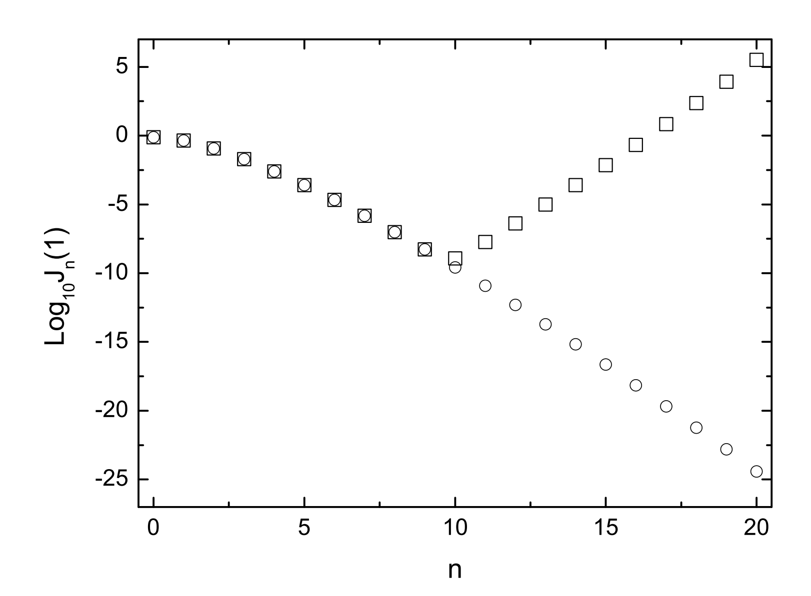


Figura 2.13: Función de Bessel de primera especie en $x = 1$, $J_n(1)$, para valores crecientes de n calculados de forma rigurosa mediante *Mathematica* (círculos). Los cuadrados representan los valores que se obtienen aplicando la relación de recurrencia (2.209) a partir de $J_0(1) \simeq 0'7651976865579666$ y $J_1(1) \simeq 0'44005058574493355$.

resultados incorrectos. Un buen ejemplo de este fenómeno lo constituye la relación de recurrencia (2.209) cuando se pretende usar para estimar valores de funciones de Bessel de un orden ν dado a partir de funciones de Bessel de orden *menor*. En la figura 2.13 se muestran los valores $J_n(1)$ para $n = 0, 1, 2 \cdots$ calculados mediante la relación de recurrencia (2.209) a partir de los valores correctos (hasta 16 cifras significativas) de $J_0(1)$ y $J_1(1)$. Es evidente que el procedimiento conduce a resultados muy malos incluso para valores no muy grandes de n. ¿Es entonces la relación de recurrencia (2.209) inútil? La respuesta es no porque:

- Primero, su uso es adecuado siempre que $n \lesssim x$. Lo que sucede es que la relación de recurrencia es inestable a partir de $n \sim x$ de modo que para $n \gtrsim x$ los resultados dejan de ser fiables.[20]

- Segundo, incluso para $n \gtrsim x$, la relación de recurrencia (2.209) puede usarse con provecho para el cómputo de funciones de Bessel si se usa en el sentido de n *decrecientes* ¡sin necesidad de conocer previamente el valor exacto de *ninguna* (!) función de Bessel! Explicaremos este procedimiento (conocido como algoritmo de Miller) mediante el siguiente ejemplo.

► *Ejemplo 2.8*

Vamos a calcular $J_0(1)$ usando la relación de recurrencia (2.200) en el sentido de n decrecientes:

$$J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x). \tag{2.210}$$

Sabemos por (2.188) que a medida que n crece el valor de $J_n(1)$ es cada vez más pequeño. Supongamos que para $n = N + 1$, el valor de $J_{N+1}(1)$ es tan pequeño que, dentro de la precisión con la que trabajemos,

[20]Puede verse una justificación de estas afirmaciones en la sección 5.5 de [PFT93].

podemos considerar que es igual a cero: $J_{N+1}(1) \simeq 0$. Para simplificar la notación escribiremos el valor (desconocido) de $J_N(1)$ como a, es decir $a = J_N(1)$. Entonces, de la relación (2.210) se deduce que

$$\begin{aligned} J_{N-1}(1) &= 2N J_N(1) - J_{N+1} = 2Na, \\ J_{N-2}(1) &= [4N(N-1) - 1]\, a, \\ &\cdots \end{aligned}$$

Por concretar, supongamos que $N = 8$. Entonces

$$\begin{aligned} J_9(1) &\equiv 0, \\ J_8(1) &\equiv \ a, \\ J_7(1) &= 16 \ a, \\ J_6(1) &= 223\, a, \\ J_5(1) &= 2660\, a, \\ J_4(1) &= 26377\, a, \\ J_3(1) &= 208356\, a, \\ J_2(1) &= 1223759\, a, \\ J_1(1) &= 4686680\, a, \\ J_0(1) &= 8149601\, a. \end{aligned} \tag{2.211}$$

La clave del procedimiento que estamos usando reside en que el valor de a puede estimarse mediante la relación de normalización (2.218),

$$1 = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x),$$

que se demuestra en la página 140. Tomando $x = 1$ en esta relación y teniendo en cuenta los resultados de (2.211), se obtiene

$$\begin{aligned} 1 &= J_0(1) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(1) \\ &\simeq J_0(1) + 2\,[J_2(1) + J_4(1) + J_6(1) + J_8(1)] \\ &\simeq 10650321\, a. \end{aligned}$$

Por tanto $a \simeq 1/10650321$, y sustituyendo este valor en (2.211) encontramos que

$$\begin{aligned} J_8(1) &\simeq 1/10650321 \simeq 0'938939 \times 10^{-7} \to [0'942234 \times 10^{-7}], \\ J_7(1) &\simeq 16/10650321 \simeq 0'150230 \times 10^{-5} \to [0'150233 \times 10^{-5}], \\ J_6(1) &\simeq 223/10650321 \simeq 0'209383 \times 10^{-4} \to [0'209383 \times 10^{-4}], \\ J_5(1) &\simeq 2660/10650321 \simeq 0'249758 \times 10^{-3} \to [0'249758 \times 10^{-3}], \\ J_4(1) &\simeq 26377/10650321 \simeq 0'247664 \times 10^{-2} \to [0'247664 \times 10^{-2}], \\ J_3(1) &\simeq 208356/10650321 \simeq 0'195634 \times 10^{-1} \to [0'195634 \times 10^{-1}], \\ J_2(1) &\simeq 1223759/10650321 \simeq 0'114903 \to [0'114903], \\ J_1(1) &\simeq 4686680/10650321 \simeq 0'440051 \to [0'440051], \\ J_0(1) &\simeq 8149601/10650321 \simeq 0'765198 \to [0'765198]. \end{aligned}$$

A la derecha de la flecha, entre corchetes, se han proporcionado los valores exactos. En el camino de calcular $J_0(1)$ hemos estimado también el valor de $J_1(1)$, $J_2(1)$ .... Los resultados son excelentes: la estimación y los valores exactos de $J_n(1)$ coinciden en seis cifras significativas para $n = 0, 1, \cdots, 6$. Por último, es natural preguntarse qué valor de N habría que escoger para estimar $J_n(x)$ con una precisión mínima dada. La respuesta, para $n > 2$, es $N \sim n + \alpha n^{1/2}$ donde α es una constante que, muy grosso modo, podemos tomar como igual al número de cifras significativas con las que se quiera estimar $J_n(x)$ [PFT93, sec. 6.5].

◀

2.8.5. Función generatriz de $J_n(x)$

La función

$$G(x,t) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n \tag{2.212}$$

es la función generatriz de $J_n(x)$, con n entero, en el sentido de que el desarrollo de *Laurent* de $\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$ viene dado por $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$. Vamos a demostrarlo:

$$\begin{aligned}
G(x,t) &= \mathrm{e}^{\frac{x}{2}t}\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}t^{-1}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k t^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m t^{-m}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{k!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{k-m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{k!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{k-m} + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{-(m-k)}.
\end{aligned} \tag{2.213}$$

De este modo hemos separado la función en dos sumas, la primera con potencias positivas (en el primer sumatorio doble sucede que $m \le k$), y la segunda con potencias negativas (en el segundo sumatorio doble se tiene que $m \ge k+1$). Intentaremos ahora poner estas sumas en función de $J_n(x)$.

Lo primero que vamos a hacer es cambiar el orden de los sumatorios en la primera suma: en vez de sumar primero sobre las "líneas" lo hacemos primero sobre las "columnas" (véase la tabla 2.5) de modo que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k} \frac{(-1)^m}{k!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{k-m} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{k-m}. \tag{2.214}$$

Haciendo el cambio $k = n + m$ en el segundo sumatorio de esta última expresión se obtiene que la primera suma (doble) de (2.213) es

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{k-m} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(n+m)!\, m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) t^n.
\end{aligned} \tag{2.215}$$

Para evaluar la segunda suma (doble) de (2.213) hacemos el cambio $k = m - n$:

	$\mathbf{m=0}$	$\mathbf{m=1}$	$\mathbf{m=2}$	$\mathbf{m=3}$	$\cdots$
$\mathbf{k=0}$	(0,0)				$\rightarrow \sum_{m=0}^{0}(0,m)$
$\mathbf{k=1}$	(1,0)	(1,1)			$\rightarrow \sum_{m=0}^{1}(1,m)$
$\mathbf{k=2}$	(2,0)	(2,1)	(2,2)		$\rightarrow \sum_{m=0}^{2}(2,m)$
$\mathbf{k=3}$	(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	$\rightarrow \sum_{m=0}^{3}(3,m)$
$\vdots$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	$\sum_{k=0}^{\infty}(k,0)$	$\sum_{k=1}^{\infty}(k,1)$	$\sum_{k=2}^{\infty}(k,2)$	$\sum_{k=3}^{\infty}(k,3)$	

Tabla 2.5: Justificación del cambio en el orden de la suma en (2.214), siendo $(k,m) \equiv \frac{(-1)^m}{k!\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{-(m-k)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{k!\,m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+k} t^{-(m-k)} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} t^{-n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n}(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n}(-1)^n J_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(x) t^{-n} \\
&= \sum_{n=-1}^{-\infty} J_n(x) t^n \qquad (2.216)
\end{aligned}$$

Como (2.213) es simplemente la suma de (2.215) y (2.216), deducimos que

$$G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n, \qquad (2.217)$$

que es la expresión que queríamos demostrar.

Como $G(x, t = 1) = 1$ y $J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x)$ [ecuación (2.184)], de la expresión (2.217) anterior se deduce inmediatamente la relación

$$1 = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x), \qquad (2.218)$$

la cual es utilizada en el algoritmo de Miller (empleado en el ejemplo 2.8) para el cómputo de las funciones de Bessel [PFT93, cap. 6].

Función de Bessel de la suma

La función generatriz (2.212) de las funciones de Bessel verifica trivialmente que

$$G(x+y,t) = G(x,t)\,G(y,t) \tag{2.219}$$

y por tanto

(2.220)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x+y)\,t^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_m(x)J_l(y)t^{m+l}. \tag{2.221}$$

En todos los sumandos del miembro derecho en los que, cuando m toma un valor dado, l es igual a $n-m$, se verifica que $t^{m+l}=t^n$. Por consiguiente

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)J_{n-m}(y). \tag{2.222}$$

2.8.6. Relaciones integrales

Si hacemos $t=\mathrm{e}^{i\theta}$ en la función generatriz (2.212) se obtiene

$$\begin{aligned} G(x,t=\mathrm{e}^{i\theta}) &= \mathrm{e}^{x(\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta})/2} \\ &= \mathrm{e}^{ix\,\mathrm{sen}\,\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\,\mathrm{e}^{in\theta} \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[J_n(x)\,\mathrm{e}^{in\theta} + J_{-n}(x)\,\mathrm{e}^{-in\theta}\right]. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la función de Bessel $J_n(x)$ es simplemente el coeficiente n-ésimo del desarrollo en serie de Fourier de $\mathrm{e}^{ix\,\mathrm{sen}\,\theta}$. Pero como $J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$, la expresión anterior se convierte en

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ix\,\mathrm{sen}\,\theta} &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x)\left[\mathrm{e}^{in\theta} + (-1)^n\,\mathrm{e}^{-in\theta}\right] \\ &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta) + i\,2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\,\mathrm{sen}[(2n-1)\theta]. \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta) &= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta), \\ \mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}\,\theta) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\,\mathrm{sen}[(2n-1)\theta]. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera expresión por $\cos(m\theta)$, la segunda por $\mathrm{sen}(m\theta)$ (siendo m un entero), integrando las expresiones resultantes entre 0 y π, y usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones seno y coseno sobre el intervalo $[0,\pi]$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\cos n\theta\,\cos m\theta &= \frac{1}{2}\delta_{nm}, \qquad n,m\neq 0, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\,\mathrm{sen}\,n\theta\,\mathrm{sen}\,m\theta &= \frac{1}{2}\delta_{nm}, \qquad n,m\neq 0, \end{aligned}$$

se deduce que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta) = J_0(x), \tag{2.223}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\cos n\theta = \begin{cases} J_n & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \qquad n \neq 0, \tag{2.224}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\theta\,\mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,n\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ J_n & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases} \qquad n \neq 0 \tag{2.225}$$

Sumando estas dos últimas relaciones se obtiene

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos[n\theta - x\,\mathrm{sen}\,\theta]\,d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.226}$$

que es una representación muy útil de la función de Bessel de primera especie. Por ejemplo, a partir de esta expresión no es difícil deducir (véase el problema 15, página 470) la expresión asintótica (2.197) de $J_n(x)$ para $n \to \infty$.

2.8.7. Funciones de Bessel de orden semientero y funciones esféricas de Bessel

Las funciones de Bessel de orden semientero pueden expresarse en términos de funciones trigonométricas.[21] Para ello usamos la fórmula de duplicación de Legendre,

$$k!(k+1/2)! = 2^{-(2k+1)}\sqrt{\pi}(2k+1)!\,,$$

en la expresión en serie de potencias de $J_{1/2}(x)$,

$$J_{1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\,(k+1/2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2},$$

de modo que

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{x^{2k+1/2}}{2^{2k+1/2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}\,x. \end{aligned} \tag{2.227}$$

El resto de las funciones de orden semientero se pueden obtener a partir de las relaciones de recurrencia (2.202) y (2.203):

$$J_{n\pm1}(x) = \frac{n}{x}J_n(x) \mp J_n'(x).$$

Esta relación evidencia que todas las funciones de Bessel de orden semientero pueden expresarse como combinación de funciones elementales.

[21] Las funciones de Bessel semientero son las únicas que pueden expresarse en términos de funciones elementales. Esto fue demostrado por primera vez por Liouville.

▷ ***Ejercicio** 2.16*

Demuestra mediante las relaciones de recurrencia (2.202) *y* (2.203) *que*

$$\begin{aligned} J_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \\ J_{3/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right), \\ J_{-3/2}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \operatorname{sen} x\right). \end{aligned} \tag{2.228}$$

Las funciones esféricas de Bessel $j_l(x)$ y de Neumann $n_l(x)$ se definen por las relaciones :

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \tag{2.229a}$$

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x), \tag{2.229b}$$

con l entero. Teniendo en cuenta la relación (2.185) y que $\cos(l+1/2)\pi = 0$ y $\operatorname{sen}(l+1/2)\pi = (-1)^l$, la función esférica de Neumann puede escribirse de este otro modo:

$$n_l(x) = (-1)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{-l-1/2}(x), \tag{2.229c}$$

De estas relaciones, y teniendo en cuenta que $J_{l+1/2}(x)$ y $N_{l+1/2}(x)$ satisfacen la ecuación de Bessel (2.181), es fácil deducir que las funciones esféricas de Bessel satisfacen la ecuación diferencial

$$x^2 y''(x) + 2xy'(x) + \left[x^2 - l(l+1)\right] y(x) = 0 \tag{2.230}$$

con l entero.

De las definiciones (2.229) y de los resultados (2.227) y (2.228) se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \\ n_0(x) &= -\frac{\cos x}{x}, \\ j_1(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right), \\ n_1(x) &= -\frac{1}{x}\left(\frac{\cos x}{x} + \operatorname{sen} x\right). \end{aligned}$$

En las figuras 2.14 y 2.15 se representan las cuatro primeras funciones esféricas de Bessel y de Neumann.

Existen otras funciones de Bessel que son útiles en ciertos problemas:[22]

- *Funciones de Bessel de tercera especie o funciones de Hankel* :

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + i\,N_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - i\,N_\nu(x). \end{aligned} \tag{2.231}$$

[22] Véase, por ejemplo, el capítulo 11 de [Arf85].

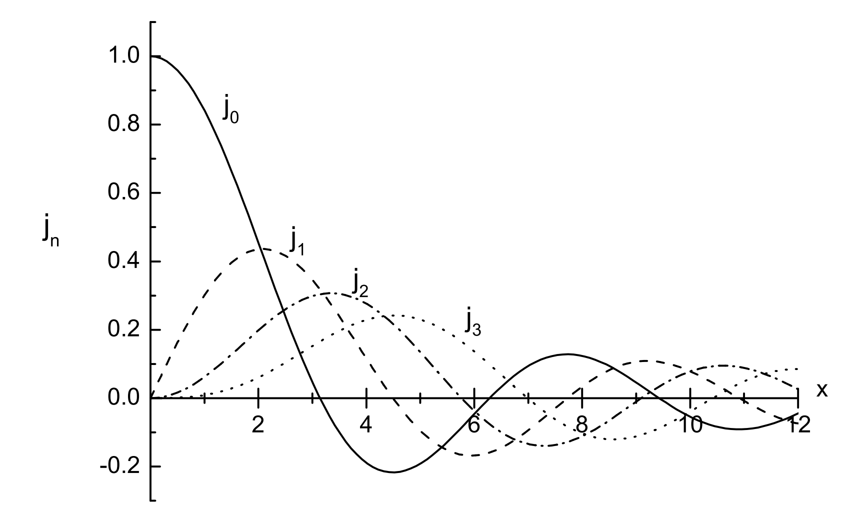


Figura 2.14: Funciones esféricas de Bessel de primera especie.

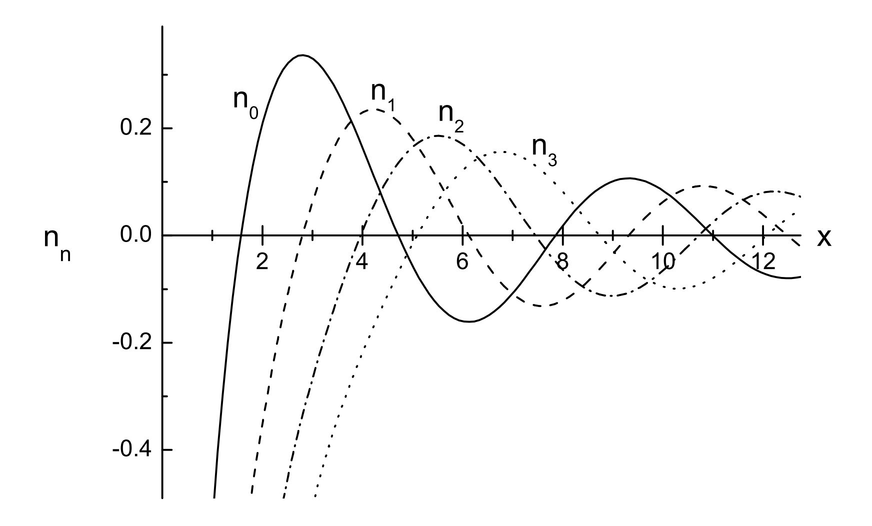


Figura 2.15: Funciones esféricas de Neumann.

- *Funciones esféricas de Bessel de tercera especie o funciones esféricas de Hankel* :

$$
\begin{aligned}
h_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i\, n_n(x), \\
h_n^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i\, n_n(x),
\end{aligned}
\tag{2.232}
$$

siendo n un entero.

- *Las funciones modificadas de Bessel* $I_\nu(x)$ *y* $K_\nu(x)$:

$$
\begin{aligned}
I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix), \\
K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix).
\end{aligned}
\tag{2.233}
$$

2.8.8. Funciones de Bessel y problema de Sturm-Liouville

Sea la ecuación

$$x^2y''(x) + x\,y'(x) + (k^2x^2 - \nu^2)\,y(x) = 0, \qquad a \le x \le b. \tag{2.234}$$

Si hacemos el cambio de variable independiente $u = kx$, donde k es una constante (no nula, por supuesto), se tiene que

$$y' = \frac{dy}{dx} = k\frac{dy}{du}\,, \qquad y'' = k^2\frac{d^2y}{du^2}\,,$$

y la ecuación (2.234) se transforma en

$$u^2\frac{d^2y}{du^2} + u\frac{dy}{du} + (u^2 - \nu^2)\,y(u) = 0, \tag{2.235}$$

que es la *ecuación de Bessel*, tal como la definimos en (2.181) de la página 128. Por este motivo, a la ecuación (2.234) también se la llama ecuación de Bessel. Esto significa que la solución general de la ecuación (2.234) es

$$y(x) = AJ_\nu(kx) + BN_\nu(kx).$$

Si dividimos la ecuación (2.234) por x vemos que la ecuación resultante es una ecuación de Sturm-Liouville con

$$\begin{aligned} p(x) &= x\,,\\ q(x) &= -\frac{\nu^2}{x}\,,\\ r(x) &= x,\\ \lambda &= k^2\,. \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno que aparecen usualmente en los problemas que involucran funciones de Bessel son condiciones de contorno regulares:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,\\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Nótese que esto es un problema de Sturm-Liouville singular porque $q(x)$ diverge en $x = 0$. La satisfacción de las condiciones de contorno restringe los valores posibles de k a ciertos valores concretos k_m que serán los autovalores. Las autofunciones correspondientes a k_m serán de la forma

$$\psi_m(x) = AJ_\nu(k_m x) + BN_\nu(k_m x),$$

donde el valor de A/B queda por determinar. Por la teoría del problema de Sturm-Liouville sabemos que las autofunciones $\{\psi_m\}$ forman una base del espacio vectorial de funciones $\varphi(x)$ de cuadrado sumable con respecto a la función peso $r(x) = x$ en el intervalo $a \le x \le b$. Es decir, se verifica que

$$\varphi(x) = \sum_m c_m\psi_m(x), \qquad c_m = \frac{\langle\psi_m|\varphi\rangle}{\|\psi_m\|^2}\,,$$

donde

$$\begin{aligned} \langle\psi_m|\varphi\rangle &= \int_a^b dx\,x\,\psi_m(x)\,\varphi(x)\,,\\ \|\psi_m\|^2 &= \int_a^b dx\,x\,\left[\psi_m(x)\right]^2. \end{aligned}$$

Cálculo de la norma

Por supuesto, las autofunciones $\psi_m(x)$ son ortogonales entre sí,

$$\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \int_a^b dx\, x\, \psi_m(x)\, \psi_n(x) = \|\psi_m\|^2 \delta_{mn}.$$

La norma de las autofunciones ψ_m es

$$\begin{aligned} \|\psi_m\|^2 &= \int_a^b dx\, x\, [\psi_m(x)]^2 \\ &= \int_a^b dx\, \left[\frac{d}{dx} \frac{1}{2} x^2 \right]\, \psi_m^2(x) \\ &= \frac{1}{2}\, x^2\, \psi_m^2(x) \Big|_a^b - \int_a^b dx x^2\, \psi_m\, \psi_m'(x). \end{aligned} \tag{2.236}$$

Como $\psi_m(x)$ es solución de ecuación de Bessel (2.234),

$$k^2 x^2 y = \nu^2 y - x y' - x^2 y'' = \nu^2 y - x \frac{d}{dx}(x y'),$$

se tiene que

$$k_m^2\, x^2\, \psi_m(x) = \nu^2\, \psi_m(x) - x\, \frac{d}{dx}\, \left[x\, \psi_m'(x) \right].$$

Si multiplicamos esta expresión por $\psi_m'(x)$,

$$\begin{aligned} k_m^2 x^2 \psi_m' \psi_m &= \nu^2 \psi_m' \psi_m - x \psi_m' \frac{d}{dx} [x \psi_m'] \\ &= \nu^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \psi_m^2(x) \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(x \psi_m' \right)^2, \end{aligned}$$

e insertamos el resultado en (2.236), se tiene

$$\|\psi_m\|^2 = \frac{1}{2} k_m^{-2} \Big\{ (k_m^2 x^2 - \nu^2)\, \psi_m^2(x) + x^2 [\psi_m'(x)]^2 \Big\}_a^b. \tag{2.237}$$

El valor concreto que tome la norma dependerá de las condiciones de contorno de cada problema particular.

▶ *Ejemplo 2.9*

Vamos a analizar el problema de Sturm-Liouville constituido por la ecuación de Bessel (2.234) con $\nu > 0$ en el intervalo $[0, b]$ y las condiciones de contorno regulares de Dirichlet

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(b) = 0. \end{cases}$$

La solución general de la ecuación de Bessel es $y(x) = AJ_\nu(kx) + BN_\nu(kx)$. Imponiendo la condición de contorno en $x = 0$, $y(0) = 0$, se deduce que $B = 0$ dado que $N_\nu(0)$ diverge si $\nu > 0$ (véanse las ecuaciones (2.187) y los comentarios subsiguientes). Por tanto la solución ha de tener la forma $y(x) = AJ_\nu(kx)$. De la condición de contorno en $x = b$, $y(b) = 0$, se deduce $J_\nu(kb) = 0$, lo que exige que el argumento kb sea justamente igual a uno de los ceros de la función de Bessel de orden n.

La función $J_\nu(x)$ tiene un número infinito de ceros que denotaremos por $\alpha_{\nu m}$ con $m = 1, 2, 3, \ldots$: $J_\nu(\alpha_{\nu m}) = 0$. En resumen, encontramos que los autovalores y autofunciones (que no están degeneradas) son:

$$k_m = \frac{\alpha_{\nu m}}{b},$$
$$\psi_m(x) = J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\frac{x}{b}\right).$$

Para las condiciones de contorno contempladas en este ejemplo, la ecuación (2.237) nos dice que la norma viene dada por

$$\|\psi_m\|^2 = \frac{1}{2}k_m^{-2}b^2[\psi_m'(b)]^2.$$

Pero, por (2.203),

$$\psi_m'(x) = k_m J_\nu'(k_m x) = k_m\left[\frac{\nu}{k_m x}J_\nu(k_m x) - J_{\nu+1}(k_m x)\right],$$

luego

$$\psi_m'(b) = -k_m J_{\nu+1}(k_m b).$$

Por tanto

$$\|\psi_m\|^2 = \frac{1}{2}b^2\left[J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu m}\right)\right]^2.$$

El desarrollo en serie (serie de Bessel-Fourier) de una función $\varphi(x)$ arbitraria "bien comportada" en el intervalo $[0, b]$ es por tanto

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu(k_m x) \tag{2.238}$$

donde

$$c_m = \frac{\displaystyle\int_a^b dx\, x J_\nu(k_m x)\varphi(x)}{\displaystyle\frac{1}{2}b^2\left[J_{\nu+1}\left(\alpha_{\nu m}\right)\right]^2}.$$

◀

2.9. Problemas

2.1. Sea el conjunto de polinomios $U_n(x)$ (polinomios de Chebichev de segunda especie o de tipo II) definidos por la función generatriz

$$G(x,t) = (1-2xt+t^2)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) t^n.$$

a) Halla la relación de recurrencia de los polinomios U_{n+1}, U_n y U_{n-1} .

b) Demuestra que $U_0(x) = 1$ y, mediante la fórmula de recurrencia, escribe los seis primeros polinomios ($n \leq 5$).

c) Calcula $U_n(1)$, $U_n(-1)$ y $U_n(0)$.

d) Demuestra que

$$U_n(x) = (-1)^n U_n(-x).$$

2.2. Halla los primeros polinomios de Laguerre mediante el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

2.3. Demuestra que las derivadas $P_l'(x)$ de los polinomios de Legendre forman un conjunto completo en el intervalo $[-1,1]$. Escribe la relación de ortogonalidad.

2.4. Utilizando la función generatriz de los polinomios de Legendre, demuestra

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{l+1}}{l+1} P_l(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \ .$$

2.5. Halla el valor de la integral

$$\int_0^1 dx P_l(x)$$

mediante:

a) La función generatriz.

b) La relación de recurrencia (que previamente se deducirá)

$$l P_l(x) + P_{l-1}'(x) - x P_l'(x) = 0.$$

c) La relación de recurrencia (que previamente se deducirá)

$$P_{l+1}'(x) - P_{l-1}'(x) = (2l+1) P_l(x).$$

2.6. *a*) Halla la integral $\int_0^1 dx\, x\, P_l(x)$ partiendo de la fórmula de recurrencia pura.

b) Halla el desarrollo en serie de polinomios de Legendre de $f(x) = |x|$.

2.7. Demuestra que

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(x).$$

Sugerencia: usa la fórmula de Rodrigues de los polinomios de Legendre.

2.8. Demuestra que

$$P_l'(1) = l(l+1)/2$$

a partir de:

a) La fórmula de Rodrigues demostrando previamente que

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1} (x-1)^l (x+1)^l \bigg|_{x=1} = (l+1)!\, l\, (x+1)^{l-1}\Big|_{x=1} .$$

b) La función generatriz de los polinomios de Legendre.

2.9. A partir de la transformada de Fourier de los polinomios de Hermite obtén una representación integral de los mismos.

2.10. *a*) Demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x^2 H_n(x) H_m(x) =$$
$$\sqrt{\pi} 2^{n-1} (2n+1) n!\, \delta_{n,m} + \sqrt{\pi} 2^n (n+2)!\, \delta_{n,m-2} + \sqrt{\pi} 2^{n-2} n!\, \delta_{n,m+2} .$$

b) A partir del resultado anterior, demuestra que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x^2 H_1(x) H_m(x) = 15\sqrt{\pi} .$$

2.11. Demuestra que la transformada de Fourier de la función $\mathrm{e}^{-x^2/2}\, H_n(x)$ puede escribirse como $\exp(-k^2/2)(-i)^n H_n(k)$.

2.12. En espectroscopía molecular suelen aparecer con frecuencia integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x^r H_n(x) H_{n+p}(x)$$

con n, p, r enteros no negativos y $p \geq r$. Evalúa esta integral.

2.13. *a*) Demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x H_n'(x) H_m'(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)!\, \delta_{n,m-1} + \sqrt{\pi} 2^n (n-1) n!\, \delta_{n,m+1} ,$$

donde $H_n'(x) = dH_n(x)/dx$.

b) A partir del resultado anterior, demuestra que

$$\sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{e}^{-x^2}\, x H_n'(x) H_{n+p}'(x) = \sqrt{\pi} 2^{n+1} n(n+1)! .$$

2.14. Desarrolla la función $\mathrm{e}^{\lambda x}$ en serie de polinomios de Hermite y de polinomios de Laguerre.

2.15. Evalúa la integral

$$\int_0^{\infty} dx\, x^{\alpha+1}\, \mathrm{e}^{-x}\, L_n^{\alpha}(x) L_m^{\alpha}(x) \,.$$

2.16. Halla la transformada de Laplace de los polinomios de Laguerre.

2.17. La parte radial normalizada de la función de onda del átomo de hidrógeno viene dada por

$$R_{nl}(r) = \left[\alpha^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}\right]^{1/2} \mathrm{e}^{-\alpha r/2} (\alpha r)^l L_{n-l-1}^{2l+1}(\alpha r) \,,$$

donde α es una constante. Calcula la distancia media del electrón respecto del núcleo: $\langle r \rangle = \int_0^{\infty} dr\, r^3 \left[R_{nl}(\alpha r)\right]^2$.

2.18. Desarrolla en serie de polinomios de Laguerre la función salto $f(x) = H(x-a)$, siendo $H(x)$ la función de Heaviside.

2.19. Los polinomios de Chebychev de primera especie (o tipo I), $T_n(x)$, satisfacen la relación de recurrencia

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

con $T_0(x) = 1$ y $T_1(x) = x$.

a) Obtén la función generatriz

$$G(x,t) = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n, \quad |x| \leq 1, \quad |t| < 1.$$

b) Utiliza el resultado anterior para calcular $T_n(0)$, $T_n(1)$, $T_n(-1)$.

2.20. La función generatriz

$$G_\nu(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(x) t^n, \quad |x| \leq 1, \quad |t| < 1,$$

de los polinomios de Gegenbauer de grado n y orden ν viene dada por $1/(1-2xt+t^2)^\nu$ con $\nu > 0$.

a) Demuestra que

$$C_n^{\nu}(1) = \frac{(n+2\nu-1)!}{n!(2\nu-1)!}.$$

b) Halla la relación de recurrencia

$$(n+1)C_{n+1}^{\nu}(x) - 2x(n+\nu)C_n^{\nu}(x) + (n-1+2\nu)C_{n-1}^{\nu}(x) = 0.$$

2.21. *a*) Demuestra que las funciones esféricas de Bessel de primera y segunda especie, $j_n(x)$ y $n_n(x)$, satisfacen las relaciones de recurrencia

$$f_{n-1}(x) + f_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{x} f_n(x),$$
$$n f_{n-1}(x) - (n+1) f_{n+1}(x) = (2n+1) f_n'(x).$$

b) Usa estas relaciones de recurrencia para demostrar que

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) - \frac{n+1}{x} f_n(x),$$
$$f_n'(x) = \frac{n}{x} f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

c) Usa las relaciones de recurrencia anteriores para demostrar que

$$\frac{d}{dx}[x^{n+1} f_n(x)] = x^{n+1} f_{n-1}(x),$$
$$\frac{d}{dx}[x^{-n} f_n(x)] = -x^{-n} f_{n+1}(x).$$

2.22. Sean $f_n(x)$ las funciones definidas mediante las relaciones

$$f_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{(r!)^2} \quad , \quad (n+1) f_{n+1} = x f_n - f_{n+2} \quad , \quad f_n' = f_{n-1} \quad .$$

Demuestra que la función generatriz $G(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) t^n$ viene dada por $\exp(xt + 1/t)$.

2.23. Halla los coeficientes del desarrollo en serie de $J_0(k_m x)$ de la función $f(x) = 1$ definida en el intervalo $0 \le x \le a$.

2.24. Sea

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_n\left(\alpha_{nm} x\right) \; ,$$

la representación en serie de funciones de Bessel de la función $f(x)$ definida en el intervalo $[0,1]$, donde α_{nm} es la raíz m-sima de $J_n(x)$.

a) Demuestra la relación de Parseval

$$\int_0^1 dx\, x [f(x)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \left[J_{n+1}\left(\alpha_{nm}\right)\right]^2 \; .$$

b) Escogiendo $f(x) = x^n$, prueba que las raíces α_{nm} verifican la relación

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{nm}^2} = \frac{1}{4(n+1)}.$$

Capítulo 3

Ecuaciones en derivadas parciales

3.1. Introducción y definiciones

Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una ecuación sobre una función incógnita u que depende de varias variables $x, y, \ldots$ y en la que aparecen derivadas parciales de la función u:

$$F\left(x, y, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \cdots \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \cdots, u\right) = 0. \tag{3.1}$$

Este tipo de ecuaciones son importantsimas en la Ciencia pues un número enorme de sistemas e interacciones se describen mediante ecuaciones en derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación de ondas, la ecuación de Laplace y de Poisson del electromagnetismo, las ecuaciones de difusión, las ecuaciones de Maxwell, la ecuación de Schrödinger y muchas otras son ecuaciones de este tipo.

En ocasiones usaremos una notación más abreviada para denotar las derivadas parciales:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad u_{xx} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u_{xy} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Por ejemplo, la ecuación de difusión en una dimensión (en una línea) puede escribirse así:

$$u_t = u_{xx};$$

la ecuación de difusión en dos dimensiones (en una superficie) así:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy};$$

y la ecuación de ondas en tres dimensiones (en un volumen) de esta forma:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

El orden de la ecuación en derivadas parciales es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Por ejemplo, las ecuaciones de difusión y de ondas que acabamos de ver son de segundo orden. Una ecuación de tercer orden es, por ejemplo, $u_t = u_{xyz}$.

Las ecuaciones en derivadas parciales se llaman inhomogéneas cuando tienen un término (un sumando) en el que no aparece la función incógnita u. Esto implica que la función nula $u = 0$ no

es solución de estas ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación $u_t = u_{xx}$ es homogénea pero, en cambio, $u_t = u_{xx} + f(x, y)$ no es homogénea.

Las ecuaciones en derivadas parciales *lineales* son aquellas en las que la función incógnita y sus derivadas aparecen de forma lineal, es decir, son ecuaciones de la forma $L[u] = f$ donde L es un operador (diferencial) lineal, siendo f una función cualquiera. Esto significa que si u_1 y u_2 son soluciones de una EDP lineal (en la que suprimimos el término inhomogéneo, si éste existiera) entonces una combinación lineal cualquiera de estas soluciones $c_1 u_1 + c_2 u_2$ es también solución de esta EDP. Algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{es lineal,} \\ u_t &= u_y u_{xx} && \text{es no lineal,} \\ (u_{tt})^2 &= u_x && \text{es no lineal,} \\ u_{tt} &= x^2 u_{xx} && \text{es lineal.} \end{aligned}$$

En definitiva, si las funciones u_1 y u_2 satisfacen una ecuación en derivadas parciales que es lineal y homogénea, entonces una combinación lineal arbitraria de ellas, $c_1 u_1 + c_2 u_2$, también satisface esa misma ecuación.

Es bien sabido que la solución general de una ecuación diferencial *ordinaria* de orden n contiene n constantes arbitrarias. De modo similar, la solución general de una ecuación en derivadas parciales de orden n contiene n funciones arbitrarias de las variables independientes. He aquí un par de ejemplos a modo de ilustración:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = x + y &\xrightarrow{\text{sol. general}} u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \varphi(y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 &\xrightarrow{\text{sol. general}} u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y). \end{aligned}$$

Las funciones $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son arbitrarias.

Usualmente no estamos interesados en “simplemente” conocer una expresión que satisfaga la EDP en la región $\mathcal{R}$ en la que esta EDP esté definida; usualmente queremos conocer la expresión $u(x, y, \cdots)$ que *además* satisfaga ciertas relaciones o condiciones sobre la frontera o contorno Ω de la región $\mathcal{R}$. Los conceptos de linealidad y homogeneidad también se aplican a las condiciones de contorno:

- Las condiciones de contorno lineales son de la forma $(L[u])_\Omega = f$ donde L es un operador lineal y donde con la notación $(L[u])_\Omega$ queremos indicar que la expresión $(L[u])$ se evalúa sobre el contorno Ω.

- Las condiciones de contorno homogéneas son satisfechas por $u = 0$.

3.2. Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

Las ecuaciones en derivadas parciales que con más frecuencia se presentan en la Ciencia son EDP lineales de segundo orden que involucran derivadas espaciales y, en su caso, temporales de la función incognita. Estos son unos cuantos ejemplos:

- La ecuación de ondas

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3.2}$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda.

- La ecuación de Laplace
$$\nabla^2 u = 0. \tag{3.3}$$

- La ecuación de difusión
$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.4}$$
donde k es la difusividad del medio.

- La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r})\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi. \tag{3.5}$$

- La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{r})\psi = E\psi. \tag{3.6}$$

- La ecuación de Poisson
$$\nabla^2 u = f(x,y,z). \tag{3.7}$$

- La ecuación de Helmholtz
$$\nabla^2 u + \lambda u = 0. \tag{3.8}$$

- La ecuación de Klein-Gordon
$$\Box u + \lambda^2 u = 0 \tag{3.9}$$
donde $\Box \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}$.

En este capítulo sólo estudiaremos EDP lineales. Las ecuaciones no lineales son mucho más complicadas y pueden dar lugar a comportamientos muy interesantes. Un ejemplo bien conocido es la ecuación de seno-Gordon
$$u_{xx} - u_{tt} = \operatorname{sen} u$$
en la que aparecen soluciones llamadas solitones y "breathers" con propiedades muy especiales.[1]

3.2.1. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

La forma general de una EDP lineal de segundo orden (y dos variables) es:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u \;=\; G(x,y). \tag{3.10}$$

Estas ecuaciones se clasifican en tres tipos básicos que exhiben características comunes:

1. *Ecuaciones parabólicas*: $B^2 - 4AC = 0$.
   Son ecuaciones que describen flujos y procesos de difusión. Un ejemplo claro de ello es la ecuación de difusión (3.4), en la que $A = 1, E = -1/k, B = C = D = F = G = 0$.

[1] Véase, por ejemplo, *"Solitons: An Introduction"* de P. G. Drazin y R. S. Johnson (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1988).

2. *Ecuaciones hiperbólicas*: $B^2 - 4AC > 0$.
   Describen sistemas vibrantes y movimiento ondulatorio. Un ejemplo es la ecuación de ondas (3.2) en la que $A = 1, E = -1/c^2, B = C = D = F = G = 0$.

3. *Ecuaciones elípticas*: $B^2 - 4AC < 0$.
   Describen fenómenos estáticos o estacionarios. Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es la ecuación de Laplace (3.3), en la que $A = C = 1, B = D = E = F = G = 0$.

El discriminante B^2-4AC depende de x, y por lo que la ecuación puede cambiar de un tipo a otro a lo largo del dominio de integración, aunque esto es poco corriente. Los calificativos *parabólico, hiperbólico y elíptico* proceden de la analogía con la clasificación de las ecuaciones cuadráticas o secciones cónicas pues la ecuación algebraica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es hiperbólica, parabólica o elíptica si $B^2 - 4AC$ es, respectivamente, positivo, cero o negativo.

3.2.2. Condiciones de contorno

En este tema estudiaremos algunas técnicas de resolución de ecuaciones en derivadas parciales sometidas a ciertas condiciones de contorno. Es decir, la solución buscada $u(x, y)$ ha de satisfacer una cierta relación (condición) sobre una curva abierta o cerrada (el contorno) del plano (x, y) que actúa como frontera [separa la región de integración dentro de la cual queremos conocer la solución $u(x, y)$ del resto del plano (x, y)].

Existen tres tipos corriente de condiciones de contorno:

1. *Condiciones de contorno de Dirichlet*.
   Son aquellas en las que $u(x, y)$ se especifica en cada punto del contorno o frontera.

2. *Condiciones de contorno de Neumann*.
   Se especifica en cada punto del contorno la componente normal a la frontera del gradiente de u: $\nabla_n u \equiv (\nabla u)_n$

3. *Condiciones de contorno de Cauchy*.
   Se especifica en cada punto del contorno tanto u con $\nabla_n u$.

Por analogía con las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden, podría pensarse que las condiciones de contorno adecuadas son las de Cauchy, pero esto no es siempre cierto, pudiendo ser sobreabundantes. De hecho, las condiciones de contorno apropiadas, es decir, aquellas que garantizan la existencia y unicidad de las soluciones, son diferentes según la EDP sea hiperbólica, parabólica o elíptica. Vamos a ver cuáles son estas condiciones de contorno.

1. *Ecuación parabólica*. Ecuación física: ecuación de difusión.
   Las condiciones de contorno habituales para esta clase de ecuaciones son las de *Dirichlet o Neumann*. El tipo de contorno (frontera) es *abierto*.

   Mediante un ejemplo físico consistente en una barra conductora del calor se puede ver que estas condiciones de contorno son las adecuadas para esta clase de ecuaciones. Consideremos una barra inicialmente[2] $(t = t_0)$ a temperatura $u(x, t_0) = f(x)$, cuyos extremos situados en $x = a$ y $x = b$ se mantienen a la temperatura $u(x = a, t) = u_a(t)$ y $u(x = b, t) = u_b(t)$.

[2]Exigir que $u(x, t)$ tome unos determinados valores para $t = 0$ es exigir que se satisfaga una condición de contorno en sentido amplio. Más adelante, llamaremos condiciones iniciales a las condiciones de contorno que fijan $u(x, t)$ para un tiempo dado.

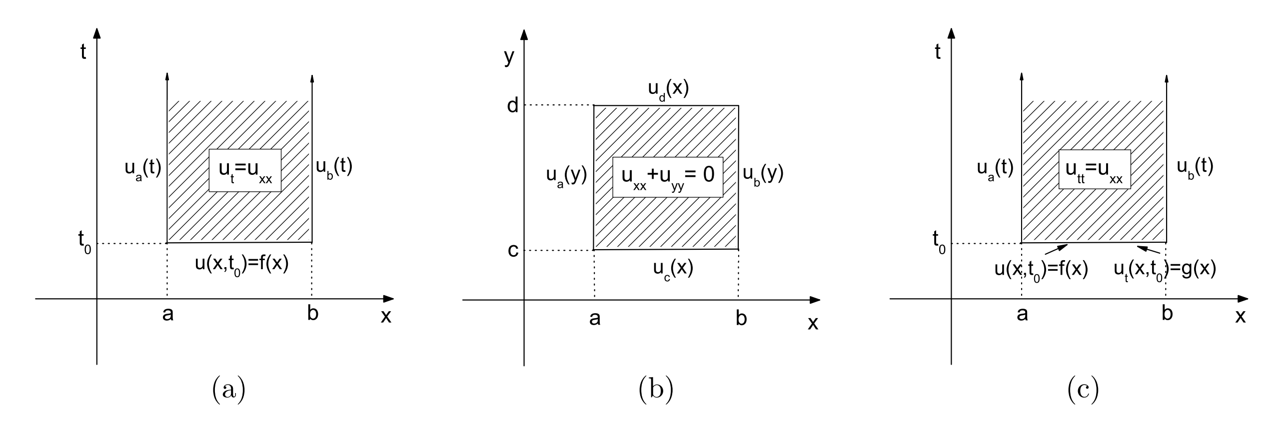


Figura 3.1: Ejemplos de regiones de integración, condiciones de contorno y tipos de fronteras de las ecuaciones (a) parabólicas, (b) elípticas, y (c) hiperbólicas.

Estas condiciones de contorno sabemos que son suficientes para determinar el valor de la solución $u(x,t)$ en un instante posterior $t > t_0$ para $a \le x \le b$. En la figura 3.1(a) se representa la región de integración de este problema (zona rayada), es decir, la región en la cual queremos hallar la solución. Es evidente que la región de integración es abierta porque no especificamos el valor de $u(x,t)$ para un instante $t > t_0$ posterior al instante inicial t_0. A esto es a lo que nos referimos cuando decimos que los contornos de los problemas parabólicos son abiertos.

▷ ***Ejercicio*** *3.1*

¿Cual sería el significado físico de condiciones de contorno de Neumann en este ejemplo de la barra? Pista: la solución tiene que ver con la ley de Fourier de la difusión del calor.

2. *Ecuación elíptica.* Ecuación física: ecuación de Laplace.
   El tipo de condiciones de contorno habitual para este tipo de ecuación también son las de *Dirichlet o Neumann.* Pero el tipo de contorno (frontera) es *cerrado.*

   Esto se ve claro con el siguiente sistema físico: para determinar el potencial eléctrico $u(x,y)$ en el interior de una región sin cargas (potencial que está descrito por la ecuación de Laplace) es suficiente, bien conocer el potencial eléctrico en la frontera (condición de Dirichlet), o bien conocer el campo eléctrico normal a la frontera (condición de Neumann) de esta región. No es necesario conocer ambos. Por ejemplo, en la figura 3.1(b) se ha representado una región rectangular $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ con condiciones de contorno de Dirichlet sobre su frontera. Estas condiciones de contorno son suficientes para hallar la solución en el interior de la región de integración (zona rayada). Es evidente que la región de integración es una región cerrada. Por eso decimos que en los problemas elípticos los contornos son cerrados.

3. *Ecuación hiperbólica.* Ecuación física: ecuación de ondas.
   En este tipo de ecuaciones, las condiciones de contorno más habituales son las de *Cauchy.* El tipo de frontera (contorno) es *abierta.*

   Un ejemplo físico de esta ecuación y de las condiciones de contorno adecuadas nos lo proporciona la cuerda vibrante. Supongamos que la cuerda está sometida a los desplazamientos $u(x=a,t) = u_a(t)$ y $u(x=b,t) = u_b(t)$ en los extremos $x = a$ y $x = b$, respectivamente.

Sabemos por nuestros conocimientos de Física (o simplemente por nuestra intuición formada por nuestra experiencia con cuerdas, hilos, cadenas, ...) que para que el problema tenga solución única es necesario conocer no sólo la posición inicial de la cuerda, $u(x, t_0) = f(x)$, sino también su velocidad inicial, $u_t(x, t_0) = g(x)$, pues la solución en un instante posterior, $u(x, t)$, depende de si, por ejemplo, se encontraba inicialmente en reposo $[g(x) = 0]$, o moviéndose $[g(x) \neq 0]$.

En la figura 3.1(c) se representa la región de integración de este problema (zona rayada), es decir, la región en la cual queremos hallar la solución. Es evidente que la región de integración es una región abierta. A esto es a lo que nos referimos cuando decimos que los contornos de los problemas hiperbólicos son abiertos.

Debe notarse que sólo hemos dado las condiciones de contorno más corrientes o habituales para cada tipo de ecuación en derivadas parciales. Por supuesto, las condiciones de contorno que pueden aparecer en la práctica (para cada tipo de ecuación) son muy variadas y no se dejan encasillar en el esquema tan simple que acabamos de exponer.

En lo que sigue nos centraremos en exponer diferentes métodos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden.

3.3. Separación de variables

El mejor modo de estudiar y entender este método es viéndolo en acción, es decir, mediante ejemplos resueltos.

▶ *Ejemplo 3.1*

Ecuación de difusión en una barra finita.
Sea una barra de longitud L en la que la temperatura de sus extremos se mantiene a cero grados. En un instante inicial $t = 0$ la barra tiene una distribución de temperaturas $u(x, t = 0) = f(x)$. Nuestro objetivo es determinar la temperatura $u(x, t)$ de la barra en cualquier punto x en cualquier instante posterior t para $0 \leq x \leq L$ y $t \geq 0$.
La EDP que describe la evolución de este sistema físico es[3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{3.11a}$$

$$CC: \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u(L, t) = 0, \end{cases} \tag{3.11b}$$

$$CI: u(x, 0) = f(x). \tag{3.11c}$$

En el método de separación de variables se comienza buscando soluciones de la EDP de la forma

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{3.12}$$

es decir, como producto de funciones que dependen sólo de una variable independiente.[4] A las soluciones de una EDP *lineal* que tienen esta la forma (producto de funciones que dependen de una única variable) y que además satisfacen las condiciones de contorno homogéneas, las llamaremos *soluciones fundamentales*. Una combinación lineal (superposición) cualquiera de soluciones fundamentales

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)\, T_n(t) \tag{3.13}$$

[3]Por supuesto, la etiqueta CC se refiere a "condiciones de contorno" y la etiqueta CI a "condición inicial" (condición de contorno sobre la variable temporal)

[4]¿Hace falta explicar por qué se llama método de *separación* de variables?

sigue siendo solución de la ecuación en derivadas parciales (por ser ésta lineal) y sigue satisfaciendo las condiciones de contorno (por ser homogéneas). A esta solución la llamaremos solución general. Nuestro objetivo es determinar las funciones $X_n(x)$, $T_n(t)$ y el valor de los coeficientes A_n que hacen que (3.13) sea la solución de la EDP que satisface las condiciones de contorno y la condición inicial.
¿Cuál es la justificación de buscar soluciones de la forma (3.13)? La razón más inmediata es que este procedimiento, inventado por Daniel Bernoulli (circa 1700), funciona. Por supuesto, no ha de funcionar siempre. Hay razones más fundamentales relacionadas con la expresión de funciones arbitrarias en forma de serie de funciones ortogonales (funciones ortogonales que son soluciones de problemas de Sturm-Liouville conectados con la ecuación en derivadas parciales a resolver; véase la sección 3.5.4), pero no profundizaremos en esta dirección.
Pasemos a calcular las soluciones fundamentales de nuestro problema (3.11). Sustituimos para ello $u(x,t) = X(x)T(t)$ en la ecuación en derivadas parciales (3.11a),

$$X(x)\frac{d}{dt}T(t) = kT(t)\frac{d^2X(x)}{dx^2}$$

y agrupamos en cada lado de la igualdad las funciones que dependan de una variable dada[5]

$$\frac{1}{kT(t)}\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2}. \tag{3.14}$$

Nótese que hemos obtenido una ecuación donde en cada miembro (a cada lado de la igualdad) hay una función que depende de una única variable: hemos *separado las variables*. El único modo de que (3.14) se satisfaga para cualquier valor de x y t (¡que son variables independientes!) es si cada miembro es igual a una constante que, siguiendo la tradición, llamaremos $-\lambda$:

$$\frac{1}{kT(t)}\frac{d}{dt}T(t) = \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda.$$

En resumen, las funciones $X(x)$ y $T(t)$ que forman las soluciones fundamentales han de verificar estas dos ecuaciones diferenciales *ordinarias*:

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda kT, \tag{3.15}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda X. \tag{3.16}$$

La solución de la primera ecuación es sencilla:

$$T(t) = T_0\,\mathrm{e}^{-\lambda kt}\,. \tag{3.17}$$

Si $\lambda < 0$ entonces $T(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$, es decir, si $\lambda < 0$, la temperatura crecería sin límite a medida que pasa el tiempo. Esto no es físicamente razonable; de hecho, esperamos que $T(t) \to 0$ pues la temperatura de los extremos de la barra está fijada a cero. Estas consideraciones nos hacen ver que al formular nuestro problema en términos físicos, existen condiciones (que en un sentido genérico podémos llamar de contorno) *implícitas* que no aparecen recogidas explícitamente en el enunciado del problema. Lo que estamos diciendo es que la traducción matemática dada en (3.11) del problema de conducción del calor en la barra no es completa: habría que añadir la condición de contorno[6]

$$u(x, t \to \infty) = \text{finita}.$$

En definitiva, concluimos que esta condición de contorno (implícita) requiere que $\lambda \geq 0$. En cualquier caso, como veremos un poco más abajo, la resolución de la parte espacial de este problema (es decir, el cálculo de las soluciones $X(t)$ admisibles) nos llevaría a esta misma conclusión: λ ha de ser positiva.

[5]Esto se consigue sin más que dividir la ecuación por la solución fundamental $X(x)T(t)$.

[6]De hecho, podríamos ser más precisos y exigir $u(x, t \to \infty) \to 0$ pues sabemos que la barra está en contacto térmico con dos focos (baños) térmicos que mantienen los extremos a temperatura cero. Esto significa que la temperatura de toda la barra tenderá a cero a medida que pase el tiempo. Por tanto $\lambda = 0$ no es tampoco admisible, salvo si la temperatura inicial de la barra es igual a cero en todas partes, lo cual convertiría en trivial al problema siendo su solución la trivial: $u(x,t) = 0$.

Ahora pasamos a buscar la forma que ha de tomar la parte espacial $X(x)$ de las soluciones fundamentales. Hemos visto que $X(x)$ ha de satisfacer la ecuación (3.16). También queremos que $X(x)$ sea tal que la solución fundamental $X(x)T(t)$ satifaga las condiciones de contorno (3.11b). En resumen, $X(x)$ ha de satisfacer las relaciones

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\lambda X, \tag{3.18a}$$

$$CC: \begin{cases} X(0) = 0, \\ X(L) = 0. \end{cases} \tag{3.18b}$$

Esto no es más que un problema de Sturm-Liouville, el cual ya hemos resuelto en el ejemplo 1.15, página 53. Su solución es

$$X_n(x) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$
$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

siendo C_n una constante arbitraria. (Nótese que el problema de Sturm-Liuville (3.18) no tiene solución distinta de la trivial para $\lambda \leq 0$.) En definitiva, las soluciones fundamentales son

$$u_n(x,t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

donde la $A_n = C_n T_0$.[7] Ahora bien, como cada una de las soluciones fundamentales $u_n(x,t)$ satisface la EDP lineal (3.11a) y las condiciones de contorno homogénea (3.11b), entonces una combinación lineal de soluciones fundamentales también satisface la EDP y las condiciones de contorno. Esto nos lleva a escribir la solución general de la siguiente forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \tag{3.19}$$

Sin embargo, esta función no es aún la solución de (3.11) porque, para cualquier elección de los coeficientes A_n, no se satisface la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ de la ecuación (3.11c). Estos coeficientes han de elegirse *cuidadosamente* de modo que

$$u(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x). \tag{3.20}$$

¿Cuáles son estos coeficientes? La respuesta es fácil si nos damos cuenta que los coeficientes A_n no son otra cosa que los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función $f(x)$. Dicho en otros términos, como las funciones $X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ son autofunciones de un problema de Sturm-Liouville [el problema definido por (3.18)], entonces cualquier función $f(x)$ bien comportada puede expresarse en términos de las autofunciones $X_n(x)$, siendo A_n los correspondientes coeficientes.[8] Por tanto,

$$A_n = \frac{\langle \operatorname{sen} n\pi x/L | f(x)\rangle}{\| \operatorname{sen} n\pi x/L\|^2} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{3.21}$$

En resumen, la solución del problema (3.11) viene dada por la relación (3.19) donde los coeficientes A_n se obtienen de la ecuación (3.21).
Por ejemplo si

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right),$$

[7] En el futuro nos ahorraremos el ir arrastrando las constantes arbitrarias procedentes de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias pues sabemos que al final las englobaremos en una única constante multiplicativa.

[8] Si esto te suena a chino, harás bien en repasar el tema dedicado al problema de Sturm-Liouville.

la solución (3.19) sería

$$u(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k(\pi/L)^2 t} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k(3\pi/L)^2 t} .$$

Un resultado interesante que podemos deducir de (3.11) es que los modos difusivos

$$A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

de longitud de onda $L/(n\pi)$ menor (es decir, aquellos con n más grande) son los que más rápidamente decaen. En particular, si existe el primer modo difusivo (esto es, si $A_1 \neq 0$), se tiene que

$$u(x,t) \simeq A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{e}^{-k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}, \qquad t \to \infty. \tag{3.22}$$

◀

El procedimiento de resolución que hemos empleado en el ejemplo anterior es bastante estándar. Resumimos a continuación sus pasos principales:

1. Hemos de asegurarnos de que la EDP a resolver es *lineal* con condiciones de contorno *homogéneas*. En caso contrario no es posible aplicar, sin más, el método de separación de variables. Veremos en el ejemplo 3.2, y con más detalle en la sección 3.5, cómo proceder cuando las condiciones de contorno no son homogéneas.

2. Hay que hallar las ecuaciones diferenciales ordinarias resultantes al asumir una solución expresada como producto de funciones de una sola variable (separación de variables) e introducir constantes de separación.

3. Hay que determinar los valores (autovalores) de las constantes de separación que permiten la existencia de soluciones (soluciones fundamentales) en la forma de producto de funciones de una única variable que satisfacen las condiciones de contorno.

4. Tras hallar todas las posibles soluciones fundamentales, se expresa la solución general como combinación lineal arbitraria de todas ellas y se calculan sus coeficientes de modo que esta solución general satisfaga la condición inicial.

La condición inicial se impone sobre la solución al final, cuando ya hemos construido la solución general (en forma de superposición de soluciones fundamentales) y, generalmente, después de imponer las condiciones de contorno.

► *Ejemplo 3.2*

Cubo dentro de un baño térmico.
Sea un cubo de arista L inicialmente ($t = 0$) en equilibrio térmico a temperatura $u = 0$.[9] El cubo se sumerge en un baño a temperatura $u_0 \neq 0$. Se pide hallar $u(\vec{r}, t)$.
Las ecuaciones que describen este problema físico son

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.23a}$$

$$CC: \quad u(x,y,z,t) = u_0 \qquad \text{para } x,y,z = 0, L, \tag{3.23b}$$

$$CI: \quad u(x,y,z,0) = 0. \tag{3.23c}$$

[9]Este valor nulo de la temperatura inicial no supone ninguna restricción puesto que origen de temperaturas es arbitrario.

Este es un problema con condiciones de contorno no homogéneas.[10] El procedimiento más sencillo para superar esta dificultad y poder aplicar sin problemas el método de separación de variables es llevando a cabo el cambio de variables $V(\vec{r},t) = u(\vec{r},t) - u_0$. Este cambio tiene una interpretación física bien natural: lo que hacemos es trabajar en una escala nueva de temperaturas V cuyo cero es la temperatura del baño. Sobre la nueva variable V la ecuación (3.23) se reduce a

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{3.24a}$$

$$CC: \quad V(x,y,z,t) = \underset{\uparrow}{0} \qquad \text{para } x,y,z = 0, L. \tag{3.24b}$$

La EDP es lineal y las condiciones de contorno son homogéneas, por lo que podemos aplicar el método de separación de variables tal como se hizo en el ejemplo anterior.
Empezamos buscando soluciones de la EDP cuya forma sea el producto de funciones que dependen de una sola variable

$$V(\vec{r},t) = R(\vec{r})T(t),$$

donde

$$R(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Sustituyendo esta expresión de $V(\vec{r},t)$ en la EDP (3.24), se obtiene

$$\frac{1}{R}\nabla^2 R = \frac{1}{kT}\frac{dT}{dt}.$$

Como cada miembro de esta igualdad depende de variables (¡independientes!) que no aparecen en el otro miembro, se concluye que esto sólo puede verificarse si ambos miembros son iguales a una constante (que, por conveniencia en la notación, llamaremos λ):

$$\frac{1}{R}\nabla^2 R = \frac{1}{kT}\frac{dT}{dt} = -\lambda.$$

La solución de la ecuación temporal $\frac{dT}{dt} = -\lambda k T$ es sencilla:

$$T(t) = \mathrm{e}^{-k\lambda t}.$$

Se deduce así que $\lambda \geq 0$ ya que la solución no sería físicamente aceptable (condición de contorno implícita) si $\lambda < 0$.
Resolvemos la ecuación diferencial espacial

$$\frac{1}{R}\nabla^2 R = -\lambda$$

también mediante separación de variables escribiendo[11] $R(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$ de modo que

$$\frac{1}{XYZ}\left[YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2}\right] = -\lambda,$$

es decir,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\lambda.$$

Esto sólo puede verificarse si $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$ no depende de x, $\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}$ no depende de y, y $\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$ no depende de z, es decir, si

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2,$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -\beta^2,$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\gamma^2,$$

[10] Daremos en la sección 3.5 una discusión más detallada de cómo resolver este tipo de problemas.
[11] Por supuesto, podríamos haber sustituido directamente $u(x,t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ desde el principio.

donde α, β y γ son constantes tales que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \lambda.$$

Las condiciones de contorno homogéneas (3.24b) implican que $X(0) = X(L) = 0$, es decir

$$V(x=0,y,z,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0, \tag{3.25}$$

$$V(x=L,y,z,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(L) = 0. \tag{3.26}$$

Vemos pues que la función $X(x)$ de nuestra solución fundamental $X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ ha de ser la solución del problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2X}{dx^2} = -\alpha^2 X,$$

$$CC: \quad \begin{cases} X(0) = 0, \\ X(L) = 0. \end{cases}$$

Las soluciones posibles (autofunciones) son

$$X_{n_x}(x) = \operatorname{sen} \alpha_{n_x} x$$

donde los autovalores α^2 vienen dados por

$$\alpha_{n_x} = n_x \frac{\pi}{L}$$

con $n_x = 1, 2, \ldots$. Las soluciones para $Y(y)$ y $Z(z)$ se obtienen de igual modo:

$$Y_{n_y}(y) = \operatorname{sen} \beta_{n_y} y, \quad \beta_{n_y} = n_y \frac{\pi}{L},$$

$$Z_{n_z}(z) = \operatorname{sen} \gamma_{n_z} z, \quad \gamma_{n_z} = n_z \frac{\pi}{L},$$

con $n_y = 1, 2, \ldots$ y $n_z = 1, 2, \ldots$ En definitiva, las soluciones fundamentales son

$$V_{n_x n_y n_z}(\vec{r}, t) = \mathrm{e}^{-k(n_x^2+n_y^2+n_z^2)\frac{\pi^2}{L^2}t} \operatorname{sen}\left(n_x \frac{\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(n_y \frac{\pi}{L} y\right) \operatorname{sen}\left(n_z \frac{\pi}{L} z\right).$$

La solución general del problema homogéneo (3.24) es por tanto

$$V(\vec{r}, t) = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} A_{n_x n_y n_z} V_{n_x n_y n_z}(\vec{r}, t)$$

y, por consiguiente, la solución general que satisface (3.23a) y (3.23b) es

$$u(\vec{r}, t) = u_p(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) = u_0 + \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} A_{n_x n_y n_z} V_{n_x n_y n_z}(\vec{r}, t).$$

Nos resta determinar los valores de los coeficientes $A_{n_x n_y n_z}$ que hacen que $u(\vec{r}, t)$ satisfaga la condición inicial (3.23c), $u(\vec{r}, t=0) = 0$. Es decir, los coeficientes $A_{n_x n_y n_z}$ han de ser tales que

$$-u_0 = \sum_{n_x=1}^{\infty} \sum_{n_y=1}^{\infty} \sum_{n_z=1}^{\infty} A_{n_x n_y n_z} \operatorname{sen}\left(n_x \frac{\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(n_y \frac{\pi}{L} y\right) \operatorname{sen}\left(n_z \frac{\pi}{L} z\right). \tag{3.27}$$

Sabemos que

$$\int_0^L dw \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} w\right) \operatorname{sen}\left(m \frac{\pi}{L} w\right) = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

si $n, m = 1, 2, \ldots$ De este resultado y de la ecuación (3.27) se deduce que

$$A_{n_x n_y n_z} = -\frac{u_0}{(L/2)^3} \int_0^L \int_0^L \int_0^L dx\, dy\, dz \operatorname{sen}\left(n_x \frac{\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(n_y \frac{\pi y}{L}\right) \operatorname{sen}\left(n_z \frac{\pi z}{L}\right).$$

Pero

$$\int_0^L \operatorname{sen}\left(n_w \frac{\pi}{L} w\right) dw = \frac{L}{n_w \pi}[1 - \cos(n_w \pi)] = \begin{cases} 0 & \text{si } n_w \text{ es par,} \\ \dfrac{2L}{n_w \pi} & \text{si } n_w \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por tanto

$$A_{n_x n_y n_z} = \begin{cases} -\dfrac{64}{\pi^3 n_x n_y n_z} u_0 & \text{si } n_x, n_y, n_z \text{ son impares,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En definitiva, el campo de temperaturas $u(\vec{r}, t)$ del cubo viene dado por la expresión

$$u(\vec{r}, t) = u_0 - u_0 \sum_{\substack{n_x, n_y, n_z = 1 \\ n_x, n_y, n_z \text{impar}}}^{\infty} \frac{64}{\pi^3 n_x n_y n_z} \operatorname{sen}\left(n_x \frac{\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(n_y \frac{\pi}{L} y\right) \operatorname{sen}\left(n_z \frac{\pi}{L} z\right) \mathrm{e}^{-k(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \frac{\pi^2}{L^2} t} . \tag{3.28}$$

Los modos difusivos con un valor de n_x, n_y, n_z grande decaen muy rápidamente (exponencialmente) de modo que para $t \gg \frac{L^2}{k}$ el campo de temperaturas se puede aproximar por

$$u(\vec{r}, t) \simeq u_0 \left[1 - \frac{64}{\pi^3} \mathrm{e}^{-3 \frac{\pi^2}{L^2} kt} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L}\right], \qquad t \gg \frac{L^2}{k}.$$

◀

▶ *Ejemplo 3.3*

Membrana vibrante circular.
En este ejemplo vamos a calcular los modos normales de vibración de una membrana circular de radio ρ sujeta por su perímetro (membrana de un tambor). En otros términos, queremos en este ejemplo encontrar las soluciones que vibran (oscilan en el tiempo) con una única frecuencia ω, es decir, buscamos soluciones de la forma

$$V(\vec{r}, t) = u(\vec{r})\, \mathrm{e}^{i\omega t}$$

donde $V(\vec{r}, t)$ nos da el valor del desplazamiento V del punto de la membrana situado en $\vec{r}$ en el instante t. Nuestro objetivo es, pues, determinar la dependencia espacial $u(\vec{r})$ de esta solución.
Sustituyendo esta expresión en la ecuación de ondas (3.2) bidimensional

$$\nabla^2 V(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\omega t}\, \nabla^2 u(\vec{r}) &= \frac{1}{c^2} u(\vec{r}) \frac{d^2}{dt^2} \mathrm{e}^{i\omega t} \\ &= \frac{(i\omega)^2}{c^2} u(\vec{r})\, \mathrm{e}^{i\omega t} . \end{aligned}$$

Es decir, la dependencia espacial de los modos normales de vibración $u(\vec{r})$ viene regida por la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0,$$

donde $k = \omega/c$ es el número de ondas.

En resumen, debemos resolver el siguiente problema

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0, \tag{3.29a}$$

$$CC: \quad u(r=\rho) = 0, \tag{3.29b}$$

donde la condición de contorno se debe a que la membrana circular de radio ρ esta sujeta (no se puede desplazar) en su borde. La simetría del problema aconseja utilizar coordenadas polares. En estas coordenadas el operador laplaciano es

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

y la ecuación de Helmholtz se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}u + k^2 u = 0.$$

Utilizaremos el método de separación de variables y buscamos soluciones de la forma

$$u(\vec{r}) = u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Sustituyendo en (3.29a) se tiene

$$\frac{\Theta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right) + \frac{R}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta + k^2 R\Theta = 0,$$

es decir,

$$\frac{1}{R\,r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right) + \frac{1}{r^2\Theta}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta + k^2 = 0,$$

o, si multiplicamos la ecuación por r^2,

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right) + k^2r^2 = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}.$$

Esta igualdad exige que cada uno de sus miembros sean iguales a una constante (que llamaremos n^2):

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}R\right) + k^2r^2 = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = n^2.$$

Por tanto $R(r)$ y $\Theta(\theta)$ han de satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0, \tag{3.30}$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + \left(k^2r^2 - n^2\right)\, R = 0. \tag{3.31}$$

Como la función $u(r,\theta)$ ha de ser monovaluada, $u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$ (condición de contorno implícita), debe ocurrir que $\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)$. Esto significa que la solución $\Theta(\theta)$ que buscamos debe ser solución del problema de Sturm-Liouville periódico:

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + n^2\Theta = 0, \tag{3.32a}$$

$$\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta)\,. \tag{3.32b}$$

Veamos cuál es su solución:

- Si $n \neq 0$, la solución de (3.32a) es simplemente una combinación lineal de senos y cosenos:

$$\Theta(\theta) = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta \end{array} \right\} \tag{3.33}$$

donde el símbolo

$$\left\{ \begin{array}{c} f(x) \\ g(x) \end{array} \right\} \equiv Af(x) + Bg(x)$$

es sólo un modo, en ocasiones conveniente, de denotar una combinación lineal cualquiera de las funciones f y g. Debe notarse que (3.33) es válida incluso para $n^2 < 0$. En este caso (3.33) puede escribirse de este modo equivalente:

$$\Theta(\theta) = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{senh}(\sqrt{-n^2}\theta) \\ \cosh(\sqrt{-n^2}\theta) \end{array} \right\}. \tag{3.34}$$

- Si $n = 0$, la solución es $\Theta(\theta) = A\theta + B$, siendo A y B constantes arbitrarias.

Pero la condición (3.32b), $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$, exige que:

- Si $n \neq 0$, entonces, por (3.33), debe ocurrir que n ha de ser entero, o, más concretamente, debe ocurrir que $n = 1, 2, \ldots$ Debe notarse también que los otros valores $n = -1, -2, -3, \ldots$ posibles no conducen a soluciones fundamentales, $R(r)\operatorname{sen}(n\theta)$ ó $R(r)\cos(n\theta)$, distintas de las que se encuentran con $n = 1, 2, \ldots$ pues $\operatorname{sen}(-n\theta) = -\operatorname{sen}(n\theta)$ y $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$. Debe notarse también que la constante de separación n^2 ha de ser positiva, pues si fuera negativa la solución dada por (3.34) no podría satisfacer la propiedad $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$.
- Si $n = 0$, entonces debe ocurrir que $\Theta(\theta) = B = \text{const}$. En este caso, la solución fundamental viene dada simplemente por $R(r)$.

En resumen, todas las soluciones admisibles del problema de Sturm-Liouville (3.32) son

$$\Theta(\theta) = \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta \end{array} \right\} \quad \text{para} \quad n = \overset{\downarrow}{0}, 1, 2, \ldots \tag{3.35}$$

Por otro lado, la ecuación radial (3.31) no es más que la ecuación de Bessel, cuya solución es una combinación de funciones de Bessel de primera y segunda especie

$$R(r) = \left\{ \begin{array}{c} J_n(kr) \\ N_n(kr) \end{array} \right\}.$$

Pero sabemos que la función $N_n(kr)$ diverge cuando $r \to 0$, por lo que no puede aparecer en la solución fundamental ya que, obviamente, la amplitud de vibración de la membrana no puede ser infinita (condición de contorno implícita). Esto significa que las soluciones fundamentales son:

$$u(r, \theta) = J_n(kr) \left\{ \begin{array}{c} \operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta \end{array} \right\} \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

o de forma más explícita:

$$u(r, \theta) = \begin{cases} J_0(kr), & \\ J_n(kr)\, \operatorname{sen} n\theta, & n = 1, 2, \ldots \\ J_n(kr)\, \cos n\theta, & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Si la membrana está sujeta en su borde exterior, $r = \rho$, entonces $u(r = \rho, \theta) = 0$, y por tanto debe ocurrir que

$$J_n(k\rho) = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

lo que implica que el número de ondas de los modos normales de vibración no toma cualquier valor, sino que son justamente iguales a

$$k_{nm} = \frac{\alpha_{nm}}{\rho},$$

siendo α_{nm} es el m-ésimo cero de la función de Bessel de orden n: $J_n(\alpha_{nm}) = 0$. Algunos de los valores de estos ceros se dan en la tabla 3.1. Los modos normales de vibración de la membrana circular son por tanto:

$$\begin{cases} u_{0m} \equiv J_0(\alpha_{0m} r/\rho), \quad m = 1, 2, \ldots, \\ u^{\mathrm{s}}_{nm} \equiv J_n(\alpha_{nm} r/\rho)\, \operatorname{sen} n\theta, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots, \\ u^{\mathrm{c}}_{nm} \equiv J_n(\alpha_{nm} r/\rho)\, \cos n\theta, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

$\mathbf{J_n(x)}$	$\alpha_{\mathbf{n1}}$	$\alpha_{\mathbf{n2}}$	$\alpha_{\mathbf{n3}}$	$\alpha_{\mathbf{n4}}$	$\alpha_{\mathbf{n5}}$
$\mathbf{J_0(x)}$	2.40	5.52	8.65	11.79	14.93
$\mathbf{J_1(x)}$	3.83	7.02	10.17	13.32	16.47
$\mathbf{J_2(x)}$	5.14	8.42	11.62	14.80	17.96
$\mathbf{J_3(x)}$	6.38	9.76	13.02	16.22	19.41
$\mathbf{J_4(x)}$	7.59	11.06	14.37	17.62	20.83

Tabla 3.1: Valores de los primeros ceros de las primeras funciones de Bessel de primera especie [AS72, SA96].

Los cuatro primeros modos de vibración (es decir, los cuatro con frecuencia de vibración $\omega_{nm} = ck_{nm}$ menor) de la membrana son

$$\textbf{Modo 1:} \quad k = \frac{2'40}{\rho}, \quad \omega = 2'40\frac{c}{\rho}, \qquad u_{0,1}(r,\theta) = J_0\left(2'40\frac{r}{\rho}\right)$$

$$\textbf{Modo 2:} \quad k = \frac{3'83}{\rho}, \quad \omega = 3'83\frac{c}{\rho}, \qquad \begin{cases} u^{\mathrm{s}}_{1,1}(r,\theta) = J_1\left(3'83\frac{r}{\rho}\right)\operatorname{sen}\theta \\ u^{\mathrm{c}}_{1,1}(r,\theta) = J_1\left(3'83\frac{r}{\rho}\right)\cos\theta \end{cases}$$

$$\textbf{Modo 3:} \quad k = \frac{5'14}{\rho}, \quad \omega = 5'14\frac{c}{\rho}, \qquad \begin{cases} u^{\mathrm{s}}_{2,1}(r,\theta) = J_2\left(5'14\frac{r}{\rho}\right)\operatorname{sen}2\theta \\ u^{\mathrm{c}}_{2,1}(r,\theta) = J_2\left(5'14\frac{r}{\rho}\right)\cos 2\theta \end{cases}$$

$$\textbf{Modo 4:} \quad k = \frac{5'52}{\rho}, \quad \omega = 5'52\frac{c}{\rho}, \qquad u_{0,2}(r,\theta) = J_0\left(5'52\frac{r}{\rho}\right)$$

En la figura 3.2 hemos representado estos seis primeros modos de vibración de la membrana circular. En la figura 3.3 representamos la evolución temporal de la membrana de un tambor cuya vibración viene dada sólo por el segundo modo de vibración cosenoidal $u^{\mathrm{c}}_{1,1}(r,\theta) = J_1(\alpha_{1,1}r)\cos\theta$ sin mezcla de otros modos. Es decir, hemos representado (la parte real de) $u^{\mathrm{c}}_{1,1}(r,\theta)\,\mathrm{e}^{i\omega_{1,1}t}$.
Si quieres disfrutar de una representación dinámica (una animación) de estos modos de vibración consulta la página web `http://www.unex.es/eweb/fisteor/santos/mma`

▷ ***Ejercicio*** *3.2*

1. *Usa la tabla 3.1 para hallar los modos de vibración 5, 6 y 7.*
2. *En este ejercicio se pide hallar el desplazamiento en un instante t cualquiera de una membrana vibrante circular sujeta por su borde. Para ello resuelve la ecuación de ondas bidimensional*

$$\nabla^2 V(\vec{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

mediante separación de variables proponiendo soluciones fundamentales de la forma $V(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) = u(r,\theta)T(t)$. Demuestra que $T(t) = e^{i\omega t}$ y que la solución general del problema vendría dada por la relación

$$V(r,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0m}(r,\theta)\left\{\begin{array}{c} e^{i\omega_{0m}t} \\ e^{-i\omega_{0m}t}\end{array}\right\} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{c} u^s_{nm}(r,\theta) \\ u^c_{nm}(r,\theta)\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} e^{i\omega_{nm}t} \\ e^{-i\omega_{nm}t}\end{array}\right\}$$

o, equivalentemente, por

$$V(r,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0m}(r,\theta)\left\{\begin{array}{c} \operatorname{sen}\omega_{0m}t \\ \cos\omega_{0m}t\end{array}\right\} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{c} u^s_{nm}(r,\theta) \\ u^c_{nm}(r,\theta)\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} \operatorname{sen}\omega_{nm}t \\ \cos\omega_{nm}t\end{array}\right\}$$

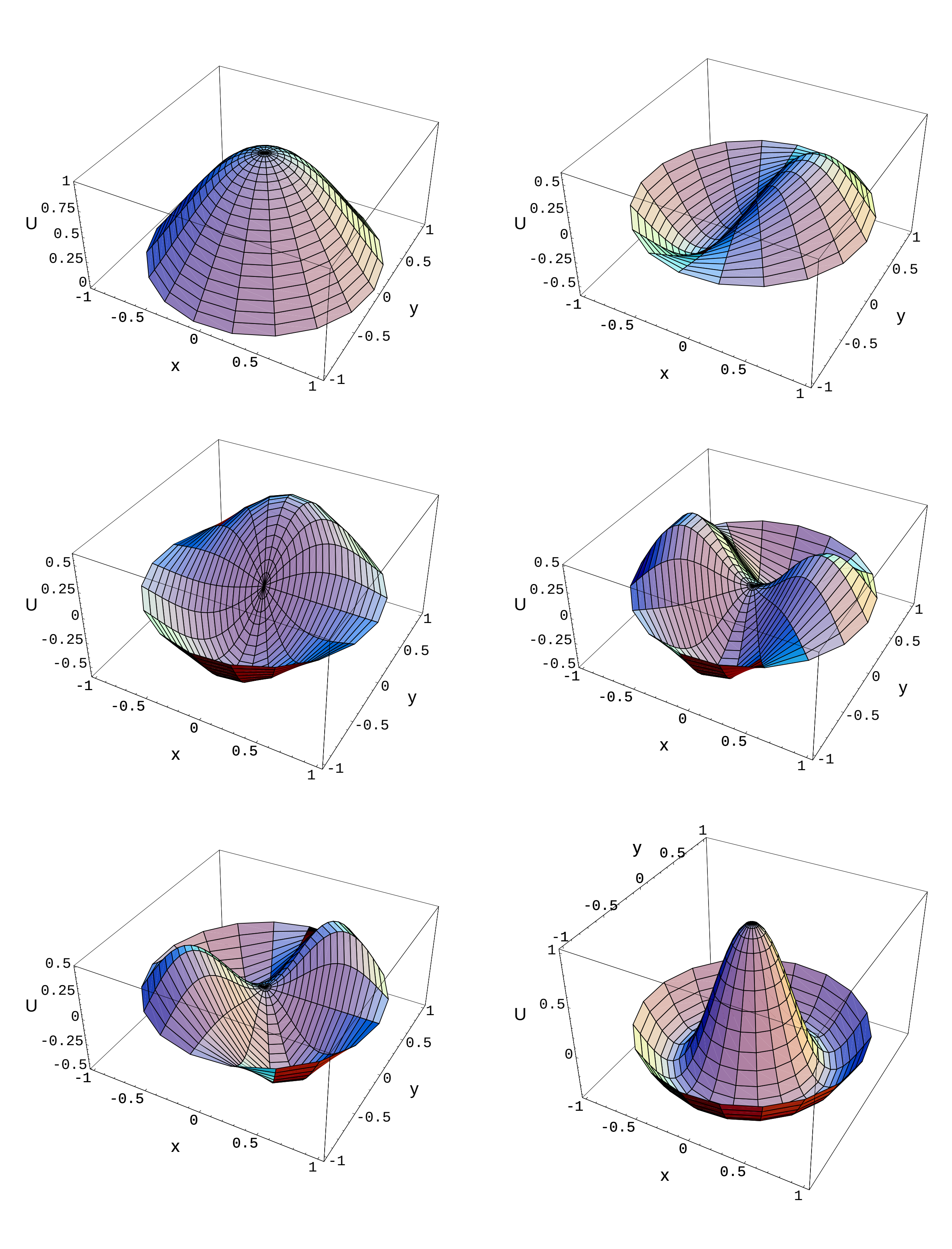


Figura 3.2: Representaciones de los seis primeros modos de vibración (de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) u_0, $u^{\mathsf{c}}_{1,1}$, $u^{\mathsf{s}}_{1,1}$, $u^{\mathsf{c}}_{2,1}$, $u^{\mathsf{s}}_{2,1}$, $u_{0,2}$ de una membrana circular de radio $\rho = 1$.

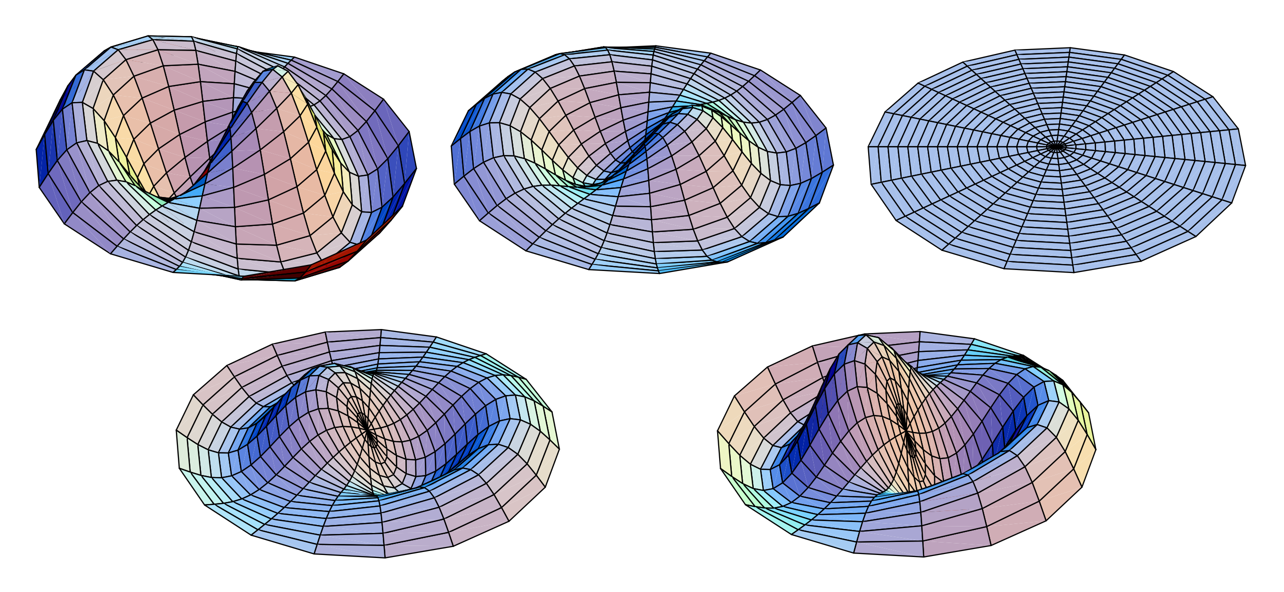


Figura 3.3: Evolución temporal a lo largo de un semiperiodo del primer modo de vibración $u^{\mathsf{c}}_{1,1}(r,\theta)\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t}$ para (de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo) $t = 0, T/8, T/4, 3T/8, T/2$, donde $T = 2\pi/\omega_1$ es su periodo de oscilación.

donde $\omega_{nm} = c\alpha_{nm}/\rho$.
Demuestra también que si la velocidad inicial es nula, $V_t(r,\theta,0) = 0$, *entonces la solución general toma la forma (véase el ejemplo 3.5)*

$$V(r,\theta,t) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m u_{0m}(r,\theta)\cos\omega_m^{(0)}t + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{c} u^s_{nm}(r,\theta) \\ u^c_{nm}(r,\theta)\end{array}\right\}\cos\omega_{nm}t$$

donde d_m *es una constante arbitraria a determinar por las condiciones iniciales. Finalmente escribe la solución* $V(r,\theta,t)$ *para este caso si la posición inicial de la membrana viene dada por (i)* $V(r,\theta,0) = u_{0,1}(r,\theta)$, *(ii)* $V(r,\theta,0) = u_{0,1}(r,\theta) + 2u^s_{1,2}(r,\theta)$.

◀

▶ *Ejemplo 3.4*

Potencial en el interior de un cilindro infinito.
Sea un cilindro de radio ρ y cuya superficie esta fijada a un potencial $V(\rho,\theta) = f(\theta)$ que es independiente de la posición z a lo largo del cilindro. Queremos calcular el potencial en el interior del cilindro asumiendo que éste es muy largo de modo que es posible despreciar los efectos de los extremos. Por este motivo trabajaremos con coordenadas polares (r,θ) en vez de usar coordenadas cilíndricas (r,θ,z) dado que la coordenada z no juega ningún papel en este problema. El problema matemático a resolver es

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0, \qquad 0 \le r \le \rho, \tag{3.36a}$$

$$CC: \quad u(r=\rho,\theta) = f(\theta). \tag{3.36b}$$

El laplaciano es polares es

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

de modo que la ecuación (3.36a) se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = 0. \tag{3.37}$$

Usamos el método de separación de variables y buscamos soluciones fundamentales de la forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Sustituyendo esta expresión en (3.37) se obtiene

$$\Theta\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\Theta}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{R}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0 \tag{3.38}$$

es decir,

$$r^2\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\,. \tag{3.39}$$

Esta relación sólo puede verificarse si el término de la derecha, que depende sólo de θ, y el término de la izquierda, que depende sólo de r, son iguales a una constante que llamaremos λ^2:

$$\lambda^2 = \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr}, \tag{3.40}$$

$$-\lambda^2 = \frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}. \tag{3.41}$$

Para que la solución sea monovaluada, la función $\Theta(\theta)$ debe ser periódica con periodo 2π: $\Theta(\theta) = \Theta(\theta \pm 2\pi)$. Este problema es justamente el problema de Sturm-Liouville periódico (3.32), página 165. Podemos concluir como entonces que las únicas soluciones admisibles son

$$\Theta_0(\theta) = \text{const}$$

si $\lambda = 0$, y

$$\Theta_n(\theta) = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix} \right\} \tag{3.42}$$

si $\lambda = n$. La ecuación (3.41) sobre la variable radial es una ecuación (equidimensional) de Euler:

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - n^2R = 0\,. \tag{3.43}$$

En su solución distinguimos dos casos:

1. $n = 0$. La ecuación se reduce a $R''/R' = -1/r$, por lo que $\ln R' = -\ln r + \text{const}$ y $R' = \text{const}/r$, y por tanto

$$R(r) = a_0 + b_0 \ln r \equiv R_0(r)\,. \tag{3.44}$$

La solución fundamental para $n = 0$ es por consiguiente

$$u_0(r,\theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \ln r \end{matrix} \right\}. \tag{3.45}$$

2. $n = 1, 2, \cdots$ Ahora buscamos soluciones de la forma $R(r) = r^\alpha$ siendo α una cantidad a determinar. Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior se obtiene fácilmente que $\alpha = \pm n$, de modo que la solución es

$$R_n(r) = \left\{ \begin{matrix} r^n \\ r^{-n} \end{matrix} \right\}. \tag{3.46}$$

La solución $u_n(r,\theta)$ para este caso es por tanto

$$u_n(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = \left\{ \begin{matrix} \operatorname{sen} n\theta \\ \cos n\theta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} r^n \\ r^{-n} \end{matrix} \right\}. \tag{3.47}$$

En resumen la solución general de la ecuación (3.37) es

$$u(r,\theta) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + b_n r^{-n}\right) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n r^n + d_n r^{-n}\right) \operatorname{sen} n\theta. \tag{3.48}$$

Pero sabemos que el potencial en el interior del cilindro es finito, en particular $u(r = 0, \theta) = \text{finito}$ (condición de contorno implícita) de modo que en (3.48) los coeficientes de $\ln r$ y r^{-n} deben ser nulos

para que la solución final se comporte bien en $r = 0$. Por tanto, la solución general de la EDP de Laplace (3.36a) que satisface las condiciones de contorno implícitas (solución finita y monovaluada) es:

$$u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \operatorname{sen} n\theta. \tag{3.49}$$

Por supuesto, los coeficientes a_n y c_n de la solución final se determinan exigiendo que la solución satisfaga la condición de contorno (3.36b):

$$u(\rho,\theta) = f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^n \operatorname{sen} n\theta. \tag{3.50}$$

Nótese que a_0, $a_n\rho^n$ y $c_n\rho^n$ son simplemente los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función $f(\theta)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta \ , \\ a_n\, \rho^n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\, d\theta \ , \\ c_n\, \rho^n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen}(n\theta)\, d\theta \ , \end{aligned}$$

En la figura 3.4 se han representado las líneas equipotenciales en el interior del cilindro para varias condiciones de contorno $u(\rho,\theta) = f(\theta)$. La figura 3.4.(a) corresponde al caso en que

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le \theta < \pi \\ -1 & \text{si} \quad \pi \le \theta \le 2\pi \end{cases} \tag{3.51}$$

No es difícil comprobar que para este caso $a_n = 0$ y

$$c_n\, \rho^n = (1 - (-1)^n)\ \frac{2}{n\,\pi}.$$

En la figura 3.4.(b) se han representado las líneas equipotenciales para el caso en el que

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le \theta < \pi/2 \\ -1 & \text{si} \quad \pi/2 \le \theta < \pi \\ 1 & \text{si} \quad \pi \le \theta < 3\pi/2 \\ -1 & \text{si} \quad 3\pi/2 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \tag{3.52}$$

En este caso $a_n = 0$ y

$$c_n\, \rho^n = \frac{-4\ \left(\cos(\frac{n\,\pi}{2}) + \cos(\frac{3\,n\,\pi}{2})\right)\ \sin(\frac{n\,\pi}{4})^2}{n\,\pi}.$$

Finalmente, en la figura 3.4.(b) se han representado las líneas equipotenciales cuando

$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \le \theta < \pi/2 \\ 2/3 & \text{si} \quad \pi/2 \le \theta < \pi \\ 1/3 & \text{si} \quad \pi \le \theta < 3\pi/2 \\ 0 & \text{si} \quad 3\pi/2 \le \theta \le 2\pi \end{cases} \tag{3.53}$$

Ahora $a_0 = 1/2$, $a_n = 0$, para $n = 1, 2, \ldots$ y

$$c_n\, \rho^n = \frac{3 - (-1)^n\ \left(1 + 2\ \cos(\frac{n\,\pi}{2})\right)}{3\,n\,\pi}\ .$$

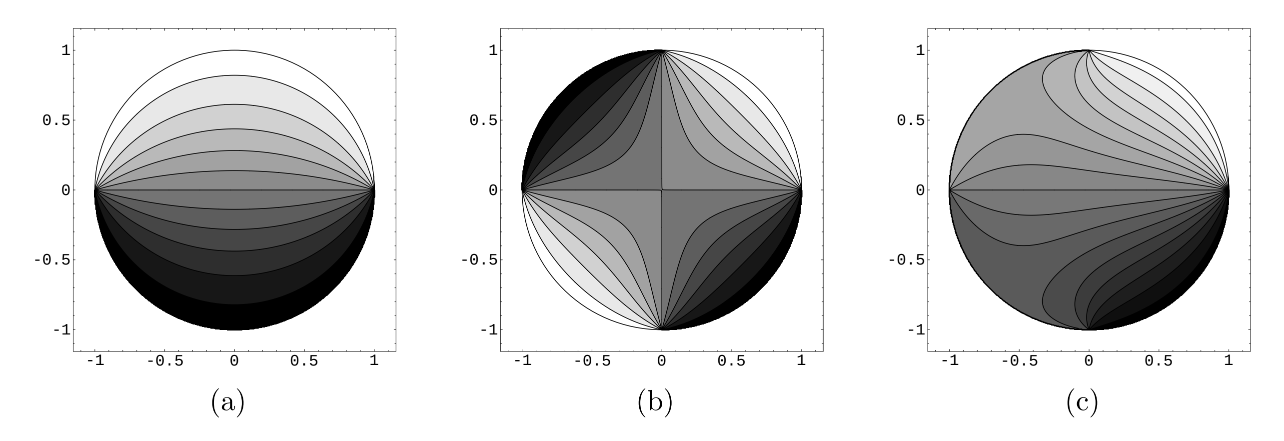


Figura 3.4: Líneas equipotenciales en el interior del cilindro cuando el potencial sobre su superficie $u(\rho = 1, \theta) = f(\theta)$ viene dada por (a) la ecuación (3.51), (b) la ecuación (3.52), y (c) la ecuación (3.53). El potencial en una región zona es tanto menor cuanto más oscura es esa zona.

▷ ***Ejercicio*** *3.3*

Calcula el potencial eléctrico en el exterior *del cilindro, es decir, resuelve el problema*

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0, \qquad r \geq \rho, \tag{3.54a}$$

$$CC: \quad u(r=\rho,\theta) = f(\theta) \tag{3.54b}$$

teniendo en cuenta que $u(r \to \infty, \theta) =$ finito.

◀

▶ *Ejemplo 3.5*

En este ejemplo vamos a calcular mediante separación de variables la solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - u \tag{3.55}$$

que satisface las condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3.56}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{3.57}$$

y las condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(1,t) = 0. \tag{3.58}$$

Proponemos la solución fundamental como producto de una función de x y otra de t: $u(x,t) = X(x)T(t)$. Insertando esta expresión en la EDP se obtiene

$$TX'' = XT'' + XT,$$

donde hemos usado la notación $X'' = d^2X/dx^2$ y $T'' = d^2T/dt^2$. Tras dividir por XT se obtiene:

$$\frac{T''}{T} - 1 = \frac{X''}{X}.$$

El término de la izquierda depende sólo de la variable temporal y el de la derecha de la variable (independiente) espacial. Esto significa que la relación anterior sólo puede ser cierta si ambos términos son iguales a una constante que llamaremos $-\lambda^2$, es decir,

$$\frac{T''}{T} - 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Para que la solución fundamental $u = XT$ satisfaga las condiciones de contorno para todo tiempo t debe ocurrir que $X(0) = X(1) = 0$. Por tanto $X(x)$ ha de ser solución del siguiente problema de Sturm-Liouville:

$$X'' = -\lambda^2 X, \tag{3.59}$$

$$X(0) = X(1) = 0. \tag{3.60}$$

Este problema ya se ha resuelto en el ejemplo 1.15, página 53, sin más que hacer $L = 1$ allí. Los únicos valores posibles de λ (autovalores) que conducen a soluciones no triviales (no nulas) de la ecuación (3.59) que satisfacen las condiciones de contorno (3.60) son

$$\lambda = \lambda_n = n\pi, \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

Las correspondientes soluciones (autofunciones) son

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(\lambda_n x) = \operatorname{sen}(n\pi x). \tag{3.61}$$

La ecuación para T correspondiente a cada uno de los valores (autovalores) posibles de la constante de separación, $\lambda = \lambda_n = n\pi$, es

$$T'' = -(\lambda_n^2 - 1)T \equiv -\omega_n^2 T$$

y por tanto

$$T_n(t) = A\cos(\omega_n t) + B\operatorname{sen}(\omega_n t). \tag{3.62}$$

Escribimos ahora la solución general de nuestro problema (EDP, más condiciones de contorno y más condiciones iniciales) como superposición de las soluciones fundamentales:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n\pi x)\left[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\operatorname{sen}(\omega_n t)\right]. \tag{3.63}$$

La condición inicial (3.57) nos dice que la velocidad inicial es nula:

$$\begin{aligned} 0 = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \operatorname{sen}(n\pi x)\left[-A_n\operatorname{sen}(\omega_n t) + B_n\cos(\omega_n t)\right]_{t=0} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \operatorname{sen}(n\pi x), \end{aligned}$$

lo que implica $B_n = 0$, por lo que (3.63) se reduce a

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x)\cos(\omega_n t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x)\cos\left(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, t\right). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Por supuesto, los valores de A_n se determinan exigiendo que la solución (3.64) satisfaga la condición inicial (3.56) que nos fija la posición inicial:

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(n\pi x).$$

Esto significa que los coeficientes A_n son simplemente los coeficientes del desarrollo de Fourier de la función $u_0(x)$:

$$A_n = \frac{\langle \operatorname{sen}(n\pi x) | u_0 \rangle}{\| \operatorname{sen}(n\pi x) \|^2} = 2\int_0^1 dx\, u_0(x)\, \operatorname{sen}(n\pi x).$$

◀

3.4. Método de las transformadas integrales

Los métodos de resolución de EDP que involucran transformadas integrales son especialmente adecuados cuando los intervalos en los que el problema está definido tienen un tamaño infinito. Consisten esencialmente en aplicar una transformada integral (típicamente de Fourier o de Laplace) sobre la EDP de n variables para, en el espacio propio de la transformada integral, reducirla bien a otra EDP con $n-1$ variables, o bien directamente a una ecuación diferencial ordinaria si $n=2$. En estos procedimiento las condiciones de contorno (en sentido amplio, incluyendo las condiciones iniciales) se insertan de un modo automático.[12]

En general, para ecuaciones parabólicas ("difusivas"), conviene tomar transformada de Laplace con respecto al tiempo. Si las variables espaciales recorren la recta real, es conveniente tomar transformada de Fourier. Si el espacio es semiinfinito, puede convenir tomar transformada de Fourier seno o coseno o transformada de Laplace.

Vamos a estudiar esta técnica mediante unos ejemplos.

▶ *Ejemplo 3.6*

Transformada de Laplace.

Sea un medio semiinfinito cuya superficie $x=0$ se mantiene a temperatura u_0. Si la temperatura inicial del medio es $u=0$, se pide calcular $u(x,t)$.

Traducimos el problema físico a lenguaje matemático:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad x>0, \quad t>0, \tag{3.65a}$$

$$CC: \begin{cases} u(0,t) = u_0, \\ u(x\to\infty,t) \to \text{finito}, \end{cases} \tag{3.65b}$$

$$CI: u(x,0) = 0. \tag{3.65c}$$

Usaremos $\widetilde{u}(x,s)$ para denotar la transformada de Laplace sobre la variable t (que como operador denotaremos mediante el símbolo[13] $\mathcal{L}$) de $u(x,t)$:

$$\widetilde{u}(x,s) = \mathcal{L}[u(x,t)] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\, u(x,t)\, dt.$$

Tomamos ahora transformada de Laplace con respecto a t en la EDP:

$$\mathcal{L}\frac{\partial u}{\partial t} = k\mathcal{L}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

Pero

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{d}{dx^2}\mathcal{L}u = \frac{d^2}{dx^2}\widetilde{u}(x,s),$$

porque podemos intercambiar el orden de la integración y la derivada dado que estas operaciones se llevan a cabo sobre variables independientes. Por otro lado, la integral de

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$$

[12]No espero que las consideraciones anteriores se entiendan completamente en una primera lectura, aunque sí deberían ir adquiriendo sentido a medida que se estudien los ejemplos en los que se usan métodos de transformadas integrales.

[13]Podríamos haber usado el símbolo $\mathcal{L}_t$ para recordar que la transformada de Laplace se lleva a cabo sobre la variable t, pero habitualmente se suprime este subíndice porque se da por supuesto que se conoce sobre qué variable se está tomando la transformada integral.

podemos evaluarla mediante integración por partes ($\int w dv = wv - \int v dw$) con el cambio

$$
\begin{aligned}
dv &= \frac{\partial u}{\partial t} dt, \\
w &= \mathrm{e}^{-st},
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
v &= u(x,t), \\
dw &= -s\,\mathrm{e}^{-st}\,dt,
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] &= u(x,t)\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty su(x,t)\,\mathrm{e}^{-st}\;dt, \\
&= -u(x,0) + s\int_0^\infty u(x,t)\,\mathrm{e}^{-st}\;dt \\
&= -u(x,0) + s\,\widetilde{u}(x,s)\,.
\end{aligned}
$$

Con estos resultados vemos que la EDP se reduce a una ecuación diferencial ordinaria en el espacio de Laplace, es decir, a una ecuación diferencial ordinaria sobre $\widetilde{u}(x,s)$:

$$
\frac{d^2\widetilde{u}}{dx^2} = \frac{s}{k}\widetilde{u} - \frac{1}{k}u(x,0).
$$

En este problema la condición inicial es $u(x,0) = 0$ de modo que la ecuación anterior se reduce a

$$
\frac{d^2\widetilde{u}}{dx^2} = \frac{s}{k}\widetilde{u},
$$

cuya solución es

$$
\widetilde{u}(x,s) = A\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x} + B\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{k}}x}\,.
$$

Pero la condición de contorno

$$
\lim_{x\to\infty} u(x,t) = \text{finito}
$$

implica (¿por qué?)

$$
\lim_{x\to\infty} \widetilde{u}(x,s) = \text{finito},
$$

lo que exige $B = 0$. Por tanto la solución es

$$
\widetilde{u}(x,s) = A\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}\,.
$$

La otra condición de contorno nos dice que $u(0,t) = u_0$, por lo que

$$
\widetilde{u}(0,s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,u(0,t)\,dt = u_0\int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\;dt = \frac{u_0}{s}.
$$

Esto nos permite fijar el valor de la constante A,

$$
\frac{u_0}{s} = \widetilde{u}(0,s) = A\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}0} = A \Rightarrow A = \frac{u_0}{s},
$$

de modo que

$$
\widetilde{u}(x,s) = \frac{u_0}{s}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}\,.
$$

Esta es la solución de nuestro problema :-) pero no en el espacio directo sino en el de Laplace :-(Por tanto ya "sólo" nos queda calcular la transformada inversa de $\widetilde{u}(x,s)$, $\mathcal{L}^{-1}\widetilde{u}(x,s)$, para obtener la solución

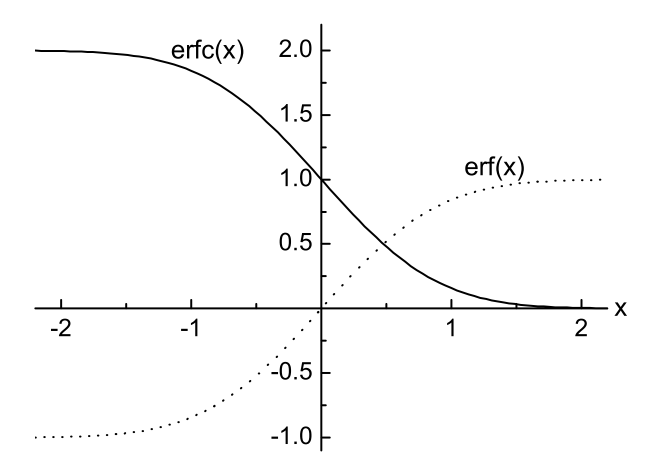


Figura 3.5: Funcion error $\mathrm{erf}(x)$ y función error complementaria $\mathrm{erfc}(x)$.

buscada $u(x,t)$. Este es en muchos casos el paso más difícil y el que hace que esta técnica tenga una utilidad más limitada. Consultando tablas de transformada de Laplace [AS72, SA96] vemos que

$$f(t) = \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \; \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \; \widetilde{f}(s) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{s}} \tag{3.66}$$

por lo que

$$u(x,t) = u_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right). \tag{3.67}$$

La función error complementaria erfc se define por la relación

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty dy\ \mathrm{e}^{-y^2}$$

o, equivalentemente, por

$$\mathrm{erfc}(x) = 1 - \mathrm{erf}(x),$$

siendo erf la función error[14]:

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dy\ \mathrm{e}^{-y^2}\,.$$

La función de error complementaria se puede aproximar por

$$\mathrm{erfc}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}x}\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \cdots\right), \qquad x \to \infty$$

para argumentos grandes y por

$$\mathrm{erfc}(x) \sim 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,x + \cdots\,, \qquad x \to 0$$

cuando el argumento es pequeño. Por tanto, para distancias grandes y/o tiempos cortos, es decir para $x/\sqrt{4kt} \gg 1$, se tiene que

$$u(x,t) \approx u_0\sqrt{\frac{4kt}{\pi x^2}}\,\mathrm{e}^{-x^2/4kt}, \qquad \frac{x}{\sqrt{4kt}} \gg 1,$$

y para distancias pequeñas y/o tiempos largos

$$u(x,t) \approx u_0\left(1 - \frac{x}{\sqrt{\pi kt}}\right), \qquad \frac{x}{\sqrt{4kt}} \ll 1.$$

[14]En algunos textos en español la función erfc se denota por ferc, y erf por fer.

Puede ser interesante calcular algunos valores físicos. Supongamos que tenemos un material con coeficiente de difusividad térmico k a una temperatura dada (digamos, cero) y queremos saber cuanto tiempo $\bar{t}$ transcurre hasta que la temperatura en un punto situado a $\bar{x} = 1$ cm de su interior alcanza la mitad de la temperatura del medio externo. Es claro que

$$\frac{u_0}{2} = u(\bar{x}, \bar{t}) = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{k\bar{t}}}\right)$$

es decir

$$\operatorname{erf}\left(\frac{\bar{x}}{2\sqrt{k\bar{t}}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Pero $\operatorname{erf}(0'477) \simeq 1/2$, luego

$$\frac{\bar{x}}{2\sqrt{k\bar{t}}} \simeq 0'477$$

y por tanto

$$\bar{t} \simeq \frac{\bar{x}^2}{0'799k}.$$

Veamos lo que vale $\bar{t}$ para algunos materiales. A 20 °C se tiene que:

- $k = 174 \times 10^{-6}\ m^2/s$ para la plata (uno de los mejores conductores) por lo que $\bar{t} \simeq 0'7\ s$;
- $k = 0'03 \times 10^{-6}\ m^2/s$ para el ladrillo corriente, de modo que $\bar{t} \simeq 4200\ s \simeq 70$ minutos;
- $k = 0'012 \times 10^{-6}\ m^2/s$ para la madera de pino, abeto, roble... por lo que $\bar{t} \simeq 10500\ s \simeq 3$ horas.

Moraleja: es mejor vivir en cabaña de madera que en palacio de plata.[15]

▷ ***Ejercicio*** *3.4*

Demuestra que si en este ejemplo la frontera en $x = 0$ se fija a temperatura 0 y la condición inicial es $u(x, 0) = u_0$ para $x > 0$, entonces la solución sería:

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right). \tag{3.68}$$

Sugerencia: escribe para este problema las ecuaciones correspondientes tal como se hacía en (3.65) y demuestra que las ecuaciones que hallas se pueden obtener a partir de las del ejemplo anterior, ecuaciones (3.65), sin más que hacer en éstas el cambio $u(x, t) \to -u(x, t) + u_0$.

◀

▶ *Ejemplo 3.7*

Transformada de Fourier y de Laplace. Función de Green

Queremos hallar la distribución de temperaturas $u(x, t)$ de una barra infinita con una distribución inicial de temperaturas $u(x, 0) = f(x)$.

En lo que sigue vamos a suponer que se satisfacen las condiciones de contorno $u(x, t) \to 0$ y $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \to 0$ para $x \to \pm\infty$. El problema físico viene descrito entonces por las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{3.69a}$$

$$CC: \begin{cases} u(x,t) \to 0 & \text{para } x \to \pm\infty, \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \to 0 & \text{para } x \to \pm\infty, \end{cases} \tag{3.69b}$$

$$CI: \quad u(x, 0) = f(x). \tag{3.69c}$$

[15] En lo que se refiere al confort debido al aislamiento térmico, se entiende :-)

Transformada de Fourier

Que el intervalo espacial vaya de $-\infty$ a ∞, sugiere aplicar la transformada de Fourier sobre la variable espacial x. Usaremos la siguiente notación $\widetilde{u}(\xi,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]$ para denotar la transformada de Fourier de $u(x,t)$ sobre la variable x:

$$\widetilde{u}(\xi,t)=\mathcal{F}[u(x,t)]=\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-i\xi x}\,u(x,t).$$

Empezamos calculando la transformada de Fourier del segundo miembro de (3.69a),

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\,,$$

mediante integración por partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\xi\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty}+i\xi\Big[u\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\Big]_{-\infty}^{\infty}+(i\xi)^2\int_{-\infty}^{\infty} dx\,u(x,t)\,\mathrm{e}^{-i\xi x}\ .\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno (3.69b) esta expresión se reduce a

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]=-\xi^2\widetilde{u}(\xi,t)\,.$$

Por otro lado

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u(x,t)]=\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u}(\xi,t)\,.$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, la transformada de Fourier de la EDP de la difusión del calor (3.69a),

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=k\,\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]$$

viene dada por esta ecuación diferencial *ordinaria*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{u}(\xi,t)=-k\xi^2\widetilde{u}(\xi,t)\,.$$

Su solución es sencilla

$$\widetilde{u}(\xi,t)=A(\xi)\,\mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\,. \tag{3.70}$$

La función $A(\xi)$ no es más que la transformada de Fourier de $u(x,t)$ en el instante inicial,

$$\widetilde{u}(\xi,0)=A(\xi).$$

Pero, de la condición inicial $u(x,0)=f(x)$ dada por la ecuación (3.69c), se deduce que

$$\widetilde{u}(\xi,0)=\mathcal{F}[u(x,0)]=\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-i\xi x}\,f(x),$$

y por tanto

$$A(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-i\xi x}\,f(x).$$

La solución (3.70) de nuestro problema en el espacio de Fourier es entonces

$$\widetilde{u}(\xi,t)=\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-i\xi x}\,f(x)\,\mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\,.$$

Para hallar $u(x,t)$ hemos de calcular la transformada inversa de Fourier de $\widetilde{u}(\xi,t)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}[\widetilde{u}(\xi,t)] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \mathrm{e}^{i\xi x}\,\widetilde{u}(\xi,t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \mathrm{e}^{i\xi x}\int_{-\infty}^{\infty} dx'\ \mathrm{e}^{-i\xi x'}\,\mathrm{e}^{-k\xi^2 t}\,f(x') \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\,f(x')\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \mathrm{e}^{i\xi(x-x')}\,\mathrm{e}^{-k\xi^2 t} \end{aligned} \tag{3.71}$$

Pero la transformada de Fourier de una función gaussiana es bien conocida [AS72, SA96]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\ \mathrm{e}^{\mp i\xi z}\,\mathrm{e}^{-\alpha\xi^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{-z^2/4\alpha},$$

luego la ecuación (3.71) se transforma en

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\,f(x')\,\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-(x-x')^2/4kt} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx'\,f(x')G(x,x';t), \end{aligned}$$

donde

$$G(x,x';t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-(x-x')^2/4kt} \tag{3.72}$$

es la función de Green del problema. Esta función es la de una distribución gaussiana centrada en x' con una varianza (ancho) $\sigma^2 = 2kt$ que aumenta linealmente en el tiempo.
Decimos que (3.72) es la función de Green del problema 3.69 porque es la solución correspondiente a una condición inicial con *fuente puntual* $f(x) = \delta(x,x')$ en $x = x'$. Dicho en otros términos: (3.72) es la función de Green del problema (3.69) porque:

- Es solución de la EDP de la difusión (3.69a), como es fácil comprobar.
- Satisface las condiciones de contorno (3.69b).
- Satisface la condición inicial $u(x,0) = \delta(x,x')$ pues

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-(x-x')^2/4kt} = \delta(x,x')\,.$$

▷ ***Ejercicio*** *3.5*

1. *Demuestra por sustitución directa que* (3.72) *es solución de la EDP* (3.69a).
2. *Comprueba que* (3.72) *satisface las condiciones de contorno* (3.69b).
3. *Comprueba que la función*

$$g(x,x') \equiv \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-(x-x')^2/4kt}$$

es la función delta de Dirac porque (i) $g(x',x') = \infty$, *(ii)* $g(x,x' \neq x) = 0$, *y (iii)* $\int_{-\infty}^{\infty} dx' g(x,x') = 1$.

La interpretación "física" de la ecuación

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\,f(x')G(x,x';t)$$

es la siguiente: la distribución inicial de temperaturas $f(x)$ se descompone en un continuo de impulsos tipo delta de Dirac de amplitud $f(x')$: $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' f(x')\delta(x,x')$, siendo $f(x')G(x,t)$ la distribución posterior de temperaturas debida a cada "impulso" inicial $f(x')\delta(x,x')$ de amplitud $f(x')$. Como la EDP

es lineal, estas distribuciones de temperaturas se suman (se integran) para obtener $u(x,t)$.

Transformada de Laplace.
Vamos a resolver ahora el mismo problema aplicando la transformada de Laplace sobre la variable temporal t que va de cero a infinito. Pero ahora vamos a considerar directamente que la distribución inicial de temperatura es puntual, es decir,

$$u(x,0) = \delta(x - x').$$

La solución correspondiente es (o se conoce como) la función de Green $G(x,x';t)$ del problema (3.69). La ecuación a resolver es:

$$k\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,x';t) = \frac{\partial}{\partial t}G(x,x',t), \tag{3.73a}$$

$$G(x,x';0) = \delta(x-x'), \tag{3.73b}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} G(x,x';t) = 0. \tag{3.73c}$$

No hemos asumido ninguna condición (de contorno) sobre el valor de la derivada $\partial G(x,x';t)/\partial x$ para $x \to \pm\infty$ puesto que, como se verá, no es necesario.
Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}G\right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}[G] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\widetilde{G}(x,x';s)\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial t}G\right] &= \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{-st}\,\frac{\partial}{\partial t}G(x,x';t) \\ &= G(x,x';t)\,\mathrm{e}^{-st}\Big|_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty dt\,\mathrm{e}^{-st}\,G(x,x';t) \\ &= -G(x,x';0) + s\,\widetilde{G}(x,x';s) \\ &= -\delta(x-x') + s\,\widetilde{G}\end{aligned}$$

[donde se ha integrado por partes y se ha usado la ecuación (3.73b)] la EDP (3.73a) se reduce, tras la aplicación de la transformada de Laplace, a una ecuación diferencial *ordinaria* en el espacio de Laplace:

$$-k\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial x^2} + s\,\widetilde{G} = \delta(x-x').$$

Ya sabemos cómo enfrentarnos a este tipo de ecuaciones (ecuaciones no homogéneas con una delta de Dirac como término fuente) pues son iguales a las que resolvimos para hallar las funciones de Green mediante el método de construcción (véase la sección 1.8.3) de los problemas de Sturm-Liouville. Procedamos como entonces. Para $x < x'$ tenemos que

$$\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial x^2} = \frac{s}{k}\widetilde{G} \Rightarrow \widetilde{G} = A_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + B_1\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x},$$

y de las condición de contorno para $x \to -\infty$ se deduce que

$$\lim_{x\to-\infty} G(x,x';t) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\widetilde{G}(x,x';s) = 0 \Rightarrow B_1 = 0.$$

De igual modo, para $x > x'$,

$$\frac{\partial^2\widetilde{G}}{\partial x^2} = \frac{s}{k}\widetilde{G} \Rightarrow \widetilde{G} = A_2\,\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{k}}x} + B_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x},$$

y por la condición de contorno para $x \to \infty$ se deduce que

$$\lim_{x\to\infty} G(x,x';t) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \widetilde{G}(x,x';s) = 0 \Rightarrow A_2 = 0.$$

En definitiva,

$$\widetilde{G}(x,x';s) = \begin{cases} A_1\, \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{k}}x}, & x < x', \\ B_2\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x}, & x' < x. \end{cases}$$

Para calcular $A_1(x')$ y $B_2(x')$ imponemos sobre $\widetilde{G}(x,x';s)$ la exigencia de continuidad en x' y de discontinuidad de tamaño $-1/k$ de la derivada en x'

$$A_1\, \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{k}}x'} - B_2\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x'} = 0,$$
$$\sqrt{\frac{s}{k}}\left[-B_2\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x'} - A_1\, \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{k}}x'}\right] = -\frac{1}{k}\,.$$

La solución de este sistema es:

$$A_1 = \frac{1}{2\sqrt{ks}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}x'}, \qquad B_2 = \frac{1}{2\sqrt{ks}}\, \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{s}{k}}x'},$$

y por tanto

$$\widetilde{G}(x,x';s) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{ks}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(x'-x)}, & x \le x', \\ \frac{1}{2\sqrt{ks}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}(x-x')}, & x' \le x, \end{cases}$$

es decir

$$\widetilde{G}(x,x';s) = \frac{1}{2\sqrt{ks}}\, \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{s}{k}}|x-x'|}\,.$$

Nos queda obtener la transformada inversa de Laplace de $\widetilde{G}$ para hallar G. Un procedimiento rápido consiste en consultar una buena tabla de transformada de Laplace. Sin embargo, aquí lo haremos de un modo menos directo, pero más instructivo. Sabemos que [véase (3.66)]

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{s}}}{s}$$

por lo que si derivamos con respecto a α en ambos lados de esta expresión encontramos

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\,.$$

El término de la derecha tiene justamente la forma de la transformada de Laplace cuya inversa buscamos. Como

$$-\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t},$$

se deduce inmediatamente que

$$G(x,x';t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}\,.$$

Este resultado es el mismo que el dado por la ecuación (3.72), obtenido entonces mediante el procedimiento de la transformada de Fourier.

◀

► *Ejemplo 3.8*

Método de las imágenes

Hemos visto en el ejemplo 3.7 que la solución de un problema difusivo "libre", es decir sin condiciones de contorno (o, siendo más precisos, con todas las condiciones de contorno situadas en el infinito), viene dado por la relación

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, u(x',0) G(x,x';t) \tag{3.74}$$

donde

$$G(x,x';t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\, \mathrm{e}^{-(x-x')^2/4kt} \tag{3.75}$$

es la función de Green. En este ejemplo vamos a mostrar cómo es posible aprovechar este resultado para, con un poco de ingenio, resolver problemas difusivos no libres, es decir, con condiciones de contorno no situadas en el infinito.

Sea el problema difusivo de una barra semiinfinita ($x \geq 0$) con temperatura inicial dada por $u(x,0) = f(x)$ y cuyo extremo situado en $x = 0$ permanece temperatura cero: $u(0,t) = 0$. En principio, no es posible aplicar directamente la relación (3.74) para resolver este problema por no estar definido sobre toda la recta real. Sin embargo, supongamos que quisiéramos resolver el siguiente problema definido sobre toda la recta real: Calcúlese el campo de temperaturas de una barra infinita con temperatura inicial dada por $u(x,0) = f(x)$ para $x > 0$ y $u(x,0) = -f(-x)$ para $x < 0$ (véase la figura 3.6). Es evidente por razones de simetría que para cualquier instante posterior la temperatura en $x = 0$ será cero. Esto significa que

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{0} dx'\, [-f(-x')]\, G(x,x';t) + \int_0^{\infty} dx'\, f(x')\, G(x,x';t) \\ &= \int_{\infty}^{0} d(-x')\, [-f(x')]\, G(x,-x';t) + \int_0^{\infty} dx'\, f(x')\, G(x,x';t) \\ &= -\int_0^{\infty} dx'\, f(x')\, G(x,-x';t) + \int_0^{\infty} dx'\, f(x')\, G(x,x';t) \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi kt}} \int_0^{\infty} dx' f(x') \left[\mathrm{e}^{-(x-x')^2/4kt} - \mathrm{e}^{-(x+x')^2/4kt}\right] \end{aligned} \tag{3.76}$$

es una solución de la EDP de difusión para todo x (y en particular para $x > 0$) que s*atisface la condición de contorno* $u(0,t) = 0$. Esto implica que la expresión (3.76) para $x > 0$ es justamente la solución de nuestro problema difusivo de la barra semiinfinita con uno de sus extremos a temperatura cero. El procedimiento que hemos usado se conoce como método de las imágenes. La razón es obvia si nos fijamos que hemos resuelto el problema construyendo una condición inicial a la izquierda de $x = 0$ que es la imagen "reflejada" de la condición inicial del problema original (véase la figura 3.6).

Para terminar, vamos a obtener la solución explícita para el caso sencillo en el que la temperatura inicial es constante: $u(x,0) = f(x) = u_0$. En este caso (3.76) se reduce a

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi kt}} \left\{ \int_0^{\infty} dx'\, \mathrm{e}^{-(x-x')^2/4kt} - \int_0^{\infty} dx'\, \mathrm{e}^{-(x+x')^2/4kt} \right\}. \tag{3.77}$$

Mediante el cambio $x' = x + \xi\sqrt{4kt}$ en la primera integral y $x' = -x + \xi\sqrt{4kt}$ en la segunda se obtiene

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-x/\sqrt{4kt}}^{\infty} d\xi\ \mathrm{e}^{-\xi^2} - \int_{x/\sqrt{4kt}}^{\infty} d\xi\ \mathrm{e}^{-\xi^2} \right\} \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/\sqrt{4kt}}^{x/\sqrt{4kt}} d\xi\ \mathrm{e}^{-\xi^2} = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4kt}} d\xi\ \mathrm{e}^{-\xi^2} \\ &= u_0\, \mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right). \end{aligned}$$

Esta solución coincide con la obtenida en el ejemplo 3.6 (véase el ejercicio 3.4).

◄

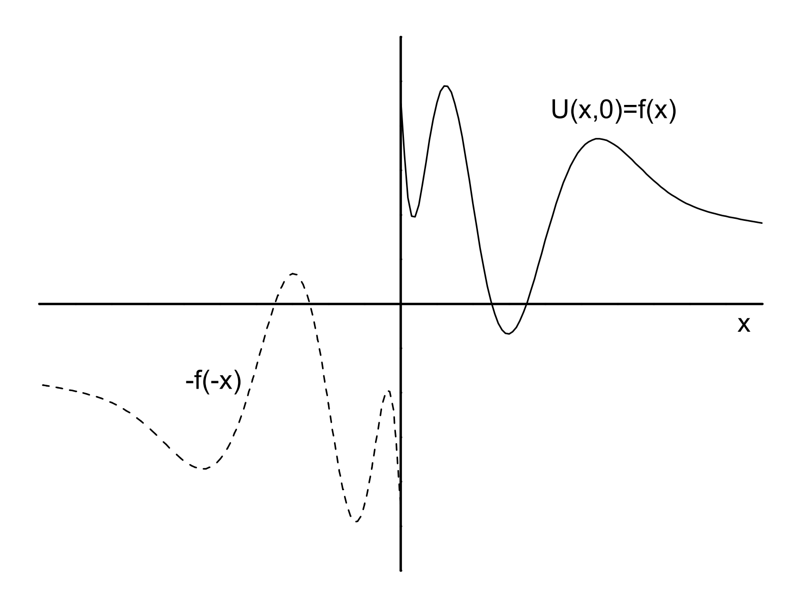


Figura 3.6: Campo de temperaturas inicial $u(x,0) = f(x)$, $x > 0$, de una barra semiinfinita y su imagen "especular" $-f(-x)$.

▶ *Ejemplo 3.9*

Ahora vamos a resolver mediante el método de las imágenes el problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -L/2 \le x \le L/2, \tag{3.78a}$$

$$CC: \begin{cases} u(-L/2,t) = 0, \\ u(L/2,t) = 0, \end{cases} \tag{3.78b}$$

$$CI: u(x,0) = \delta(x). \tag{3.78c}$$

Si el problema fuera "libre" (no hubiera condiciones de contorno en $x = \pm L/2$) sabemos que la solución $u(x,t)$ sería simplemente la función de Green centrada en en el origen: $G(x,x' = 0,t)$. Esta función se muestra en la figura 3.7(a). Por supuesto, esta función no es solución de nuestro problema (3.78) porque, por ejemplo, no satisface la condición de contorno en $x = -L/2$: $u(-L/2,t) = 0$. Sin embargo, podemos corregir este fallo mediante el método de las imágenes si situamos además una delta de Dirac en $x = -L$, es decir, si consideramos la condición inicial $u(x,0) = \delta(x) - \delta(x+L)$. La solución correspondiente $u(x,t) = G(x,x' = 0,t) - G(x,x' = -L,t)$ satisface evidentemente la condición de contorno en $x = -L/2$ para todo instante posterior $t > 0$ [véase la figura 3.7(b)]. Sin embargo, es también evidente por razones de simetría que esta función $G(x,0,t) - G(x,-L,t)$ no es cero en $x = L/2$, es decir, no satisface la condición de contorno $u(L/2,t) = 0$. Podemos de nuevo corregir este problema añadiendo dos imágenes más a la derecha de $x = L/2$ tal como se muestra en la figura 3.7(c). Es decir, consideramos la condición inicial $u(x,0) = \delta(x) - \delta(x+L) - \delta(x-L) - \delta(x-2L)$ cuya solución correspondiente es $u(x,t) = G(x,0,t) - G(x,-L,t) - G(x,L,t) + G(x,2L,t)$. Pero de nuevo, al corregir este problema, creamos otro en $x = -L/2$: ahora esta solución ya no satisface la condición de contorno $u(x = -L/2,t) = 0$. Nuevamente podemos corregir esto añadiendo en las condiciones iniciales dos imágenes delta de Dirac en $x = -2L$ y $x = -3L$, $u(x,0) = \delta(x) - \delta(x+L) - \delta(x-L) + \delta(x+2L) + \delta(x+2L) - \delta(x+3L)$, de modo que la solución correspondiente es ahora $u(x,t) = G(x,0,t) - G(x,-L,t) - G(x,L,t) + G(x,2L,t) + G(x,-2L,t) - G(x,-3L,t)$ [véase la figura 3.7(d)]. Pero de nuevo logramos satisfacer la condición de contorno en $x = -L/2$ a costa de hacer que de nuevo no se satisfaga la condición de contorno en $x = L/2$. Por supuesto esto lo podemos corregir de nuevo añadiendo dos delta de Dirac en $x = 3L$ y $x = 4L$ (¿con qué signo?), lo cual a su vez provocaría que... En este punto debiera ser evidente que este procedimiento podría continuarse indefinidamente y

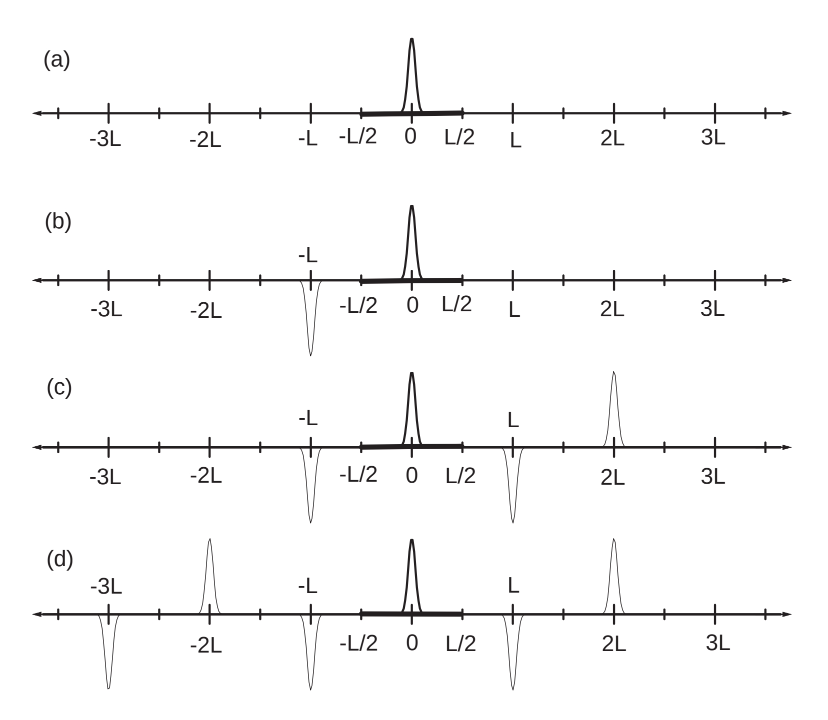


Figura 3.7: Resolución del problema (3.78) mediante el método de las imágenes. Las funciones representadas son las funciones de Green correspondientes a las condiciones iniciales (a) $u(x,0)=\delta(x)$, (b) $u(x,0)=\delta(x)-\delta(x+L)$, (c) $u(x,0)=\delta(x)-\delta(x+L)-\delta(x-L)+\delta(x-2L)$, (d) $u(x,0)=\delta(x)-\delta(x+L)-\delta(x-L)+\delta(x-2L)+\delta(x+2L)-\delta(x+3L)$.

que entonces se obtendría la solución de nuestro problema (3.78) en términos de la siguiente serie infinita:

$$u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n G(x-nL,t). \tag{3.79}$$

▷ ***Ejercicio*** *3.6*

1. *Reflexiona y justifica que a medida que se van añadiendo más imágenes, es decir, a medida que se consideran más y más términos en la serie* (3.79)*, la función correspondiente*

$$u(x,t)=G(x,0,t)-G(x,-L,t)-G(x,L,t)+G(x,2L,t)+G(x,-2L,t)-G(x,-3L,t)+\dots$$

satisface las condiciones de contorno con un error cada vez menor.

2. *Resuelve el problema* (3.78) *mediante el método de las imágenes pero asumiendo que la condición inicial* (3.78c) *es ahora* $u(x,0)=\delta(x,x')$ *con* $-L/2<x'<L/2$.
3. *Resuelve el problema* (3.78) *mediante separación de variables*[16] *y compara la solución obtenida con la* (3.79)*. ¿Qué serie converge más rápidamente para tiempo cortos? ¿Cuál converge más rápidamente para tiempos grandes?*

◀

[16] Aunque este problema se ha resuelto ya esencialmente en el ejemplo 3.1, es bueno que lo resuelvas de nuevo. Por supuesto, la solución que obtengas debe ser igual a la (3.19) si desplazas el origen de coordenadas en la cantidad $L/2$, es decir, la solución de (3.78) viene dada por la ecuación (3.19) si hacemos en esta ecuación el cambio $x\to x+L/2$.

▶ Ejemplo 3.10

Queremos calcular la posición $u(x,t)$ de una cuerda semiinfinita ($x \geq 0$) inicialmente en reposo y en la que su extremo en $x=0$ se desplaza según la función $f(t)$. Para ello hemos de encontrar las solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.80}$$

que satisface la condición inicial

$$u(x,0) = 0, \tag{3.81}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{3.82}$$

y las condiciones de contorno

$$u(0,t) = f(t), \tag{3.83}$$

$$u(x \to \infty, t) = 0. \tag{3.84}$$

Esta última condición nos dice simplemente que, en un tiempo t finito, podemos asumir que el desplazamiento de la cuerda para distancias x muy, muy grandes, es cero. Con mayor precisión, podemos asegurar que el desplazamiento de la cuerda es cero en las distancias x que sean mayores que ct pues el desplazamiento de la cuerda en $x=0$ en el instante inicial $t=0$ no puede influir en el desplazamiento de la cuerda en la posición $x > ct$ dado que la onda se propaga con velocidad c . Otro modo posible de entender la pertinencia de la condición $u(x \to \infty, t) = 0$ es considerando que, para tiempos finitos, lo que supongamos que vale el desplazamiento u a distancias infinitas no puede tener ninguna influencia en lo que vale u en una posición x finita porque, simplemente, esta influencia se propaga a la velocidad finita c y no tiene tiempo de llegar a x desde el infinito. Por eso, el valor que atribuyamos a u en el infinito no puede afectar a nuestra solución para x y t finitos. Asumiremos que su valor es nulo, $u(x \to \infty, t) = 0$, porque esto simplificará nuestros cálculos, tal como se comprobará más adelante.

Vamos a resolver el problema trabajando en el espacio de Laplace. Como hemos hecho hasta ahora, escribiremos

$$\widetilde{u}(x,s) = \mathcal{L}\left[u(x,t)\right] = \int_0^\infty dt\, u(x,t)\ \mathrm{e}^{-st}$$

para denotar la transformada de Laplace de $u(x,t)$. La transformada de Laplace del miembro de la izquierda de la EDP (3.80),

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right] = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\ \mathrm{e}^{-st}\, dt,$$

puede evaluarse integrando por partes ($\int w dv = wv - \int v dw$) mediante el cambio

$$dv = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt,$$
$$w = \mathrm{e}^{-st},$$

de modo que

$$v = \frac{\partial u}{\partial t},$$
$$dw = -s\,\mathrm{e}^{-st}\, dt,$$

y

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right] = \left[\mathrm{e}^{-st}\,\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\ \mathrm{e}^{-st}.$$

El primer término de la derecha es cero [recuérdese la condición inicial (3.84)] por lo que

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)\right] = s\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\ \mathrm{e}^{-st}\, dt.$$

La nueva integral volvemos a evaluarla mediante separación de variables mediante el cambio

$$dv = \frac{\partial u}{\partial t} dt,$$
$$w = \mathrm{e}^{-st},$$

de modo que

$$v = u,$$
$$dw = -s\,\mathrm{e}^{-st}\,dt,$$

y

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right] =& s\left\{\left[\mathrm{e}^{-st}\,u(x,t)\right]_{t=0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty u(x,t)\ \mathrm{e}^{-st}\,dt\right\}\\ =& -su(x,0) + s^2\widetilde{u}(x,s).\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial (3.83) obtenemos finalmente

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right] = s^2\widetilde{u}(x,s). \tag{3.85}$$

Por otro lado

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right] = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\ \mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty u(x,t)\ \mathrm{e}^{-st}\,dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\widetilde{u}(x,s) \tag{3.86}$$

pues la integral y la derivación se llevan a cabo sobre variables diferentes *independientes*. Teniendo en cuenta los resultados (3.85) y (3.86), la EDP (3.80) en el espacio de Laplace

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)\right] = c^2\,\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right]$$

se reduce a

$$s^2\widetilde{u}(x,s) = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widetilde{u}(x,s), \tag{3.87}$$

cuya solución es

$$\widetilde{u}(x,s) = A(s)\,\mathrm{e}^{sx/c} + B(s)\,\mathrm{e}^{-sx/c}. \tag{3.88}$$

Determinaremos $A(s)$ y $B(s)$ mediante las condiciones de contorno. La condición de contorno $u(x \to \infty, t) = 0$ implica necesariamente $\widetilde{u}(x \to \infty, s) = 0$, por tanto $A(s) = 0$ y la solución ha de tener la forma

$$\widetilde{u}(x,s) = B(s)\,\mathrm{e}^{-sx/c}. \tag{3.89}$$

Por otro lado, la condición de contorno (3.83), $u(0,t) = f(t)$, se transforma en el espacio de Laplace en

$$\widetilde{u}(0,s) = \mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s)$$

por lo que, de la ecuación (3.89), se encuentra que $B(s) = F(s)$. La solución final de nuestro problema en el espacio de Laplace es por tanto

$$\widetilde{u}(x,s) = F(s)\,\mathrm{e}^{-sx/c}. \tag{3.90}$$

La solución del problema en el espacio directo requiere hallar la transformada inversa de Laplace:

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\,\mathrm{e}^{-sx/c}\right] = H(t - x/c)f(t - x/c) = \begin{cases}0, & t < x/c,\\ f(t - x/c), & t > x/c,\end{cases} \tag{3.91}$$

donde H es la función de Heaviside. Lo que esta solución nos dice es que el desplazamiento $u(0,t) = f(t)$ en el origen se propaga a lo largo de la cuerda con velocidad finita c de modo que para $x > ct$ no hay desplazamiento, y para $x < ct$ el desplazamiento inicial se ha transmitido sin amortiguar hasta la posición x con un desfase (retraso) temporal igual a x/c.

◀

3.5. Problemas difusivos no homogéneos

En las secciones siguientes estudiaremos varios procedimientos para resolver problemas difusivos no homogéneos, es decir:

- Ecuaciones en derivadas parciales homogéneas con condiciones de contorno no homogéneas.
- Ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas con condiciones de contorno homogéneas.
- Ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas con condiciones de contorno no homogéneas.

3.5.1. Homogeneización del problema

Un procedimiento sencillo para resolver problemas difusivos no homogéneos consiste en transformarlos en problemas homogéneos mediante un cambio adecuado de la variable dependiente (función incógnita).

Veamos un ejemplo de homogeneización de una ecuación en derivadas parciales homogénea con condiciones de contorno *no* homogéneas.

► *Ejemplo 3.11*

Temperatura de una barra finita con temperaturas fijas en sus extremos

Queremos hallar el campo de temperaturas $u(x,t)$ de una barra finita de longitud L con temperatura inicial dada por $u(x,0) = f(x)$ y cuya temperatura en los extremos está fijada a A y B: $u(x=0,t) = A$ y $u(x=L,t) = B$. Las ecuaciones que describen este problema son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$CC: \begin{cases} u(0,t) = A, \\ u(L,t) = B, \end{cases}$$
$$CI: u(x,0) = f(x).$$

Ya vimos un caso parecido en el ejemplo 3.2. Por ser condiciones de contorno no homogéneas, no podemos aplicar el método de separación de variables sin más. Lo que haremos es:
1. Obtener la distribución de temperaturas cuando se alcance el equilibrio térmico: $u_E(x) = u(x, t\to\infty)$. Dado que $\partial u_E/\partial t = 0$, las ecuaciones que satisface el campo de temperaturas estacionario $u_E(x)$ son

$$\frac{d^2 u_E}{dx^2} = 0,$$

junto con las condiciones de contorno

$$u_E(0) = A,$$
$$u_E(L) = B.$$

La solución de este problema es trivial: $u_E(x) = C_1 + C_2 x$. Exigiendo que se satisfagan la condiciones de contorno se deduce que

$$u_E(x) = A + \frac{B-A}{L}\,x.$$

2. Hallamos la ecuación en derivadas parciales y las condiciones de contorno que satisface el campo de temperaturas $v(x,t)$ dado por las diferencia entre la temperatura actual y la de equilibrio:

$$v(x,t) = u(x,t) - u_E(x).$$

La EDP que debe satisfacer esta función es:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{d^2 u_E}{dx^2}\right).$$

Como $d^2u_E/dx^2 = 0$, entonces la EDP que satisface $v(x,t)$ es

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Además es fácil ver que $v(x,t)$ satisface condiciones de contorno *homogéneas*:

$$v(0,t) = u(0,t) - u_E(0) = A - A = 0,$$
$$v(L,t) = u(L,t) - u_E(L) = B - B = 0.$$

Por tanto, encontramos que sobre la función $v(x,t)$ nuestro problema se reduce a una EDP homogénea con condiciones de contorno homogéneas. Esta ecuación la podemos resolver ya mediante la aplicación directa del método de separación de variables (véase el ejemplo 3.1):

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Hallamos a_n a partir de la condición inicial:

$$v(x,0) = u(x,0) - u_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

por tanto

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_E(x)] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

y la solución del problema original con condiciones de contorno no homogéneas es

$$u(x,t) = u_E(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, \mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Sean cuales sean las condiciones iniciales dadas por $f(x)$, sucede que $u(x,t) \to u_E(x)$ para $t \to \infty$.

◀

3.5.2. Ecuaciones en derivadas parciales con términos no homogéneos estacionarios

El método antes expuesto también funciona si hay fuentes estacionarias (no dependientes del tiempo) de calor en el interior del medio. Su influencia viene descrita por un término no homogéneo $Q(x)$ en la EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x),$$
$$CC: \begin{cases} u(0,t) = A, \\ u(L,t) = B, \end{cases}$$
$$CI: u(x,0) = f(x).$$

En este caso $u_E(x)$ es la solución estacionaria del problema

$$k\frac{d^2u_E}{dx^2} + Q(x) = 0, \tag{3.92}$$

$$CC: \begin{cases} u_E(0) = A, \\ u_E(L) = B. \end{cases}$$

El campo de temperaturas auxiliar

$$v(x,t) = u(x,t) - u_E(x)$$

es entonces la solución de un problema completamente *homogéneo* pues

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{d^2u_E}{dx^2} + Q(x)$$

se convierte, tras usar (3.92), en la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Las condiciones de contorno también son homogéneas,

$$u(0,t) = A \Rightarrow v(0,t) + u_E(0) = A \Rightarrow v(0,t) = 0,$$
$$u(L,t) = B \Rightarrow v(L,t) + u_E(L) = B \Rightarrow v(L,t) = 0,$$

y la condición inicial se transforma en

$$u(x,0) = f(x) \Rightarrow v(x,0) = u(x,0) - u_E(x) \Rightarrow v(x,0) = f(x) - u_E(x).$$

▶ *Ejemplo 3.12*

Queremos hallar la distribución de temperatura $u(x,t)$ de una barra que inicialmente se encuentra a temperatura cero $[u(x,0) = 0]$, mantiene los extremos a esa temperatura $[u(\pm 1,t) = 0]$ y posee en su interior una fuente de calor de modo que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\ . \tag{3.93}$$

Entonces $u_E(x)$ es la solución de

$$4\frac{d^2u_E}{dx^2} + 8 = 0,$$

que satisface las condiciones de contorno $u_E(-1) = u_E(1) = 0$. Esta solución es simplemente

$$u_E(x) = 1 - x^2$$

como es fácil de comprobar. Si hacemos el cambio $v(x) = u(x) - u_E(x)$ en la ecuación (3.93) se tiene que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{3.94}$$

con las condiciones de contorno $v(-1,t) = v(1,t) = 0$. Este problema completamente homogéneo se resuelve fácilmente mediante separación de variables de modo similar a como se resolvió el ejemplo 3.1 en la página 158.

◀

3.5.3. Ecuación en derivadas parciales con inhomogeneidad no estacionaria y condiciones de contorno dependientes del tiempo

Ahora vamos a considerar un problema más general en el que los términos no homogéneos de la EDP y de las condiciones de contorno dependen del tiempo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t),$$
$$CC: \begin{cases} u(0,t) = A(t), \\ u(L,t) = B(t), \end{cases}$$
$$CI: u(x,0) = f(x).$$

Este problema no es reducible, en general, a una EDP homogénea con condiciones de contorno homogéneas, tal como hemos hecho en los casos anteriores. Sin embargo siempre es posible reducirlo a una EDP no homogénea con condiciones de contorno homogéneas. Para ello tomamos un campo de temperaturas de referencia, $r(x,t)$ al que sólo le exigimos que satisfaga las condiciones de contorno

$$r(0,t) = A(t),$$
$$r(L,t) = B(t).$$

Generalmente, lo más recomendable es escoger la función $r(x,t)$ más simple posible que sea compatible con estas condiciones de contorno. Una elección sencilla es, por ejemplo,

$$r(x,t) = A(t) + [B(t) - A(t)]\,\frac{x}{L}.$$

En términos de la función

$$v(x,t) = u(x,t) - r(x,t)$$

el problema (3.95) se reduce a una ecuación en derivadas parciales no homogénea con condiciones de contorno homogéneas:

$$u(0,t) = A \Rightarrow v(0,t) + r(0,t) = A \Rightarrow v(0,t) = 0,$$
$$u(L,t) = B \Rightarrow v(L,t) + r(L,t) = B \Rightarrow v(L,t) = 0.$$

Veamos qué ecuación en derivadas parciales satisface $v(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + Q(x,t).$$

Por tanto, encontramos que $v(x,t)$ ha de verificar la EDP no homogénea

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \widehat{Q}(x,t),$$

con

$$\widehat{Q}(x,t) = Q(x,t) - \frac{\partial r}{\partial t} + k\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

3.5.4. Método del desarrollo en autofunciones para ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas con condiciones de contorno homogéneas

En la sección 3.5.3 anterior hemos visto que el problema general (3.95) (EDP con término no homogéneo dependiente del tiempo con condiciones de contorno inhomogéneas no estacionarias) puede simplificarse en uno con condiciones de contorno homogéneas y EDP con termino inhomogéneo no estacionario, es decir, en un problema descrito por las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x,t), \\ &CC: \begin{cases} v(0,t) = 0, \\ v(L,t) = 0, \end{cases} \\ &CI: \quad v(x,0) = g(x). \end{aligned} \tag{3.96}$$

Sabemos que el problema homogéneo asociado (problema que se obtiene del anterior haciendo $Q(x,t) = 0$)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &CC: \begin{cases} u(0,t) = 0, \\ u(L,t) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

puede resolverse mediante separación de variables, siendo la solución (véase el ejemplo 3.1)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) \tag{3.97}$$

donde $\phi_n(x)$ son las autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda\phi = 0 \\ &CC: \begin{cases} \phi(0) = 0, \\ \phi(L) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Sabemos que los autovalores y las autofunciones son

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \\ \phi_n(x) &= \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

y que los coeficientes a_n son

$$a_n(t) = a_n(0)\,\mathrm{e}^{-k\lambda_n t} = a_n(0)\,\mathrm{e}^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \tag{3.98}$$

Para resolver (3.96) expresamos la solución buscada $v(x,t)$ en forma de desarrollo en las autofunciones $\phi_n(x)$:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x). \tag{3.99}$$

Para cada t, $v(x,t)$ es función de x sobre el intervalo $[0,L]$, de modo que si, para cada instante, $v(x,t)$ es de buen comportamiento sobre la variable x en el intervalo $[0,L]$, entonces puede

desarrollarse en serie de $\phi_n(x)$. Por supuesto esta función es distinta para cada t por lo que los coeficientes del desarrollo dependen de t: $a_n \equiv a_n(t)$. Nótese que aquí $a_n(t)$ surge como un coeficiente de un desarrollo en autofunciones; $a_n(t)$ no tiene nada que ver con las soluciones de una ecuación que se encuentra al llevar a cabo el método de separación de variables. Por ello, $a_n(t)$ no tiene por qué ser igual al valor de (3.98).

De la condición inicial se obtiene

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\phi_n(x) \Rightarrow a_n(0) = \frac{\displaystyle\int_0^L g(x)\phi_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L \phi_n^2(x)\,dx}.$$

Sólo nos resta averiguar cuáles deben ser las funciones $a_n(t)$ que hacen que (3.99) sea solución del problema (3.96). Para ello sustituimos (3.99) en la EDP:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Q(x,t) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x) + Q(x,t). \tag{3.100}$$

Nótese que $v(x,t)$ y $\phi_n(x)$ satisfacen las mismas condiciones de contorno. Si además $v(x,t)$ y $\partial v/\partial x$ son continuas, se puede demostrar que es válido derivar término a término las series de (3.100), es decir se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} a_n(t)\phi_n(x) = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\frac{d^2\phi_n}{dx^2} + Q(x,t).$$

Pero $d^2\phi/dx^2 = -\lambda_n\phi_n$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n'(t) + \lambda_n k a_n]\phi_n(x) = Q(x,t).$$

Dado que $\phi_n(x)$ son ortogonales, se tiene que

$$\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n = \frac{\langle\phi_n|Q\rangle}{\langle\phi_n|\phi_n\rangle} = \frac{\int_0^L \phi_n(x)Q(x,t)\,dx}{\int_0^L \phi_n^2(x)\,dx} \equiv q_n(t)\,,$$

siendo $q_n(t)$ una función conocida. Hallaremos $a_n(t)$ resolviendo esta ecuación lineal no homogénea de primer orden. Podemos resolverla, por ejemplo, introduciendo el factor integrante $\mathrm{e}^{\lambda_n k t}$:

$$\mathrm{e}^{\lambda_n k t}\left(\frac{da_n}{dt} + \lambda_n k a_n\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{\lambda_n k t}\, a_n\right) = \mathrm{e}^{\lambda_n k t}\, q_n(t)\,.$$

Integrando esta ecuación entre 0 y t se tiene que

$$\mathrm{e}^{\lambda_n k t}\, a_n(t) - a_n(0) = \int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_n k \tau}\, q_n(\tau)\,d\tau,$$

y por tanto

$$a_n(t) = a_n(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n k t} + \mathrm{e}^{-\lambda_n k t}\int_0^t \mathrm{e}^{\lambda_n k \tau}\, q_n(\tau)\,d\tau.$$

Si $Q(x,t) = 0$, se reobtiene la solución ya hallada mediante separación de variables:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$$

con $a_n(t) = a_n(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda_n k t}$.

3.6. Problemas

3.1. Halla los modos normales de vibración $u_{nm}(x,y)$, y sus frecuencias de vibración ω_{nm} correspondientes, de una membrana rectangular de lados a y b.
En la la página web `http://www.unex.es/eweb/fisteor/santos/mma` se proporcionan enlaces en donde puede verse una animación de los modos normales de vibración de una membrana cuadrada.

3.2. Una membrana cuadrada de lado π sujeta por sus bordes es inicialmente desplazada de modo que $u(x,y,0) = f(x,y)$ siendo su velocidad inicial nula, $u_t(x,y,0) = 0$.

a) Se pide calcular su desplazamiento en cualquier otro instante.

b) Halla $u(x,t)$ de forma explícita si el desplazamiento inicial es uniforme, $f(x,y) = u_0$.

3.3. Una esfera sólida de radio b tiene una distribución inicial de temperatura $u(r,0) = u_0(r)$ y su superficie se enfría siguiendo la ley de Newton del enfriamiento (por convección)

$$\left.\frac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right|_{r=b} = -h(u-u_1)|_{r=b}$$

donde u_1 es la temperatura (constante) del medio circundante y h es una constante. Halla $u(r,t)$.

3.4. Halla la solución de la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0$$

en el interior de:

a) El anillo circular $R_1 \le r \le R_2$ con las condiciones de contorno $u(R_1,\theta) = 0$, $u(R_2,\theta) = \cos 2\theta$. Supón que $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$.

b) El círculo $r \le R_1$ con la condición de contorno $u(R_1,\theta) = \cos 2\theta$. Supón que $R_1 = 1$.

3.5. Una barra cilíndrica muy larga (de longitud infinita para nuestros propósitos) de radio ρ inicialmente ($t = 0$) a la temperatura constante u_0 se introduce en un baño térmico cuya temperatura (constante) es u_1. Calcula de forma explícita el campo de temperaturas de la barra para cualquier instante posterior.

3.6. Halla la distribución estacionaria de temperaturas $u(x,y)$ en el interior de una placa cuadrada de ancho unidad cuyos lados se fijan a temperatura cero a excepción del lado izquierdo ($x = 0$) cuya temperatura es igual a u_0 [$u(x = 0, y) = u_0$].

3.7. ¿Cuál es el campo estacionario de temperaturas en un disco homogéneo de radio unidad aislado por sus caras y cuyos bordes están fijados a la temperatura $u(r = 1,\theta) = f(\theta)$? (Pista: problema equivalente al del ejemplo 3.4). Calcula la solución si:

a) $f(\theta) = \cos(\theta)$.

b) $f(\theta) = 0$ si $-\pi < \theta < 0$; $f(\theta) = u_0$ si $0 < \theta < \pi$.

3.8. Resuelve la ecuación de ondas

$$u_{xx} + u = u_{tt}, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t > 0,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ y la condición inicial $u(x,0) = \operatorname{sen}(4\pi x)$, $u_t(x,0) = 0$.

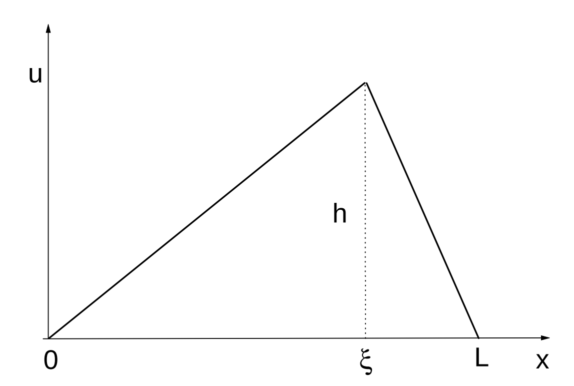


Figura 3.8: Posición inicial de la cuerda en el problema 3.9

3.9. www Una cuerda tensa de longitud L, fijada en sus dos extremos, es separada de su posición de equilibrio de manera que en $t = 0$ tiene la forma de la figura 3.8. Su velocidad inicial es cero, es decir, $u_t(x, 0) = 0$. Encuentra la expresión del desplazamiento $u(x, t)$ para cualquier $x \in [0, L]$ y para todo $t > 0$.

3.10. Una cuerda de piano de longitud L es golpeada en el instante $t = 0$ cerca del punto $x = \xi$. Halla el desplazamiento $u(x, t)$ posterior de la cuerda suponiendo que la cuerda no está inicialmente desplazada $[u(x, 0) = 0]$ y que su velocidad inicial viene dada por la función

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \begin{cases} v_0 \cos \pi(x-\xi)/d\,, & |x-\xi| < d/2, \\ 0\,, & |x-\xi| > d/2, \end{cases}$$

donde $v_0 = \text{const.}$

3.11. Un cuerpo semiinfinito situado sobre el semieje $x < 0$ se encuentra inicialmente a la temperatura u_0 . En el instante $t = 0$ se coloca en contacto térmico con otro cuerpo semiinfinito que ocupa las posiciones $x > 0$ y que está a la temperatura inicial $u = 0$. Teniendo en cuenta que la temperatura y su derivada espacial primera han de ser funciones continuas en $x = 0$ (¿por qué?) halla el campo de temperaturas $u(x, t)$ en ambos cuerpos como la solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda(x)\frac{\partial u}{\partial t}\,, \qquad -\infty < x < \infty\,, \qquad t > 0,$$

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1\,, & x < 0, \\ \lambda_2\,, & x > 0, \end{cases}$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes, y

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 = \text{const}\,, & x < 0, \\ 0\,, & x > 0. \end{cases}$$

3.12. Supongamos que la temperatura en la superficie ($x = 0$) de la Tierra varía de forma periódica en el tiempo de acuerdo con la expresión $u(x = 0, t) = T_0 + T_1 \text{sen}\omega t$. (a) Calcula la temperatura $u(x, t)$ a una profundidad x admitiendo que la difusividad térmica k es constante y que puede despreciarse la curvatura de la Tierra. (b) Halla la solución si $u(0, t) = T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} T_n \text{sen}(n\omega t)$.

Ayuda: $\mathcal{L}\left[\exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right)\,\operatorname{sen}\left(\omega t - x\sqrt{\omega/2k}\right)\right] = \omega/(w^2+s^2)\,\exp\left(-\sqrt{s/k}\,x\right)$

3.13. Se pide resolver el siguiente problema acerca de la distribución estacionaria de temperaturas en un sólido semiinfinito:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 0\,, \qquad y > 0\,, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 = \text{const}\,, & |x| < a, \\ 0\,, & |x| > a, \end{cases}$$

$$\lim_{y\to\infty} u(x,y) < \infty.$$

3.14. Una barra de longitud L se encuentra térmicamente aislada sobre su superficie lateral y sus extremos se mantienen a temperatura cero. Si la temperatura inicial de la barra es constante, $u(x,0) = u_0$, se pide encontrar la distribución de temperaturas $u(x,t)$ en cualquier instante posterior mediante:

a) El método de separación de variables.

b) El método de las transformadas integrales.

3.15. Halla mediante el método de la transformada de Laplace la solución del siguiente problema de difusión:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma^2(u - u_1) = \frac{\partial u}{\partial t}\,, \qquad 0 \le x \le 1\,, \qquad t > 0,$$

con condiciones de contorno

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=1} = 0$$

y condición inicial $u(x,0) = u_0$.

3.16. Un modelo sencillo para describir la propagación de organismos que se reproducen con velocidad α y se dispersan al azar en el espacio (se difunden) viene dado por las ecuaciones[17]

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + \alpha\, u(x,t),$$
$$u(x,0) = \delta(x),$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = 0.$$

a) Utiliza el procedimiento de la transformada de Laplace para demostrar que su solución es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}}\exp\left(\alpha t - \frac{x^2}{4kt}\right).$$

b) Demuestra que en los contornos isoprobables, es decir, en los puntos (x,t) en los que $P(x,t) = \bar{P} = \text{const.}$, se verifica que

$$\frac{x}{t} = \pm\left[4\alpha k - 2k\frac{\ln t}{t} - \frac{4k}{t}\ln\left(\sqrt{4\pi k}\,\bar{P}\right)\right]^{1/2}.$$

[17] Véase, por ejemplo, el capítulo 10 de L. Edelstein-Keshet, "*Mathematical Models in Biology*", SIAM, Filadelfia, 2005.

c) Demuestra que para $t \to \infty$ la velocidad de expansión de estos contornos, es decir, la velocidad con la que los organismos se dispersan, se aproxima a

$$\frac{x}{t} = \pm(4\alpha k)^{1/2}.$$

d) Compara esta velocidad de expansión con la de un proceso puramente difusivo ($\alpha = 0$), $x \sim \sqrt{kt}$, y extrae conclusiones.

3.17. Halla la solución del siguiente problema de propagación de una onda a lo largo de una cuerda infinita:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} h, & |x| < \epsilon, \\ 0, & |x| > \epsilon, \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

3.18. Una membrana vibrante circular está sujeta por su perímetro (membrana de un tambor). Halla la posición de la membrana $u(r,\theta,t)$ en cualquier instante t si inicialmente su desplazamiento viene dado por (a) $u(r,\theta) = f(r,\theta)$, (b) $u(r,\theta) = f(r)$, (c) $u(r,\theta) = u_0$.

3.19. Se pide calcular el campo estacionario de temperaturas de una superficie semiinfinita de grosor π cuya base está a temperatura $T(x)$, uno de sus lados a temperatura u_0, y el otro a temperatura u_1. Es decir, resuélvase la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

donde $u(x,0) = T(x)$ para $0 < x < \pi$, y $u(0,y) = u_0$ y $u(\pi,y) = u_1$ para $y > 0$. Por supuesto $u(x,y) =$ finito. Halla la solución explícita cuando

$$T(x) = T_0 + u_0 + \frac{u_1 - u_0}{\pi}\, x,$$

siendo T_0 una constante.

3.20. Usa el método de la transformada de Laplace para hallar la solución de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

que satisface las condición de contorno $u(x,t) =$ finito para $x \to \pm\infty$ y la condición inicial $u(x,0) = \operatorname{sen} x,\ \partial u/\partial t|_{t=0} = 0$.

3.21. Una barra de longitud π tiene inicialmente ($t = 0$) la temperatura $u(x,0) = f(x)$. Sus extremos se mantienen a temperatura constante, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 1$. En el instante $t = 0$ se la pone en contacto con una fuente de calor no estacionaria dada por $Q(x,t) = \operatorname{sen}(3x)\,\mathrm{e}^{-t}$. Se pide hallar la distribución de temperatura $u(x,t)$ en cualquier instante posterior mediante la resolución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t).$$

Halla expresiones explícitas para $u(x,t)$ si (a) $f(x) = x/\pi + \operatorname{sen} x$, y (b) $f(x) = x/\pi + \operatorname{sen} 3x$.

3.22. El método del desarrollo en autofunciones para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales no homogéneas (método expuesto en la sección 3.5.4, página 191) no está limitado a ecuaciones difusivas. Esto se ilustra en el presente problema.

a) Resuelve la ecuación ondulatoria

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \qquad 0 \le x \le \pi\,,$$

con las condiciones de contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ y condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$, para demostrar que la solución puede escribirse como $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$ siendo $\phi_n(x)$, $n = 1, 2, \cdots$, las autofunciones del problema de Sturm-Liouville

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \lambda\phi = 0$$

con las condiciones de contorno $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$.

b) Halla en forma de serie de autofunciones $\phi_n(x)$ la solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sen} 2x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \qquad 0 \le x \le \pi\,,$$

que satisface las condiciones de contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, y las condiciones iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$. Halla la solución explícita si $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.

Capítulo 4

Métodos numéricos

4.1. Introducción

En Ciencia e Ingeniería son escasos los problemas que pueden resolverse de forma analítica exacta. En ocasiones afortunadas logramos al menos hallar soluciones analíticas aproximadas; en otras, nuestra solución del problema es de un tipo menos específico, más global, más cualitativo. Felizmente, en muchos casos podemos recurrir a la resolución de estos problemas mediante métodos numéricos. Encontraremos ejemplos de estas afirmaciones en el tema que dedicamos a las ecuaciones diferenciales no lineales.

La importancia de los métodos numéricos es creciente debido la existencia generalizada de ordenadores relativamente baratos y de gran potencia de cálculo. Sin embargo, los métodos numéricos adolecen de una acusada incapacidad para el análisis. Por este motivo es generalmente muy difícil entender un sistema si sólo se sabe de él lo que nuestros cálculos numéricos nos han proporcionado. Las expresiones analíticas o los resultados cualitativos tienen la enorme ventaja de permitirnos entender de "un vistazo" lo que es relevante en un problema físico. Alcanzar un grado equivalente de certeza o comprensión mediante procedimientos exclusivamente numéricos sin apenas apoyos teóricos suele ser imposible o, si hay suerte, extremadamente laborioso. Por ello, la aplicación fructífera de los métodos numéricos requiere:

- Entender el problema que estamos resolviendo.
- Entender el procedimiento o algoritmo numérico que se emplea, es decir, sus fundamentos, sus posibilidades, las circunstancias bajo las cuales podría dar malos resultados, etc.
- Conocer lo que vamos a obtener. Esto es poco más que un corolario de las dos afirmaciones anteriores. Pero lo cierto es que si obtenemos un resultado completamente inesperado, la situación es muy difícil: ¿ha fallado nuestra comprensión del problema o el procedimiento numérico?

¿Hace falta decir que toda regla, incluido ésta, siempre tiene excepciones? En la última prescripción, hemos dicho que si se obtienen resultados numéricos completamente inesperados entonces estamos en una situación "difícil". Este calificativo es probablemente adecuado para la mayor

parte de las situaciones.[1] Sin embargo, en otras ocasiones, el calificativo debería ser el de "prometedor" porque quizás lo que los resultados numéricos nos están anunciando es la presencia de fenómenos nuevos (completamente inesperados) y la necesidad de nuevos conceptos teóricos. ¡Hay que tener los ojos siempre abiertos a lo extraordinario! Probablemente el ejemplo más famoso de esta situación lo constituye lo que ahora se conoce como el problema de Fermi-Pasta-Ulam (FPU) consistente en el sorprendente descubrimiento, hacia 1950, de una recurrencia casi perfecta en la solución numérica de 32 ecuaciones diferenciales no lineales hallada mediante el ordenador MANIAC I en Los Alamos. El descubrimiento era sorprendente porque contradecía la "evidente" idea de que la energía en un sistema conservativo de osciladores no lineales acoplados (un modelo simple de un sólido cristalino) se distribuiría con el paso del tiempo de forma uniforme por todos los grados de libertad del sistema. El análisis de este problema, descubierto numéricamente y cuyo análisis es casi imposible sin el recurso de los cálculos numéricos, tiene ya más de medio siglo de historia y aún hoy sigue siendo objeto de un estudio intenso.[2]

En este capítulo vamos a estudiar algunos conceptos y técnicas básicas de los métodos numéricos que se emplean en Ciencia e Ingeniería.

4.2. Aritmética con precisión finita

Cuando se hacen cálculos numéricos mediante ordenador hay que ser conscientes en todo momento de que el ordenador efectúa típicamente estos cálculos mediante números que no son exactos.[3] Esto es a lo que nos referimos cuando decimos que el ordenador trabaja con aritmética de precisión finita. Esto puede tener consecuencias inesperadas (e indeseables) sobre los resultados de nuestros cómputos. En esta sección discutiremos brevemente estas cuestiones.[4]

4.2.1. Los números son palabras

Los ordenadores representan internamente los números que procesan mediante una ristra (o lista) finita de dígitos. Por ejemplo, el número π se representaría como una ristra finita de dígitos que comienza por $3'141\ldots$. El tamaño de esta lista depende del tipo de ordenador y del programa de computación que se utilice. Por ejemplo, en el programa `QBASIC` de Microsoft y en precisión simple, el número π vendría dado aproximadamente por el número $3'141593$ (es decir, por un número de unos siete dígitos significativos).

Usualmente los ordenadores representan internamente los números en sistema binario (es decir, de base 2). El sistema binario es tan fácil de entender como el decimal. Por ejemplo, el número binario $(101'011)_2$ representa al número dado por

$$\begin{aligned}(101'011)_2 &\equiv 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 + 0\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 1\times 2^{-3}\\ &= 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Por supuesto, este número en notación decimal es

$$5 + 0'25 + 0'125 = 5'375 \equiv 5\times 10^0 + 3\times 10^{-1} + 7\times 10^{-2} + 5\times 10^{-3}.$$

[1] Se asume que el procedimiento numérico no es incorrecto de un modo trivial, como por ejemplo, por un error de programación.

[2] Véase, por ejemplo, *The FPU problem: 50 years of progress*, G. P. Berman and F. M. Izrailev, `http://arxiv.org/abs/nlin.CD/0411062`, y *Computational Synergetics and Mathematical Innovation*, N. J. Zabusky, Journal of Computational Physics **43**, 195-249 (1981).

[3] Existen programas conocidos como programas de cálculo simbólico que pueden operar de forma exacta con números enteros y con fracciones de números enteros (¡y con símbolos y transformaciones matemáticas!). Algunos de estos programas son *Mathematica*, *Maple*, *Derive*,...

[4] Pueden verse más detalles en [KC94, capítulo 2] y [Ant02, capítulo 2].

Estos números binarios se suelen representar mediante la representación científica normalizada. En el sistema decimal, la representación científica normalizada del número x vendría dada por

$$x = \pm r \times 10^{\pm n} \qquad \text{con } \frac{1}{10} \leq r < 1 \text{ y } n \text{ entero.} \tag{4.1}$$

Es decir, todos los dígitos aparecen a la derecha de la coma decimal siendo el primero distinto de cero (a r se le llama la mantisa y a n el exponente de x). De este modo, por ejemplo, $432'13$ se representa como $0'43213 \times 10^3$. Similarmente, en el sistema binario la notación científica normalizada es

$$x = \pm q \times 2^{\pm m} \qquad \text{con } \frac{1}{2} \leq q < 1 \text{ y } m \text{ entero,} \tag{4.2}$$

donde a q y m se les conoce como *mantisa* y *exponente*, respectivamente, de x.

Palabras y bits

Ya hemos dicho que los ordenadores representan los números mediante una ristra finita de dígitos binarios. Típicamente, en precisión simple, utilizan 32 de estos dígitos para cada número. A esta ristra de 32 dígitos binarios se la suele llamar *palabra*, y cada uno de los 32 dígitos binarios es un *bit*.[5] La asignación típica de los *bits* de un número representado mediante la notación científica normalizada de (4.2) es:

$$\begin{cases} \text{1 bit para el signo de la mantisa.} \\ \text{23 bits para la mantisa.} \\ \text{1 bit para el signo de exponente.} \\ \text{7 bits para el exponente.} \end{cases} \tag{4.3}$$

La utilización sistemática de la notación científica normalizada implica que el primer dígito de la mantisa q es un 1, pues de ser 0 correríamos la coma un lugar a la derecha y disminuiríamos m en una unidad. De este modo no desperdiciamos un bit almacenando un dígito que siempre es 1. En otras palabras, la mantisa q es un número que se describe con 24 dígitos siendo 1 el primero:

$$q = (0'1a_2a_3\ldots a_{24})_2.$$

Como se dispone de siete bits para almacenar el exponente m, se tiene que cumplir que

$$m \leq (1\,1\,1\,1\,1\,1\,1)_2 = 2^7 - 1 = 127.$$

Luego los números que se pueden representar, si se usa la asignación típica de bits dada en (4.3), están comprendidos en el rango

$$(0'100\ldots0) \times 2^{-127} \leq |x| \leq (0'11\ldots1) \times 2^{127},$$

es decir,

$$2^{-128} \lesssim |x| \lesssim 2^{127}.$$

Dado que $2^{127} \simeq 10^{38}$, la anterior relación es equivalente a

$$10^{-38} \lesssim |x| \lesssim 10^{38}.$$

Es decir, si se representan los números mediante palabras de 32 bits y se emplea la asignación (4.3), entonces el ordenador no puede manejar números menores que 2^{-127} ni mayores que 2^{127}. En este caso, cuando realiza una operación numérica cuyo resultado es menor que 2^{-127}, el ordenador (para ser precisos, el programa de cálculo) da típicamente un mensaje en el que indica que se ha producido "underflow"; si el resultado el mayor que 2^{-127}, el mensaje es de "overflow".

[5] A una agrupación de 8 bits se la llama *byte*. Esta es la unidad típica en la que se mide la capacidad de memoria y de almacenamiento de una máquina. Sus múltiplos usuales son el kilobyte (1.024 bytes), el megabyte (1024 kilobytes), y el gigabyte (1024 megabytes).

Números enteros

Los números que acabamos de describir se conocen como *números de coma flotante*[6]: son números que tienen una "coma decimal", es decir, son números no enteros. Los número enteros no tienen exponente, son todo mantisa, por lo que se representan con todos los bits de la palabra excepto uno reservado para el signo, es decir,

$$n = (\pm a_1 a_2 a_3 \ldots a_{31})_2 \,, \tag{4.4}$$

donde hemos asumido que el número entero está representado por una única palabra de 32 bits. Por tanto el rango de los números enteros viene dado por

$$-(1\,1\,1 \ldots 1\,1)_2 \leq n \leq +(1\,1\,1 \ldots 1)_2,$$

es decir,

$$-(2^{31} - 1) \leq n \leq 2^{31} - 1 = 2\,147\,483\,647.$$

▷ ***Ejercicio*** *4.1*

El esquema de asignación de bits (4.3) es típico, pero, por supuesto, quienes diseñan los programas de cómputo suelen emplear esquemas de asignación más refinados para mejorar el rango de valores que se pueden emplear. Por ejemplo, el programa `QBASIC` *nos informa en su pantalla de ayuda de los siguientes límites:*

```
Limits to QuickBASIC - Names, Strings, and Numbers
                                       Maximum                Minimum
Integers                               32,767                -32,768
Long Integers                          2,147,483,647         -2,147,483,648
Single precision numbers (positive)    3.402823 E+38          1.401298 E-45
Single precision numbers (negative)   -1.401298 E-45         -3.402823 E+38
Double precision numbers (positive)
                          Maximum:     1.797693134862315 D+308
                          Minimum:     4.940656458412465 D-324
Double precision (negative)
                          Maximum:    -4.940656458412465 D-324
                          Minimum:    -1.797693134862315 D+308
```

¿Cuál crees que es el esquema de asignación y el numero de bits empleados para cada caso? Ayuda: $\log_2\left(3'402823 \times 10^{38}\right) = 128$, $\log_2\left(1'401298 \times 10^{-45}\right) = -149$, $\log_2\left(1'797693134862315 \times 10^{308}\right) = 1024$, $\log_2\left(4'940656458412465 \times 10^{-324}\right) = -1074$.

Números de máquina

Los números de máquina son aquellos que son representados de forma exacta por el ordenador. En precisión simple son aquellos de la forma

$$x = (0'1a_2 \ldots a_{24})_2 \times 2^m \qquad \text{con } a_i = 0, 1.$$

Un número que no es de máquina sería aquel que viene representado por

$$x = (0'1a_2 \ldots a_{24} a_{25} \ldots)_2 \times 2^m \qquad \text{con } a_i = 0, 1.$$

En las siguientes secciones vamos a ver varias situaciones (no tan especiales como podríamos pensar) en las que los resultados que se obtienen son completamente erróneos debido a la precisión finita con la que se procesan los números en un ordenador. A los errores que tienen esta causa, se les conoce habitualmente como errores de redondeo.

[6]O de punto flotante, si usamos al modo anglosajón un punto para indicar donde comienzan los dígitos fraccionarios

4.2.2. Pérdida de dígitos significativos en la sustracción de cantidades casi iguales

Supongamos, para simplificar la exposición, que tenemos un ordenador que trabaja con números decimales cuya mantisa es de 7 dígitos decimales y que queremos hallar la diferencia $x - y$ donde $x = 0'123456789$ y $y = 0'123454444$. Sin necesidad de usar el ordenador sabemos que

$$\left.\begin{aligned} x &= 0'12345678900\cdots \\ y &= 0'12345444400\cdots \end{aligned}\right\} \Rightarrow x - y = 0'00000234500\cdots = 0'2345 \times 10^{-5}.$$

Sin embargo, el ordenador, al estar limitado a usar números con una mantisa de 7 dígitos decimales, redondeará dichos números con lo que la sustracción será

$$\left.\begin{aligned} x' &= 0'1234568 \\ y' &= 0'1234544 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x' - y' = 0'0000024.$$

El segundo dígito de la diferencia ya no es exacto. Si calculamos el error relativo vemos que es muy grande

$$\left|\frac{(x-y)-(x'-y')}{x-y}\right| \simeq 2\,\%,$$

a pesar de que el ordenador utiliza números con 7 cifras significativas (es decir, mantisa de 7 dígitos).

▷ ***Ejercicio** 4.2*

El resultado que hemos dado antes $x' - y' = 0'0000024$ no está en la representación científica normalizada que usa el ordenador. Se pide, por tanto, escribir mediante representación científica normalizada el número $x' - y'$ que calcularía el ordenador anterior. Como ayuda, aquí tenéis algunas posibles respuestas: $0'2400000 \times 10^{-5}$, $0'2450000 \times 10^{-5}$, $0'24????? \times 10^{-5}$
Quizás esto te sirva de ayuda: he usado el siguiente programa `QBASIC` *en un ordenador,*

```
x = .123456789#: y = .123454444#
r = x - y
PRINT "x="; x
PRINT "y="; y
PRINT "x-y="; r
```

y el resultado fue

```
x= .1234568
y= .1234544
x-y= 2.346933E-06
```

¿Qué ha pasado?

▶ *Ejemplo 4.1*

Este ejemplo muestra muy claramente la nefasta influencia que puede tener la pérdida de dígitos significativos al restar cantidades muy parecidas. Para calcular la cantidad $(x-1)/\epsilon$ donde $x = 1 + \epsilon$ y $\epsilon = 10^{-n}$, con $n = 1, 2, \ldots$, se ha confeccionado el siguiente programa en `QBASIC` que trabaja en precisión simple:

```
PRINT " n", "  eps", "((1 + eps) - 1) / eps"
uno = 1: nfin = 10
FOR n = 1 TO nfin
   eps = uno / 10 ^ n
   x = uno + eps
   ratio = (x - uno) / eps
   PRINT n, eps, ratio
NEXT n
```

El resultado del programa es:

```
  n              eps        ((1 + eps) - 1) / eps
  1             .1            1
  2             .01           .999999
  3             .001          1.000047
  4             .0001         1.000166
  5             .00001        1.001358
  6             .000001       .9536743
  7             .0000001      1.192093
  8             1E-08         0
  9             1E-09         0
 10             1E-10         0
```

donde, debajo de la columna que empieza con la letra "`n`" aparece el valor del exponente n, debajo de la columna que comienza con "`eps`" aparece el correspondiente valor de ϵ y, a continuación, debajo de la columna que comienza con "`((1 + eps) - 1) / eps`" aparece el valor calculado de de $[(1-\epsilon)-1]/\epsilon$ que, evidentemente, *debiera* ser 1.

◀

4.2.3. Errores en la suma de cantidades con magnitudes muy distintas

Otra peligrosa manifestación de la finitud de la precisión de los números de coma flotante surge cuando se suman cantidades de magnitud muy diferente. El siguiente ejemplo ilustra este hecho de una forma muy clara.

► *Ejemplo 4.2*

Vamos en este ejemplo a sumar i veces una cantidad muy pequeña ϵ. Obviamente, su valor exacto es $i\epsilon$. El programa `QBASIC` que lleva a cabo esta tarea es:

```
n = 10 ^ 7: uno = 1: eps = uno / n
PRINT "             n="; n, "eps=uno/n="; eps
PRINT "    i", "     S", " error=S-eps*i", "    % error"
suma = 0
FOR i = 1 TO n
   suma = suma + eps
   IF i MOD 10 ^ 6 = 0 THEN
       PRINT i, suma, suma - (i * eps), 100 * (suma - i * eps) / (i * eps)
   END IF
NEXT i
```

Este programa suma i veces la cantidad $1/10^7$ y muestra las sumas parciales bajo la columna que empieza por `S` cuando $i = 10^6,\ 2\times10^6,\ 3\times10^6,\ldots,\ 9\times10^6,\ 10^7$. La tercera columna muestra el error absoluto y la última da el error en tanto por ciento. El resultado es:

```
                n= 1E+07      eps=uno/n= .0000001

   i              S               error=S-eps*i        % error
 1000000       9.906045E-02       -9.395477E-04        -.9395477
 2000000       .2013732            1.373232E-03         .686616
 3000000       .2977269           -2.273134E-03        -.7577113
 4000000       .3871338           -1.286617E-02       -3.216542
 5000000       .4765408           -.0234592           -4.69184
 6000000       .5879304           -1.206963E-02       -2.011604
 7000000       .7071397            7.139663E-03        1.019952
 8000000       .826349             2.634895E-02        3.293619
 9000000       .9455582            4.555824E-02        5.062027
 1E+07         1.064767            6.476746E-02        6.476747
```

El error que se comete no es nada despreciable.

◀

▷ ***Ejercicio** 4.3*

Pepito Matemático ha intentado comprobar la fiabilidad de la fórmula $(1+\epsilon)^2 \simeq 1+2\epsilon$ (que acaba de aprender) utilizando para ello el programa `QBASIC` *que tiene en su ordenador. Su programa es el siguiente*

```
PRINT "eps", "(1+eps)^2", "2 eps"
FOR m = 1 TO 10
eps = 10 ^ (- m)
x= (1 + eps) ^2
PRINT eps, x, x - 1
NEXT m
```

El resultado del programa es:

```
 eps            (1+eps)^2      2 eps
 .1             1.21           .21
 .01            1.0201         .0201
 .001           1.002001       2.001047E-03
 .0001          1.0002         2.000332E-04
 .00001         1.00002        2.002716E-05
 .000001        1.000002       2.026558E-06
 .0000001       1              2.384186E-07
 1E-08          1              0
 1E-09          1              0
 1E-10          1              0
```

Explícale a Pepito Matemático lo que ha sucedido.

Evaluación del polinomio pérfido de Wilkinson

En esta sección vamos a intentar llevar a cabo una tarea realmente sencilla (sobre todo para un ordenador), a saber, sumar 21 números. Estos números son los valores que toman los 21

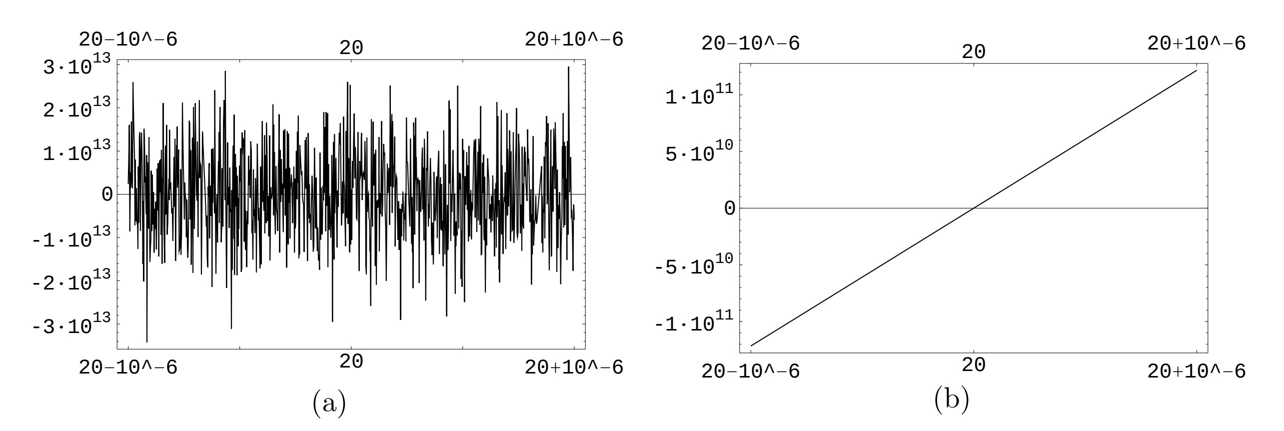


Figura 4.1: Gráfica entre $x = 20 - 10^{-6}$ y $x = 20 + 10^{-6}$ del polinomio pérfido de Wilkinson $P(x)$ calculado numéricamente con un programa de ordenador que emplea una mantisa de 16 dígitos decimales mediante (a) la fórmula (4.6), (b) la fórmula (4.5).

monomios que forman el polinomio pérfido de Wilkinson. Este polinomio se define fácilmente:

$$P(x) = \prod_{n=1}^{20} (x-n) = (x-1)\,(x-2)\cdots(x-20) \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &= 2432902008176640000 - 8752948036761600000x + 13803759753640704000x^2 \\ &\quad - 12870931245150988800x^3 + 8037811822645051776x^4 - 3599979517947607200x^5 \\ &\quad + 1206647803780373360x^6 - 311333643161390640x^7 + 63030812099294896x^8 \\ &\quad - 10142299865511450x^9 + 1307535010540395x^{10} - 135585182899530x^{11} \\ &\quad + 11310276995381x^{12} - 756111184500x^{13} + 40171771630x^{14} - 1672280820x^{15} \\ &\quad + 53327946x^{16} - 1256850x^{17} + 20615x^{18} - 210x^{19} + x^{20}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En la figura 4.1 se ha representado la evaluación numérica del polinomio de Wilkinson en las vecindades de la raíz $r = 20$ usando la fórmula (4.6) mediante un programa (*Mathematica*) que emplea números con unos de 16 dígitos decimales de mantisa. Si nos fiáramos del resultado numérico, podríamos concluir que la función $P(x)$ tiene decenas de raíces en el intervalo $(20 - 10^{-6}, 20+10^{-6})$, lo que es absurdo pues sabemos que el polinomio $P(x) = \prod_{n=1}^{20}(x-n)$ tiene sólo 20 ceros situados en $x = 1, 2, \cdots, 20$. Simplemente este ejemplo (aunque daremos más) debiera convencernos de la necesidad de ser cuidadosos y de no fiarnos ciegamente de los resultados numéricos: estos deben siempre ser comprobados ¡al menos en su orden de magnitud![7]

▷ ***Ejercicio** 4.4*

La figura 4.1 es en principio sorprendente. Pero si pensamos un poquito, quizás no lo sea tanto.

1. *¿A qué crees que se debe la evidente falsedad de la figura 4.1(a)?*
2. *¿Por qué, en cambio, la figura 4.1(b) ha sido evaluada correctamente?*
3. *Estima el número de dígitos decimales de la mantisa que el programa debería usar para que la figura (a) adoptara un aspecto más normal. (Pista: $20^{20} = 1'048\cdots \times 10^{26}$)*

[7]¿No deberíamos saber “siempre” el orden de magnitud de la solución de nuestro problema?

4.2.4. Inestabilidad numérica

Decimos que en un proceso de cómputo se da inestabilidad numérica cuando pequeños errores iniciales se van agrandando a lo largo del proceso hasta hacer que los resultados numéricos sean incorrectos. En la sección 2.8.4 de la página 136 ya vimos un ejemplo de cómo un algoritmo de cálculo numérico de las funciones de Bessel era inestable cuando se utilizaba la relación de recurrencia (2.209) en el sentido de índices crecientes. Aquí vamos a ver otro ejemplo de una relación de recurrencia inestable.

▶ *Ejemplo 4.3*

Queremos calcular la serie $\{x_n\}$ definida de modo recursivo mediante las siguientes relaciones:

$$x_0 = 1, \tag{4.7a}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}, \tag{4.7b}$$

$$x_{n+1} = \frac{13}{3} x_n - \frac{4}{3} x_{n-1}. \tag{4.7c}$$

Lo haremos mediante el siguiente programa escrito en `QBASIC`:

```
DIM x(30)
x(0) = 1 : x(1) = 1 / 3
FOR n = 1 TO 19
    x(n + 1) = 13 / 3 * x(n) - 4 / 3 * x(n - 1)
    PRINT n + 1, x(n + 1)
NEXT n
```

Los resultados del programa son:

```
 2              .1111112
 3              3.703722E-02
 4              1.234641E-02
 5              4.118151E-03
 6              1.383441E-03
 7              5.040426E-04
 8              3.395967E-04
 9              7.99529E-04
 10             3.01183E-03
 11             1.198523E-02
 12             .0479202
 13             .1916739
 14             .7666934
 15             3.066773
 16             12.26709
 17             49.06836
 18             196.2735
 19             785.0938
 20             3140.375
```

En la primera columna aparece n, en la segunda x_n. ¿Son correctos estos resultados numéricos? La respuesta es ¡no! No es difícil entender lo que ha pasado. La ecuación (4.7c) es una ecuación en diferencias cuya solución general es de la forma

$$x_n = A \left(\frac{1}{3}\right)^n + B\, 4^n,$$

como puede (y debe) comprobarse por sustitución. Sin embargo, la solución particular que satisface $x_0 = 1$ y $x_1 = 1/3$ es $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, pues

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\left(\frac{1}{3}\right)^0 + B4^0 = A + B = 1 \\ x_1 &= \frac{A}{3} + 4B = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = 1, \quad B = 0 \quad \text{c.q.d.}$$

Por tanto, dado que la serie definida por (4.7) no es más que $\{x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\}$, descubrimos que la serie que calculó el ordenador era completamente errónea. De hecho, a partir de $n = 8$ la serie se convertía en creciente, *cuadruplicándose* aproximadamente cada término con respecto al anterior.
¿Qué ha pasado? ¿Cuál es la explicación de este comportamiento tan extraño? La explicación no es difícil si nos damos cuenta de que el ordenador no trabaja con números exactos. Esto significa que para él la condición inicial exacta $x_0 = 1$ y $x_1 = \frac{1}{3}$ es realmente $x_0 = 1 + \delta_0$ y $x_1 = \frac{1}{3} + \delta_1$, siendo δ_0 y δ_1 cantidades pequeñas (próximas a cero) pero no nulas. Esto implica que B, aunque próximo a cero, no es estrictamente nulo, es decir el ordenador "utiliza" la fórmula $x_n = A\,\left(\frac{1}{3}\right)^n + B\,4^n$ con $A \simeq 1$ y $B \simeq 0$ pero $B \neq 0$. Esto hace que para n suficientemente grande, el término $B\,4^n$ domine sobre $A\left(\frac{1}{3}\right)^n$ y encontremos erróneamente una serie geométrica creciente en la que los términos se van cuadruplicando.

◀

▶ *Ejemplo 4.4*

El iterador cuadrático o logístico

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \qquad 0 < x_0 < 1,$$

es un proceso con un comportamiento caótico y que, por tanto, tiende a amplificar los errores ("efecto mariposa"). Esto quiere decir que si el proceso comienza en $x_0' = x_0 + \epsilon$ con $0 < \epsilon \ll 1$, resulta que tras un número m de iteraciones (con m no muy grande) los valores de $x_{n+1}' = 4x_n'(1 - x_n')$ difieren sustancialmente de x_n. Por ejemplo, sea $x_0 = 1/3$ y $x_0' = x_0 + \epsilon$ con $\epsilon = 10^{-10}$. En la figura 4.2(a) se muestra cómo evoluciona la diferencia $E_n = |x_n - x_n'|$. Se ve que E_n aumenta rápidamente (duplicándose por término medio en cada iteración) alcanzando un valor del orden de la unidad tras poco más de 30 iteraciones.
En la figura 4.2(b) se muestra otro ejemplo espectacular de cómo el "efecto mariposa" arruina el computo de una órbita $\{x_n\}$ que tendría que ser periódica. En esta figura se han calculado los primeros 80 puntos de la órbita $\{x_n\}$ que comenzó en $x_0 = \text{sen}^2(\pi/7)$. Es fácil darse cuenta que esta órbita debiera ser periódica con periodo tres pues:

$$\begin{aligned} x_1 &= 4\,\text{sen}^2(\pi/7)\left[1 - \text{sen}^2(\pi/7)\right] = 4\,\text{sen}^2(\pi/7)\cos^2(\pi/7) = \text{sen}^2(2\pi/7)\,, \\ x_2 &= 4\,\text{sen}^2(2\pi/7)\left[1 - \text{sen}^2(2\pi/7)\right] = 4\,\text{sen}^2(2\pi/7)\cos^2(2\pi/7) = \text{sen}^2(4\pi/7)\,, \\ x_3 &= 4\,\text{sen}^2(4\pi/7)\left[1 - \text{sen}^2(4\pi/7)\right] = 4\,\text{sen}^2(4\pi/7)\cos^2(4\pi/7) = \text{sen}^2(8\pi/7)\,, \end{aligned}$$

y como $\text{sen}^2(8\pi/7) = \text{sen}^2(\pi/7)$, concluimos que, de forma exacta, $x_3 = x_0$. Sin embargo, como muestra la figura 4.2(b), el cálculo numérico de esta órbita se malogra tras poco más de 50 iteraciones a pesar que los cálculos se han realizado con un programa que trabaja con números con unos 16 dígitos decimales de mantisa. La razón es clara:

$$\text{sen}^2(8\pi/7) = 0'188255099070633234737497557997880\ldots$$

no puede expresarse de forma exacta con 16 dígitos decimales, de modo que ese pequeño error en su representación se amplifica (típicamente se duplica) en cada iteración y al cabo de unas decenas de iteraciones la órbita no se parece en nada a la órbita auténtica correspondiente al valor exacto $\text{sen}^2(8\pi/7)$.
¿Qué sucede si repetimos esta experiencia con el valor $x_0 = 3/4$? Es fácil ver que x_0 es un punto fijo porque $x_1 = 3/4$, y por tanto $x_n = 3/4$ para todo n. Sin embargo, como sabemos que el iterador cuadrático amplifica los pequeños errores iteración tras iteración, podríamos pensar que si calculáramos numéricamente esta

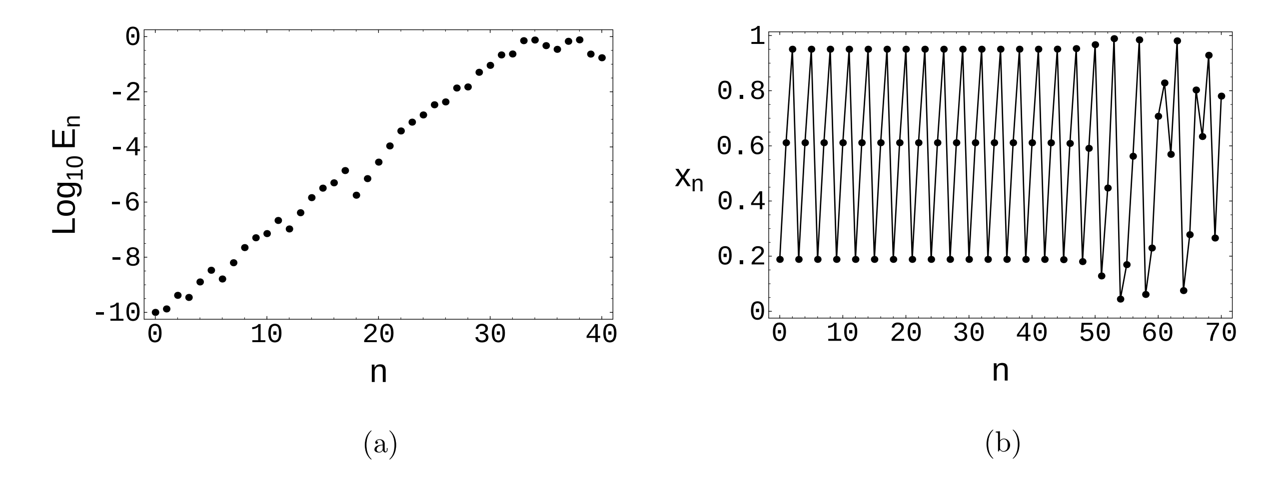


Figura 4.2: Resultados numéricos obtenidos mediante un programa que evalúa el iterador cuadrático usando una mantisa de unos 16 dígitos decimales. (a) Logaritmo de $E_n = |x_n - x'_n|$ frente a n cuando $x_0 = 1/3$ y $x'_0 = x_0 + 10^{-10}$. (b) Órbita $\{x_n\}$ para $x_0 = \operatorname{sen}^2(\pi/7)$.

órbita podríamos encontrarnos con una fenomenología similar a la que descubrimos con $x_0 = \operatorname{sen}^2(\pi/7)$ de modo que la órbita calculada se alejaría del valor teórico $x_n = 3/4$ tras unas decenas de iteraciones. Sin embargo, esto no ocurre ¡incluso llevando a cabo los cálculos con programas o máquinas que empleen muy pocos dígitos de mantisa! La razón es sencilla: sucede que $3/4$ es un *número de máquina* pues su representación exacta en binario es bien simple: $3/4 = (0'11)_2$. Por tanto, cualquier ordenador que trabaje con una mantisa de unos pocos bits será capaz de implementar el iterador cuadrático de forma exacta para este número concreto.

◀

4.2.5. Problemas mal condicionados

En los problemas mal condicionados pequeños cambios en los datos que definen al problema dan lugar a grandes cambios en las soluciones. Este concepto es muy similar al de inestabilidad.

No es en absoluto extraño encontrarse con problemas mal condicionados. Esto puede suceder, por ejemplo, cuando se pretende calcular las raíces de una función. Veámoslo. Sea r una raíz simple de $f(x)$ (por lo que $f'(r) \neq 0$). Si perturbamos $f(x)$ y obtenemos $F(x) = f(x) + \epsilon\, g(x)$ con $\epsilon \ll 1$, ¿cúanto vale la correspondiente raíz R de $F(x)$? Si $|\epsilon| \ll 1$, es "razonable" pensar que la nueva raíz será $R = r + h$ con $|h| \ll 1$. Estimemos el valor de h usando el teorema de Taylor con la forma de Lagrange para el residuo:

$$F(r+h) = 0 \Leftrightarrow f(r+h) + \epsilon\, g(r+h) = 0 \Rightarrow$$

$$[f(r) + h\, f'(r) + \frac{1}{2}h^2 f''(\xi)] + \epsilon\, [g(r) + h\, g'(r) + \frac{h^2}{2} g''(\eta)] = 0$$

donde ξ y η son puntos intermedios del intervalo $(r, r+h)$. Despreciando términos de orden h^2 y dado que $f(r) = 0$ se tiene que

$$h \simeq -\epsilon \frac{g(r)}{f'(r) + \epsilon\, g'(r)} \tag{4.8}$$

o bien, asumiendo que $\epsilon\, g'(r) \ll f'(r)$,

$$h \simeq -\frac{\epsilon\, g(r)}{f'(r)}.$$

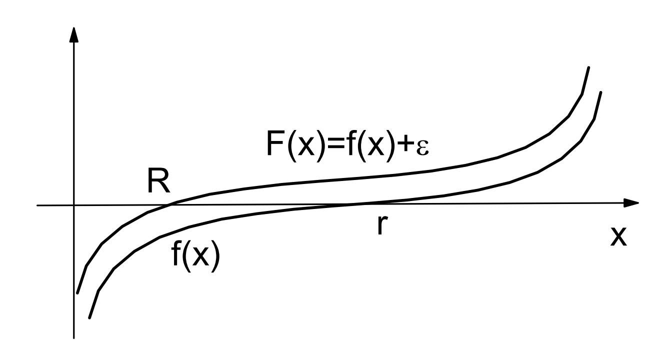


Figura 4.3: Un problema mal condicionado: aunque $f(x)$ y $F(x)$ difieren en una cantidad pequeña, sus correspondientes raíces r y R son muy distintas.

Nótese que si $f'(r)/g(r)$ es pequeño, entonces h es grande incluso para valores pequeños de ϵ, en contradicción con nuestra suposición inicial de que $|h| \ll 1$. En la figura 4.3 se ilustra este fenómeno.

Veamos a continuación un ejemplo concreto.

▶ *Ejemplo 4.5*

El polinomio pérfido de Wilkinson. Ya vimos en la sección 4.2.3 que este polinomio viene dado por

$$P(x) = \prod_{n=1}^{20}(x-n) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) \tag{4.9}$$

$$= x^{20} - 210x^{19} + 20615x^{18} + \cdots - 8752948036761600000x + 2432902008176640000. \tag{4.10}$$

¿Cómo se modifica el valor de la raíz $r = 20$ cuando cambiamos el coeficiente de x^{20} de 1 a $1+\epsilon$? Es decir, ¿cuál es la raíz correspondiente de la nueva función perturbada $F(x) = P(x) + \epsilon\, x^{20}$. Según lo discutido más arriba, esperamos que la nueva raíz venga dada aproximadamente por $20 + h$, donde h es un número pequeño ($|h| \ll 1$) que vendría dado aproximadamente por la ecuación (4.8) con $f(x) = P(x)$ y $g(x) = x^{20}$:

$$h \simeq -\epsilon \frac{g(20)}{f'(20) + \epsilon\, g'(20)} \simeq -\frac{\epsilon\, 20^{20}}{19! + \epsilon\, 20^{20}},$$

pues

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{20} \prod_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{20} (x-n)$$

por lo que

$$f'(20) = \left[\prod_{n=1}^{19}(x-n)\right]_{x=20} = 19!$$

Pero $2^{20}/19! \simeq 10^9$, luego

$$h \simeq -\frac{\epsilon\, 10^9}{1+\epsilon\, 10^9}.$$

Comprobamos de nuevo que el polinomio de Wilkinson es realmente pérfido: valores pequeñísimos de ϵ no conducen a un valor pequeño de h. Por ejemplo:

- Si $\epsilon = 10^{-6} \Rightarrow |h| \simeq \dfrac{10^3}{1+10^3} \simeq 1$, que no es despreciable en absoluto.

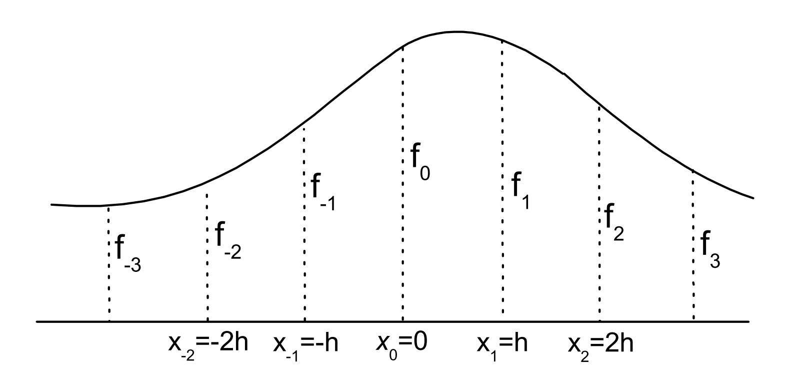


Figura 4.4: La función $f(x)$ y sus correspondientes valores f_n en un conjunto de puntos equiespaciados x_n.

- Si $\epsilon = 10^{-8} \Rightarrow |h| \simeq \frac{10}{11}$, que no es *mucho* menor que 1.
- Si $\epsilon = 10^{-9} \Rightarrow |h| \simeq \frac{1}{2}$, que tampoco es *mucho* menor que 1.

◀

4.3. Operaciones numéricas básicas

4.3.1. Diferenciación numérica

En esta sección estudiaremos cómo calcular numéricamente la derivada de la función $f(x)$ en $x = x_0 = 0$ a partir del conocimiento de alguno de los valores de $f(x)$ en las vecindades de $x = 0$. Las fórmulas que obtengamos se pueden generalizar al caso en el que $x_0 \neq 0$ sin más que trasladar el origen de abcisas al punto $x = x_0$.

Vamos a suponer que conocemos los valores f_n que toma la función $f(x)$ en un conjunto de puntos equiespaciados x_n (véase la figura 4.4):

$$\begin{aligned} x_n &\equiv n\,h, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ f_n &\equiv f(x_n). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nuestro objetivo es obtener expresiones aproximadas que nos proporcionen una buena estimación del valor de $f'(0) \equiv f'$ en términos de f_n. Para ello, empezamos desarrollando $f(x)$ en serie de Taylor en torno a cero

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,f''(0) + \frac{x^3}{3!}\,f^{(3)}(0) + \cdots \\ &\equiv f_0 + x\,f' + \frac{x^2}{2!}\,f'' + \frac{x^3}{3!}\,f^{(3)} + \cdots \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde hemos introducido la notación $f^{(n)}(0) \equiv f^{(n)}$. La serie de Taylor con el resto de Lagrange,

$$f(x) = f_0 + x\,f' + \frac{x^2}{2!}\,f'' + \cdots + \frac{x^{N-1}}{(N-1)!}\,f^{(N-1)} + \frac{x^N}{N!}\,f^{(N)}(\xi),$$

con $\xi \in (0, x)$, nos será especialmente útil en todo lo que sigue. En particular

$$f_{\pm 1} \equiv f(\pm h) = f_0 \pm h\,f' + \frac{h^2}{2}\,f'' \pm \frac{h^3}{3!}\,f'''(\xi_\pm) \tag{4.13}$$

donde $0 < \xi_+ < h$ y $-h < \xi_- < 0$. Restando f_{-1} de f_1 obtenemos

$$f_1 - f_{-1} = 2h\, f' + \frac{h^3}{3!}\left[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)\right],$$

y por tanto

$$f' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} - \frac{h^2}{12}\left[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)\right].$$

Tenemos pues que[8]

$$\boxed{f' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + O(h^2)}\,. \tag{4.14}$$

Despreciando el término de orden h^2 podemos aproximar el valor de $f'(x_0)$ por la fórmula

$$f' \simeq \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}, \tag{4.15}$$

que es la *derivada primera en diferencias central de tres puntos.*[9] La fórmula (4.15) es exacta si $f(x)$ es un polinomio de grado dos en el intervalo $[-h, h]$, dado que entonces $f'''(\xi_\pm) = 0$. Esto significa que la validez de (4.15) descansa en suponer que $f(x)$ puede aproximarse por un polinomio de grado dos que pasa por f_{-1}, f_0 y f_1.

De la expresión

$$f_{\pm 1} = f_0 \pm h\, f' + \frac{h^2}{2}\, f''(\xi_\pm)$$

se deduce también que

$$f' = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2}\, f''(\xi_+) = \frac{f_1 - f_0}{h} + O(h),$$

o bien que

$$f' = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + \frac{h}{2}\, f''(\xi_-) = \frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h).$$

Por tanto, despreciando términos de orden h, podemos aproximar $f'(x)$ en $x = 0$ (es decir, f') por

$$f' \simeq \frac{f_1 - f_0}{h}, \tag{4.16}$$

que es la *derivada lateral derecha de dos puntos*, o por

$$f' \simeq \frac{f_0 - f_{-1}}{h}, \tag{4.17}$$

que es la *derivada lateral izquierda de dos puntos.* La derivada lateral derecha proporciona el valor de f' de forma exacta si $f(x)$ es una función lineal en el intervalo $[0, h]$. De igual modo, la derivada lateral izquierda proporciona el valor de f' de forma exacta si $f(x)$ es una función lineal en el intervalo $[-h, 0]$. Esto significa que las fórmulas anteriores son tanto mejores cuanto más parecida es $f(x)$ a una función lineal en esos intervalos.

[8] Recordemos que la expresión $g(h) = O(h^n)$ para $h \to 0$ significa que $\lim_{h\to 0} g(h)/h^n = C =$ finito. Si sucediera que $C = 0$ escribiríamos $g(h) = o(h^n)$. Esto se discute con más detalle en la sección 7.3 de la página 407.

[9] El nombre procede del hecho de que para su cálculo necesitamos conocer el valor de la función en el intervalo $[-h, h]$ (en $-h$ y h para ser precisos) en cuyo interior hay *tres* puntos, $-h$, 0, h, que están *centrados* con respecto a $x_0 = 0$.

▶ *Ejemplo 4.6*

A continuación transcribimos un programa QBASIC[10] que calcula la derivada central de 3 puntos, y la derivada lateral derecha e izquierda de 2 puntos, de la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en el punto $x = x_0 = 1$. Por supuesto sabemos que el resultado exacto es $f'(1) = \cos(1)$. Después del programa damos el error de los resultados [esto es, la diferencia $f' - \cos(1)$] tal como aparece en la pantalla del ordenador.

```
'Programa DERIVA.BAS
x0 = 1 : h0 = .5 : f0 = SIN(x0) : exac = COS(x0)
FOR m = 0 TO 15
   h = h0 / 2 ^ m
   f1m = SIN(x0 - h) : f1p = SIN(x0 + h)
   dc3p = (f1p - f1m) / (2! * h)        'Deri. central 3 puntos
   dld2p = (f1p - f0) / h               'Deri. lateral dcha. 2 pts.
   dli2p = (f0 - f1m) / h               'Deri. lateral izqda. 2 pts.
   e3 = ABS(dc3p - exac)                'Error Deri. central
   e2d = ABS(dld2p - exac)              'Error Deri. lateral dcha.
   e2i = ABS(dli2p - exac)              'Error Deri. lateral izqda
PRINT USING "#.######   "; h; e3; e2d; e2i
NEXT m
```

Los resultados son:

```
0.500000   0.022233   0.228254   0.183789
0.250000   0.005611   0.110248   0.099026
0.125000   0.001406   0.053929   0.051117
0.062500   0.000352   0.026639   0.025935
0.031250   0.000088   0.013233   0.013058
0.015625   0.000023   0.006596   0.006550
0.007813   0.000008   0.003292   0.003277
0.003906   0.000004   0.001637   0.001629
0.001953   0.000004   0.000813   0.000805
0.000977   0.000011   0.000385   0.000408
0.000488   0.000019   0.000141   0.000103
0.000244   0.000019   0.000019   0.000019
0.000122   0.000019   0.000225   0.000263
0.000061   0.000225   0.000713   0.000263
0.000031   0.000263   0.000713   0.001240
0.000015   0.000713   0.002666   0.001240
```

En la primera columna aparece el valor de h, en la segunda columna damos el error cometido por la fórmula de la derivada central de tres puntos, en la tercera se da el error de la derivada lateral derecha de dos puntos, y en la última columna se dan los errores de la derivada lateral izquierda de dos puntos.

▷ ***Ejercicio*** *4.5*

1. *¿Qué fórmula proporciona los mejores resultados?*
2. *¿Se te ocurre la razón por la que para valores no excesivamente pequeños de h (digamos $h \lesssim 0'002$) la derivada lateral izquierda de dos puntos conduzca a resultados levemente mejores que los de la derivada lateral derecha de dos puntos?*
3. *¿Por qué para h muy pequeños los resultados empeoran en vez de mejorar a medida que h disminuye?*

◀

[10]El código fuente de este programa (y de otros programas en QBASIC que se dan en este capítulo) pueden encontrarse en [www].

Derivadas de orden superior

Pueden obtenerse combinando las expresiones del desarrollo de Taylor de $f_{\pm}1$, $f_{\pm}2$, etc. Por ejemplo, sumando las expresiones de f_{+1} y f_{-1} dadas por

$$f_{\pm 1} \equiv f(x_0 \pm h) = f_0 \pm h\, f' + \frac{h^2}{2}\, f'' \pm \frac{h^3}{3!}\, f''' + \frac{h^4}{4!}\, f^{(4)}(\xi_\pm)$$

se obtiene

$$f_{+1} + f_{-1} = 2f_0 + h^2 f'' + \frac{h^4}{4!}\, \left[f^{(4)}(\xi_+) + \, f^{(4)}(\xi_-) \right].$$

De aquí se deduce que

$$f'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} - \frac{h^2}{4!}\, \left[f^{(4)}(\xi_+) + \, f^{(4)}(\xi_-) \right],$$

es decir

$$\boxed{f'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)}. \tag{4.18}$$

Despreciando términos de orden h^2 obtenemos la expresión en diferencias conocida como *derivada segunda en diferencias central de tres puntos*:

$$f'' \simeq \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}. \tag{4.19}$$

Esta expresión proporciona la derivada $f''(x)$ en $x = 0$ de forma exacta si $f(x)$ es polinomio de grado tres en intervalo $[-h, h]$, pues entonces $f^{(4)}(\xi_\pm) = 0$ para $\xi \in (x_0 - h, x_0 + h)$.

▷ ***Ejercicio** 4.6*

Halla la expresión de la derivada tercera central de cinco puntos.

4.3.2. Integración numérica

Estamos interesados en estimar la integral definida

$$I = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{4.20}$$

Para ello dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en un número N par de subintervalos de ancho h,

$$h = \frac{b - a}{N}. \tag{4.21}$$

Nos centraremos en obtener una fórmula para la integral entre $-h$ y h ya que siempre podemos dividir ("discretizar") el intervalo de integración $[a, b]$ en un conjunto de subintervalos *elementales* de ancho[11] $2h$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{a+2h} f(x)\, dx + \int_{a+2h}^{a+4h} f(x) dx + \cdots + \int_{b-2h}^{b} f(x)\, dx. \tag{4.22}$$

La idea básica de las fórmulas que deduciremos a continuación consiste en aproximar $f(x)$ en cada intervalo elemental $[(n-1)h, (n+1)h]$ por una función que pueda ser integrada de modo exacto.

[11] Las fórmulas de integración se llaman de tipo Newton-Cotes cuando el discretizado es equiespaciado

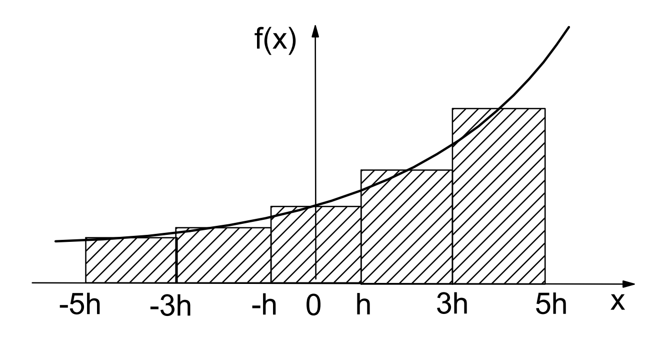


Figura 4.5: Interpretación geométrica de la regla del rectángulo. La integral de $f(x)$ en cada intervalo elemental de ancho $2h$ se aproxima por el área rayada del rectángulo correspondiente.

Regla del rectángulo

En este procedimiento de integración numérica se aproxima el valor de $f(x)$ en el interior de cada subintervalo de ancho $2h$ por el valor de la función $f(x)$ en el punto medio del subintervalo:

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} f(x)\,dx &= \int_{-h}^{h} [f_0 + f'x + \frac{f''}{2}x^2 + \cdots]\,dx \\ &= 2h\,f_0 + f'\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-h}^{h} + \frac{f''}{2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-h}^{h} + \cdots \\ &= 2h\,f_0 + 0 + \frac{f''}{3}h^3 + \cdots \\ &= 2h\,f_0 + O(h^3). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Esta es la fórmula del rectángulo para un intervalo elemental. Usando el resultado (4.23) en (4.22) y despreciando términos de orden igual o superior a h^3, se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2h\,[f(a+h) + f(a+3h) + \cdots + f(b-3h) + f(b-h)] + NO(h^3) \tag{4.24}$$

Pero $N = (b-a)/h$ [véase la ecuación (4.21)] por lo que $N\,O(h^3) = O(h^2)$ y la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= 2h\,[f(a+h) + f(a+3h) + \cdots + f(b-3h) + f(b-h)] + O(h^2) \\ &\simeq 2h\,[f(a+h) + f(a+3h) + \cdots + f(b-3h) + f(b-h)]. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Esta fórmula es conocida como regla del rectángulo. La interpretación geométrica de esta regla puede verse en la figura 4.5: aproximamos el área bajo la curva $f(x)$ por el área de los rectángulos de ancho $2h$ y altura $f(a+(2n+1)h)$ con $n = 0, 1, 2, \cdots$. Dado que en (4.25) *no* se evalúa la función $f(x)$ en los extremos ($x = a$ y $x = b$) del intervalo de integración, se dice que la regla del rectángulo es abierta.[12]

Regla del trapecio

Podemos mejorar la fórmula anterior si aproximamos $f(x)$ por una línea recta (interpolación lineal) en el intervalo $x \in [-h, 0]$, y por otra línea recta en el intervalo $x \in [0, h]$. Veámoslo con detalle.

[12] Es por tanto una fórmula de tipo Newton-Cotes *abierta*.

Expresamos la integral $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ como suma de dos integrales:

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = I_- + I_+$$

donde

$$I_- = \int_{-h}^{0} f(x)\,dx\,,$$
$$I_+ = \int_{0}^{h} f(x)\,dx\,.$$

Evaluaremos I_+ e I_- por separado. Empezamos escribiendo el desarrollo de Taylor de la función $f(x)$ en torno a $x = 0$:

$$f(x) = f_0 + f'x + \frac{f''}{2}x^2 + \cdots$$

Podemos expresar la derivada de $f(x)$ en $x = 0$, f', en términos de la derivada derecha de dos puntos, $(f_1 - f_0)/h$, es decir, $f' = (f_1 - f_0)/h + O(h)$, para así obtener

$$f(x) = f_0 + \left[\frac{f_1 - f_0}{h} + O(h)\right] x + \frac{f''}{2}x^2 + \cdots \tag{4.26}$$

Utilizando la relación (4.26) en la definición de I_+ se encuentra que

$$I_+ = \int_0^h \left[f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}x + O(h)\,x + \frac{f''}{2}x^2 + \cdots\right] dx \tag{4.27}$$
$$= f_0 h + \frac{f_1 - f_0}{h}\frac{h^2}{2} + O(h)\frac{h^2}{2} + \frac{f''}{2}\frac{h^3}{3} + \cdots \tag{4.28}$$
$$= \frac{h}{2}[f_0 + f_1] + O(h^3). \tag{4.29}$$

Nótese que si despreciamos los términos de orden h^3, I_+ es simplemente la integral de la función

$$\widetilde{f}(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{h}x,$$

función que no es más que la aproximación *lineal* de $f(x)$ que pasa por f_0 y f_1 (véase la figura 4.6).

Para calcular I_- procedemos de igual modo salvo en que ahora aproximamos f' por la derivada izquierda de dos puntos, $f' = (f_0 - f_{-1})/h + O(h)$, de modo que

$$f(x) = f_0 + \left[\frac{f_0 - f_{-1}}{h} + O(h)\right] x + \frac{f''}{2}x^2 + \cdots \tag{4.30}$$

y entonces

$$I_- = \int_{-h}^0 \left[f_0 + \frac{f_0 - f_{-1}}{h}x + O(h)\,x + \frac{f''}{2}x^2 + \cdots\right] dx$$
$$= f_0 h + \frac{f_{-1} - f_0}{h}\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$
$$= \frac{h}{2}[f_{-1} + f_0] + O(h^3).$$

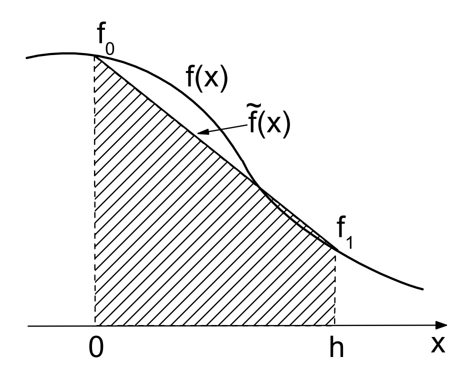


Figura 4.6: Interpretación geométrica de la regla del trapecio. La integral $I_+ = \int_0^h f(x)\,dx$ se aproxima por el área rayada del trapecio.

En definitiva, dado que $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = I_- + I_+$, encontramos que

$$\boxed{\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{h}{2}(f_{-1} + 2f_0 + f_1) + O(h^3)}\,.$$

Esta es la fórmula del trapecio para un intervalo elemental. Usando este resultado en la ecuación (4.22) se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-2h) + \frac{f(b)}{2}\right] + N\,O(h^3). \quad (4.31)$$

Teniendo en cuenta que $N\,O(h^3) = [(b-a)/h]O(h^3) = O(h^2)$ [véase la ecuación (4.21)] la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + \frac{f(b)}{2}\right] + O(h^2)\\ &\simeq h\left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-2h) + \frac{f(b)}{2}\right], \end{aligned} \quad (4.32)$$

que es la *regla del trapecio*. Esta fórmula es cerrada ya que requiere evaluar $f(x)$ en los extremos $x = a$ y $x = b$ del intervalo de integración.

Regla de Simpson

Ahora vamos a mejorar nuestras fórmulas de integración aproximando $f(x)$ por un polinomio de grado dos. La fórmula de Taylor con resto de Lagrange nos dice que

$$f(x) = f_0 + f'x + \frac{f''}{2}x^2 + \frac{f'''}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + \cdots$$

Expresando f'' en términos de la derivada central de tres puntos

$$f'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + O(h^2)$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} f(x)\,dx &= \int_{-h}^{h}\left[f_0 + f'x + \frac{1}{2}\frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}x^2 + O(h^2)x^2 + \frac{f'''}{3!}x^3\right.\\ &\qquad\left. + \frac{f^{(4)}}{4!}x^4 + \cdots\right] dx\\ &= 2h\,f_0 + f'\ \frac{x^2}{2}\bigg|_{-h}^{h} + \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{2h^2}\ \frac{x^3}{3}\bigg|_{-h}^{h} + O(h^2)\frac{2h^3}{3}\\ &\quad + \frac{f'''}{3!}\ \frac{x^4}{4}\bigg|_{-h}^{h} + \frac{f^{(4)}}{4!}\ \frac{x^5}{5}\bigg|_{-h}^{h} + \cdots\\ &= 2h\,f_0 + (f_1 - 2f_0 + f_{-1})\frac{h}{3} + O(h^5).\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f_{-1} + 4f_0 + f_1] + O(h^5)}\,.$$

Esta es la fórmula de Simpson para un intervalo elemental. Usando este resultado en la ecuación (4.22) encontramos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{n=2}^{N/2} f[a+(2n-2)h] + 4\sum_{n=1}^{N/2} f[a+(2n-1)h] + f(b)\right] + NO(h^5). \quad (4.33)$$

Pero $N = (b-a)/h$ [véase la ecuación (4.21)] por lo que $N\,O(h^5) = O(h^4)$ y la expresión anterior se transforma en

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{n=2}^{N/2} f[a+(2n-2)h] + 4\sum_{n=1}^{N/2} f[a+(2n-1)h] + f(b)\right] + O(h^4) \quad (4.34)\\ &\simeq \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{n=2}^{N/2} f[a+(2n-2)h] + 4\sum_{n=1}^{N/2} f[a+(2n-1)h] + f(b)\right], \quad (4.35)\end{aligned}$$

que es la *regla de Simpson.*

Para hallar la aproximación

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}[f_{-1} + 4f_0 + f_1]$$

no hemos necesitado en absoluto conocer $f''', f^{(4)}, \cdots$, por lo que de forma efectiva hemos aproximado $f(x)$ por un polinomio de grado dos: $f(x) = f_0 + f'x + f''x^2$. Esto nos podría hacer pensar que la regla de Simpson sólo sería exacta si $f(x)$ fuera un polinomio de grado dos. Pero esta conclusión no es cierta: la fórmula de Simpson es exacta cuando $f(x)$ es un polinomio de grado tres. Veámoslo explícitamente. Si $f(x)$ es un polinomio de grado tres, resulta que

$$f(x) = f_0 + f'x + \frac{f''}{2}x^2 + \frac{f'''}{3!}x^3$$

es exacta. Como la integral entre $-h$ y h de una potencia impar de x es nula, se tiene que la expresión

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx = \int_{-h}^{h} f_0\,dx + \frac{f''}{2}\int_{-h}^{h} x^2 dx$$

es también exacta. Pero ya hemos visto (véase la página 214) que si $f(x)$ es un polinomio cúbico que pasa por los puntos $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, y (h, f_1), entonces se tiene que

$$f'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

es una relación exacta. Encontramos por tanto que, tal y como queríamos demostrar,

$$\int_{-h}^{h} f(x)\, dx = 2h\, f_0 + \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}\, \frac{x^3}{3}\bigg|_{-h}^{h}$$
$$= \frac{h}{3}[f_{-1} + 4f_0 + f_1],$$

es exacta si $f(x)$ es un polinomio de grado tres que pasa por los puntos $(-h, f_{-1})$, $(0, f_0)$, y (h, f_1).

► *Ejemplo 4.7*

En este ejemplo empleamos un par de programas escritos en QBASIC que implementan las reglas del trapecio y de Simpson, y con los que se calcula numéricamente la integral

$$I = \int_0^4 \mathrm{e}^x\, dx.$$

El valor de esta integral es $I = \mathrm{e}^4 - 1 = 53'598150033\cdots$. Este resultado lo usaremos para comparar la precisión de los dos métodos numéricos a medida que aumentamos en número de intervalos elementales, es decir, a medida que hacemos el discretizado más fino. En estos programas se emplean sucesivamente $N = 2^m$ subintervalos elementales (es decir, $h = 4/2^m$) con $m = 2, 3, \cdots, 20$. A continuación de los programas en QBASIC damos los resultados que proporcionan tal como aparecen en la pantalla del ordenador.

```
' Programa TRAPECIO.BAS
DEF fnf (x) = EXP(x)
a = 0: b = 4
exacto = EXP(b) - EXP(a)
FOR m = 2 TO 20
    n = 2 ^ m : h = (b - a) / n
    suma = fnf(a) / 2
    FOR i = 1 TO n - 1
        x = a + i * h
        suma = suma + fnf(x)
    NEXT i
    suma = suma + fnf(b) / 2
    integral = h * suma
    diferencia = exacto - integral
    PRINT USING "N=#######   Error=##.######"; n; diferencia
NEXT m
```

Los resultados son:

```
N=      4   Error=-4.393803
N=      8   Error=-1.112003
N=     16   Error=-0.278870
N=     32   Error=-0.069778
N=     64   Error=-0.017448
N=    128   Error=-0.004364
N=    256   Error=-0.001095
N=    512   Error=-0.000256
```

```
N=   1024   Error=-0.000069
N=   2048   Error=-0.000027
N=   4096   Error=-0.000034
N=   8192   Error= 0.000065
N=  16384   Error=-0.000031
N=  32768   Error= 0.000004
N=  65536   Error=-0.000008
N= 131072   Error= 0.000011
N= 262144   Error= 0.000164
N= 524288   Error= 0.000336
N=1048576   Error= 0.002502
```

El programa que implementa la regla de Simpson es:

```
' Programa SIMPSON.BAS
DEF fnf (x) = EXP(x)
a = 0: b = 4
exacto = EXP(b) - EXP(a)
FOR m = 2 TO 20
    N = 2 ^ m : h = (b - a) / N
    suma = fnf(a) :  factor = 2
    FOR i = 1 TO N - 1
        IF factor = 2 THEN factor = 4 ELSE factor = 2
        x = a + i * h
        suma = suma + fnf(x) * factor
    NEXT i
    suma = suma + fnf(b)
    integral = h * suma / 3
    diferencia = exacto - integral
    PRINT USING "N=########   Error=##.######"; N; diferencia
NEXT m
```

Los resultados son:

```
N=       4   Error=-0.265697
N=       8   Error=-0.018074
N=      16   Error=-0.001156
N=      32   Error=-0.000076
N=      64   Error=-0.000011
N=     128   Error= 0.000004
N=     256   Error=-0.000011
N=     512   Error= 0.000023
N=    1024   Error=-0.000015
N=    2048   Error= 0.000019
N=    4096   Error=-0.000038
N=    8192   Error= 0.000000
N=   16384   Error= 0.000034
N=   32768   Error= 0.000046
N=   65536   Error=-0.000008
N=  131072   Error=-0.000011
N=  262144   Error=-0.000038
N=  524288   Error=-0.000057
N= 1048576   Error= 0.000893
```

▷ ***Ejercicio** 4.7*

1. *¿Qué método proporciona los mejores resultados?*

2. *Habrás observado que aumentar N no siempre implica la mejora de los resultados. ¿A qué crees que es debido?*

◀

Cuadratura de Gauss

Se ha mostrado en las secciones anteriores que en los métodos de integración numérica la integral

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} r(x)f(x)dx \tag{4.36}$$

se aproxima por la suma finita

$$\int_{\alpha}^{\beta} r(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) \tag{4.37}$$

donde n y los valores w_k son característicos de cada método. Por ejemplo, si $r(x) = 1$, $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, y usamos la discretización $h = 1$, la regla del trapecio es

$$\int_{-1}^{1} r(x)f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(-1) + f(0) + \frac{1}{2}f(1) \tag{4.38}$$

mientras que la regla de Simpson es

$$\int_{-1}^{1} r(x)f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1). \tag{4.39}$$

Hemos visto que la regla del trapecio se puede entender como la fórmula que resulta tras aproximar la función $f(x)$ por la línea recta (polinomio de grado uno) que va de $(x, y) = (-1, f(-1))$ a $(x, y) = (0, f(0))$ y por la línea recta que va de $(x, y) = (0, f(0))$ a $(x, y) = (1, f(1))$. También vimos que la regla de Simpson se puede entender como la relación que resulta al aproximar $f(x)$ por un polinomio de grado *dos* que pasa por $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ y $(1, f(1))$. Como es previsible, la regla de Simpson es mejor que la regla del trapecio. Parece natural llevar esta idea más allá y obtener fórmulas de integración aproximadas mejores sin más que aproximar la función $f(x)$ por polinomios de orden mayor que dos.

Polinomios de interpolación. El polinomio de interpolación de Lagrange en n puntos, x_k con $k = 1, 2, \cdots, n$, de una de una función cualquiera $f(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$ que pasa por los n puntos $(x_k, f(x_k))$ con $k = 1, 2, \cdots, n$ y que viene dado por la expresión

$$Q_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} c(x, x_k)f(x_k) \tag{4.40}$$

donde

$$c(x, x_k) = \frac{\gamma(x)}{(x - x_k)\gamma'(x_k)}, \tag{4.41}$$

$\gamma(x)$ el polinomio de grado n dado por

$$\gamma(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n), \tag{4.42}$$

y

$$\gamma'(x_k) = \left.\frac{d\gamma}{dx}\right|_{x=x_k} = (x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n). \tag{4.43}$$

Cuadratura de interpolación. Es fácil entender que a medida que el polinomio $Q_{n-1}(x)$ aumenta de grado (pasa por más puntos) la aproximación de $Q_{n-1}(x)$ a la función $f(x)$ mejora notablemente: $f(x) \approx Q_{n-1}(x)$. [Por supuesto, cuando $f(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, la fórmula de interpolación de n puntos conduce a un polinomio de interpolación $Q_{n-1}(x)$ igual a $f(x)$.] Por tanto

$$\int_\alpha^\beta r(x)f(x)dx \approx \int_\alpha^\beta r(x)Q_{n-1}(x)dx \tag{4.44}$$

$$\approx \int_\alpha^\beta r(x)\sum_{k=1}^n c(x,x_k)f(x_k)dx \tag{4.45}$$

$$\approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \tag{4.46}$$

donde

$$w_k = \int_\alpha^\beta r(x)c(x,x_k)dx. \tag{4.47}$$

La fórmula de integración (4.46) se conoce como cuadratura de interpolación (o interpolatoria). Puede verse que la regla de Simpson se reobtiene si se usan tres puntos equiespaciados (lo que implica polinomio de interpolación de grado dos) situados en los extremos y en el punto medio del intervalo de integración. Cuando los puntos de interpolación x_k están equiespaciados, las diversas cuadraturas dadas por (4.46) se llaman fórmulas de Newton-Cotes.

Fórmula de integración de Gauss-Legendre. Si $\alpha = -1$ y $\beta = -1$ y se escogen como puntos de interpolación x_k a los ceros del polinomio de Legendre de grado n, $P_n(x_k) = 0$, la fórmula resultante se conoce como cuadratura de Gauss-Legendre. Esta fórmula resulta ser claramente mejor, para un número dado n de puntos de interpolación, que las cuadraturas de Newton-Cotes con un número de puntos de interpolación mucho mayor que n. ¿A qué se debe esto? La respuesta es que, mientras la cuadratura de Newton-Cotes de n puntos es (en principio) exacta si $f(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, *la cuadratura de Gauss-Legendre de n puntos es exacta si $f(x)$ es un polinomio de grado $2n-1$*. La explicación de este *milagro* reside en las propiedades de ortogonalidad de los polinomios de Legendre con respecto a la función peso $r(x) = 1$ en el intervalo $[-1,1]$. En efecto, sea $f(x)$ un polinomio de grado $2n-1$. Entonces el cociente de $f(x)$ por el polinomio $\gamma(x)$ de grado n es igual a un polinomio $Q_{n-1}(x)$ de grado $n-1$ con un resto $R_{n-1}(x)$ que es un polinomio de grado $n-1$:

$$\frac{f(x)}{\gamma(x)} = Q_{n-1}(x) + \frac{R_{n-1}(x)}{\gamma(x)}, \tag{4.48}$$

es decir,

$$f(x) = \gamma(x)Q_{n-1}(x) + R_{n-1}(x), \tag{4.49}$$

donde $Q_{n-1}(x)$ y $R_{n-1}(x)$ son polinomios de grado $n-1$ dado que $\gamma(x)$ es de grado n. Integrando la expresión anterior se tiene

$$\int_{-1}^1 r(x)f(x)dx = \int_{-1}^1 r(x)\gamma(x)Q_{n-1}(x)dx + \int_{-1}^1 r(x)R_{n-1}(x)\,dx. \tag{4.50}$$

Pero si $\gamma(x)$ es un polinomio de grado n que pasa por los n ceros del polinomio ortogonal $P_n(x)$, es claro que $\gamma(x) = \text{const} \times P_n(x)$. Esto significa que $\gamma(x)$ es ortogonal en el intervalo $[a, b]$ con respecto a la función peso $r(x)$ a todo polinomio de grado inferior a n por lo que la primera integral del miembro derecho de (4.50) es nula. Esto implica

$$\int_{-1}^{1} r(x)f(x)dx = \int_{-1}^{1} r(x)R_{n-1}(x)\,dx. \tag{4.51}$$

Dado que $R_{n-1}(x)$ es de grado $n-1$, la fórmula interpolatoria (4.46) de n puntos es exacta, por lo que

$$\int_{-1}^{1} r(x)R_{n-1}dx = \sum_{k=1}^{n} w_k R_{n-1}(x_k), \tag{4.52}$$

es decir, por (4.51),

$$\int_{-1}^{1} r(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k R_{n-1}(x_k). \tag{4.53}$$

Pero dado que $\gamma(x_k) = 0$, se deduce de (4.49) que $f(x_k) = R_{n-1}(x_k)$, por lo que la ecuación anterior se convierte en

$$\int_{-1}^{1} r(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k). \tag{4.54}$$

Esto es justamente lo que queríamos demostrar: cuando $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a $2n-1$, la fórmula de interpolación de n puntos $\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$ proporciona la integral $\int_{-1}^{1} r(x)f(x)dx$ de forma exacta si los puntos de interpolación x_k son justamente los ceros del polinomio ortogonal de grado n con respecto a la función peso $r(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$.[13]

▷ ***Ejercicio** 4.8*

El método de Gauss-Legendre puede emplearse para calcular integrales $\int_{\alpha}^{\beta} r(x)f(x)dx$, donde $\alpha \neq -1$ y $\beta \neq 1$, sin más que emplear un cambio de variable que transforme la anterior integral en otra cuyo intervalo de integración sea $[-1, 1]$. ¿Cuál es este cambio de variable?

4.4. Cálculo de raíces

Una de las tareas más básicas del cálculo numérico es el cálculo de las raíces (o ceros) de una función. En lo que sigue denotaremos por $\widetilde{x}$ a las raíces de la ecuación $f(x) = 0$. En las secciones siguientes describiremos cuatro métodos numéricos útiles para la evaluación de raíces.

4.4.1. Método de la búsqueda

Este es un método muy simple que explota el hecho de que la función $f(x)$ debe tener signos distintos a la derecha e izquierda de la raíz. El procedimiento es el siguiente:

1. Sea x_0 un número menor que la raíz buscada y supongamos, por concretar, que $f(x_0) > 0$. Empezamos eligiendo un valor inicial pequeño arbitrario h_0 para el salto de la búsqueda.

[13]En `www` hay una práctica en *Mathematica* que trata sobre el método de Gauss y que tiene por objetivo para facilitar la comprensión de los contenidos de esta sección.

2. Evaluamos la función $f(x)$ en $x_1 = x_0 + h_0$ y comprobamos si $f(x_1)$ es mayor o menor que cero.[14] Entonces:

   a) Si $f(x_1)$ es mayor que cero, es decir, si $f(x)$ no ha cambiado de signo entre x_0 y x_1, asumimos[15] que la raíz está a la derecha de x_1 por lo que comenzamos de nuevo la búsqueda repitiendo el proceso desde el paso 2 pero con x_1 haciendo el papel de x_0.

   b) Si $f(x_1)$ es menor que cero, es decir, si $f(x)$ ha cambiado de signo entre x_0 y x_1, concluimos que la raíz buscada está situada entre x_0 y x_1. En este caso comenzamos de nuevo en el paso 1, es decir partimos nuevamente de x_0 pero usando ahora un nuevo paso de búsqueda de un tamaño igual a la mitad del anterior: $h_0/2 \to h_1$.

3. El proceso se detiene cuando h_n alcanza un valor menor que uno prefijado (tolerancia) o cuando el número de pasos sobrepasa un valor $N_{\max}$ previamente establecido. El resultado final del proceso es por tanto una estimación del valor de la raíz $\widetilde{x}$ con una precisión (tolerancia) de h_n [suponiendo que $f(x)$ ha cambiado al menos una vez de signo en el transcurso del proceso].

Este método podría fallar:

- Si se sobrepasa la raíz buscada sin cambiar el signo de $f(x)$.
- Si la función es discontinua y tiene signos distintos a cada lado de la discontinuidad. En este caso, el método nos proporcionaría como raíz el punto en el cual la función es discontinua.

4.4.2. Método de la bisección

Este es un método similar al de la búsqueda que se basa también en el hecho de que a la derecha e izquierda de la raíz la función $f(x)$ debe tener signos distintos. El procedimiento es como sigue:

1. Suponemos que la raíz buscada $\widetilde{x}$ está entre a_0 y b_0. Esto significa que $f(a_0)\,f(b_0) < 0$.

2. Calculamos el valor de $f(x)$ en el punto medio c_0 del intervalo $[a_0, b_0]$, es decir, calculamos $f(c_0)$ con $c_0 = (a_0 + b_0)/2$.

   a) Si $f(a_0)\,f(c_0) > 0$, es decir, si $f(a_0)$ y $f(c_0) > 0$ son de igual signo, *asumimos*[16] que la raíz está entre c_0 y b_0 [pues entonces $f(c_0)\,f(b_0) < 0$]. En este caso asignamos el papel de a_0, es decir, el papel de frontera izquierda, a c_0 y continuamos el proceso empezando de nuevo en el paso 1.

   b) Si $f(a_0)\,f(c_0) < 0$, es decir, si $f(b_0)$ y $f(c_0) > 0$ son de igual signo, *asumimos* que la raíz está entre c_0 y a_0 [pues entonces $f(c_0)\,f(a_0) < 0$]. En este caso asignamos el papel de b_0, es decir, el papel de frontera derecha, a c_0 y continuamos el proceso empezando de nuevo en el paso 1.

3. El proceso se detiene cuando la distancia entre la frontera derecha e izquierda es menor que un valor $\delta > 0$ prefijado (la tolerancia) o bien cuando el número de iteraciones n (es decir, el número de veces que volvemos a empezar con nuevas fronteras) excede uno prefijado: $n \geq N_{\max}$.

[14] Si $f(x_1)$ fuera igual a cero habríamos encontrado la raíz buscada: $\widetilde{x} = x_1$.

[15] Debe quedar claro que esto es sólo una suposición; uno de los defectos de este método es que podría no encontrar la raíz si esta suposición no se cumple. Esta dificultad se discute al final de esta subsección.

[16] Esto es sólo una suposición. En ciertas situaciones podría ocurrir que la raíz realmente estuviera entre a_0 y c_0. Estas situaciones problemáticas son de naturaleza similar a las discutidas en sección 4.4.1.

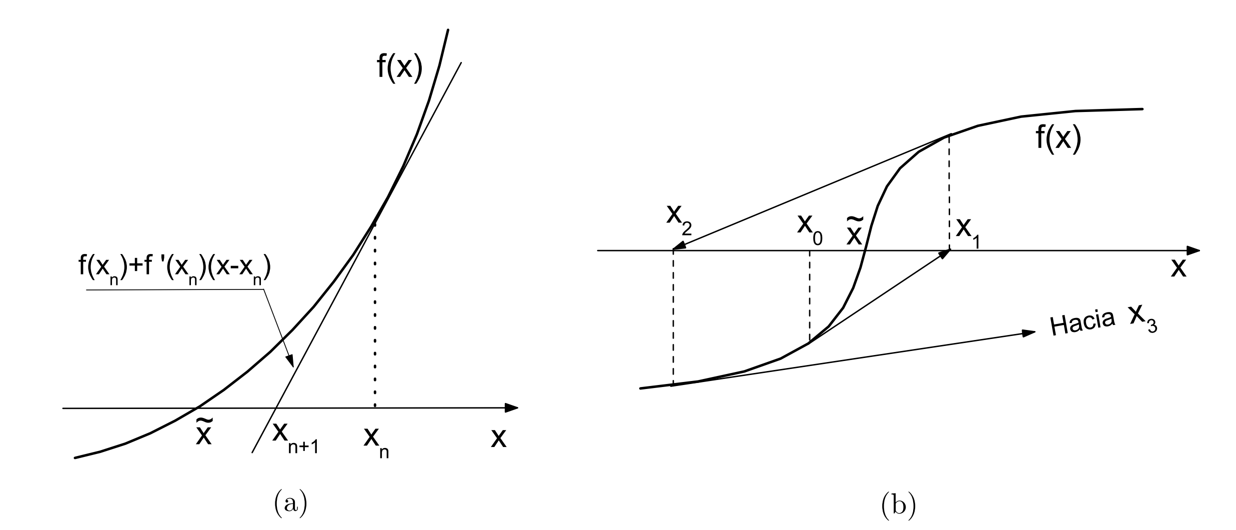


Figura 4.7: (a) Esquema gráfico del método de Newton. (b) Un ejemplo en el que el método de Newton no es capaz de encontrar el cero de la función $f(x)$

Es fácil darse cuenta que este método fallará si la función es discontinua y tiene signos distintos a cada lado de la discontinuidad. En este caso, igual que sucedía con el método de la busqueda, el método de la bisección nos proporcionaría como raíz el punto en el cual la función es discontinua.

4.4.3. Método de Newton

Para utilizar este método (también llamado método de Newton-Raphson) es necesario conocer el valor de la función $df/dx \equiv f'(x)$. La interpretación gráfica de este método se muestra en la figura 4.7(a). Vemos fácilmente que la derivada de $f(x)$ en el punto x_n viene dada por la expresión

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

de donde se deduce que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{4.55}$$

Al utilizar el método de Newton se asume que $x_n \to \widetilde{x}$ cuando $n \to \infty$, hecho que no está siempre garantizado como se ilustra en la figura 4.7(b). Las iteraciones $x_n \to x_{n+1}$ se detienen:

- Bien cuando la diferencia (tolerancia) $|x_{n+1} - x_n|$ sea menor que un valor prefijado,
- Bien cuando el número de iteraciones alcance un tope $N_{\max}$ preestablecido.

En general, el método de Newton converge muy rápidamente a la raíz buscada. De hecho, es fácil demostrar que bajo condiciones muy generales (véase [KC94, sección 3.2]), si la cantidad (error en el paso n) $e_n = |\widetilde{x} - x_n|$ es pequeña, entonces $e_{n+1} = O(e_n^2)$ (véase el problema 4.4). Esto significa que el error disminuye cuadráticamente, es decir, que el método converge muy rápidamente.

▶ Ejemplo 4.8

En este ejemplo vamos a ver cómo se calcula la raíz cuadrada $\sqrt{R}$ de un número cualquiera R mediante el método de Newton.
Llamemos $\widetilde{x}$ a la raíz cuadrada de R. Entonces $\widetilde{x} = \sqrt{R} \Rightarrow \widetilde{x}^2 = R \Rightarrow \widetilde{x}^2 - R = 0$, es decir, la raíz cuadrada de R es el cero de la función $f(x) = x^2 - R$. Aplicando el método de Newton a esta ecuación se tiene que [véase la ecuación (4.55)]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - R}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{R}{x_n}\right). \tag{4.56}$$

Al parecer, esta fórmula ya era conocida por los matemáticos sumerios hace 4000 años. También se atribuye al ingeniero griego Herón. Veamos qué tal funciona usándola para calcular $\sqrt{2}$. En este caso $R = 2$ y la ecuación anterior se reduce a

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

El valor de $\sqrt{2}$ es (daremos "sólo" los primeros 60 dígitos decimales de cada número):

$$\sqrt{2} = 1'41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667\cdots$$

El método de Newton conduce a

$$\begin{aligned}
x_0 &= 2 \\
x_1 &= \underline{1}'500000000000000000000000000000000000000000000000000000000000\cdots \\
x_2 &= \underline{1'41}666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666\cdots \\
x_3 &= \underline{1'414215}68627450980392156862745098039215686274509803921568627\cdots \\
x_4 &= \underline{1'41421356237}468991062629557889013491011655962211574404458490\cdots \\
x_5 &= \underline{1'41421356237309504880168}962350253024361498192577619742849828\cdots \\
x_6 &= \underline{1'414213562373095048801688724209698078569671875377}23400156101\cdots
\end{aligned}$$

Los dígitos que coinciden con los exactos han sido subrayados. Nótese que este número tiende a duplicarse en cada iteración o, lo que es equivalente, el error disminuye cuadráticamente en cada iteración. ▷

***Ejercicio** 4.9*

Justifica la equivalencia de las dos afirmaciones anteriores.

◀

4.4.4. Método de la secante

El método de Newton tiene el defecto de que requiere conocer la derivada de la función $f(x)$ cuyo cero queremos hallar y esto no es siempre factible. El método de la secante es muy similar al de Newton pero no requiere el conocimiento de esta derivada. La idea clave en el método de la secante consiste en sustituir la derivada $f'(x_n)$ que aparece en la fórmula del método de Newton [véase la ecuación (4.55)] por una expresión aproximada:

$$f'(x_n) \to \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Esta aproximación viene motivada por la definición de la pendiente de la tangente $f'(x_n)$ como el límite de la pendiente de la secante:

$$f'(x_n) = \lim_{z \to x_n} \frac{f(x_n) - f(z)}{x_n - z}.$$

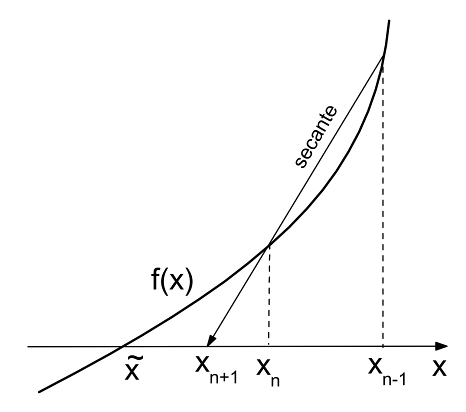


Figura 4.8: Representación gráfica del método de la secante.

En definitiva, la fórmula del método de la secante, equivalente a la fórmula (4.55) del método de Newton, es

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right]. \tag{4.57}$$

Puede verse la interpretación gráfica de este procedimiento en la figura 4.8. Para calcular la estimación x_{n+1} es preciso conocer las dos estimaciones anteriores x_n y x_{n-1}, por lo que al comenzar el cálculo de la raíz $\widetilde{x}$ debemos proporcionar *dos* valores (estimaciones) iniciales: x_0 y x_1.

4.5. Ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales

En el próximo capítulo 5, dedicado a las ecuaciones diferenciales no lineales, veremos la tremenda utilidad de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por ejemplo, cuando estudiemos las ecuaciones de Lorenz se verá que carecen de soluciones analíticas (ni exactas ni aproximadas) y que su resolución numérica es casi la única herramienta disponible para analizar el comportamiento de sus soluciones. Esta situación es de lo más corriente cuando tratamos con ecuaciones no lineales. Las figuras 4.9 y 4.10 pretenden ilustrar esta situación. En ellas se representan las soluciones numéricas de dos osciladores amortiguados. En la figura 4.9 se representa la solución del oscilador lineal

$$y''(x) + \frac{1}{10}\,y'(x) + y(x) = 10\cos(x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

cuyo comportamiento es sencillo. Por tanto no es irrazonable esperar que sea posible hallar una solución analítica (al menos aproximada) para este problema. Sin embargo, para el oscilador no lineal

$$y''(x) + \frac{1}{10}\,y'(x) + y^3(x) = 10\cos(x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

encontramos una solución completamente distinta con un comportamiento muy irregular. Es claro que en este caso debemos perder toda esperanza de poder expresar la solución de este oscilador de forma analítica. En este caso, como en tantos otros, los métodos numéricos se convierten en una herramienta imprescindible.

En lo que sigue, estudiaremos los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales centrándonos en la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de *primer orden* con *condiciones iniciales*:

$$y'(x) = f(x, y) \qquad \text{con} \qquad y(x_0) = y_0.$$

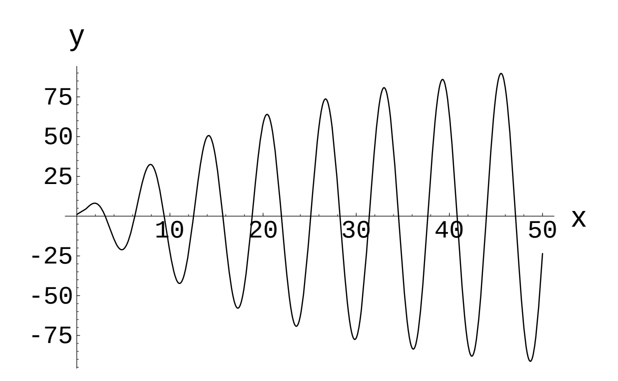


Figura 4.9: Solución del oscilador lineal $y''(x) + 0'1y'(x) + y(x) = 10\cos(x)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

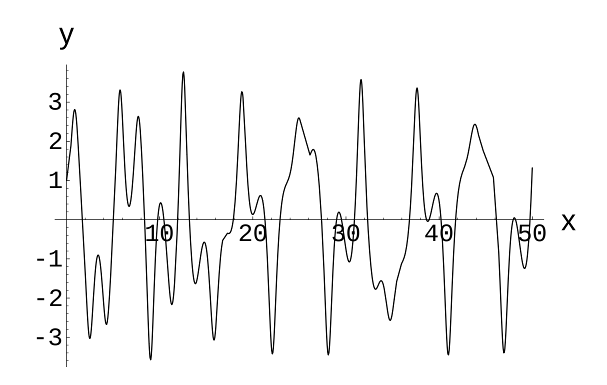


Figura 4.10: Solución del oscilador *no lineal* $y''(x) + 0'1y'(x) + y^3(x) = 10\cos(x)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Lo haremos así debido a que:

- Las ecuaciones diferenciales de primer orden son muy simples de modo que los métodos que estudiemos serán más fáciles de entender al no quedar oscurecidos por las complejidades propias de las ecuaciones diferenciales de orden superior.
- Los métodos son idénticos para ecuaciones (o sistemas) de orden superior cambiando sólo la complejidad formal y la longitud de las manipulaciones (generalmente de naturaleza meramente algebraica).

Algunas definiciones

Llamaremos $\phi(x)$ a la solución *exacta* de la ecuación diferencial

$$y'(x) = f(x, y)$$

cuya condición inicial es

$$y(x_0) = y_0.$$

Es decir, $\phi(x)$ satisface la relación

$$\phi'(x) = f\big(x, \phi(x)\big) \qquad \text{con} \qquad \phi(x_0) = y_0. \tag{4.58}$$

El resultado de una resolución (o integración) numérica de una ecuación diferencial ordinaria es la *estimación aproximada* del valor de la solución $\phi(x)$ en un conjunto finito de puntos x_n con $i = 0, 1, \ldots$. Denotaremos por y_n justamente a esta *estimación* numérica de $\phi(x)$ en el punto n-ésimo, es decir, a la estimación de $\phi(x_n)$: $y_n \simeq \phi(x_n)$. En muchas ocasiones los puntos x_n se escogen de forma equiespaciada: $h = x_{n+1} - x_n$. En este caso $x_n = x_0 + nh$. El número h es el *tamaño del paso*.

4.5.1. Método de Euler

Es el método más sencillo, y por ello el más útil, para presentar las ideas fundamentales de la integración numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo no es, ni mucho menos, el mejor de los métodos numéricos. Su interés es principalmente académico.

Empezamos integrando la relación (4.58) entre x_0 y x_1:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} \phi'(x)\,dx = \phi(x_1) - \phi(x_0),$$

es decir,

$$\begin{aligned}\phi(x_1) &= \phi(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx.\end{aligned}$$

Podríamos hallar el valor exacto de $\phi(x_1)$ evaluando la integral anterior, pero esto requiere conocer precisamente la solución (desconocida) $\phi(x)$. En el método de Euler esta integral se *estima* mediante la regla del rectángulo:

$$\int_{x_0}^{x_1} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx \simeq f(x_0,y_0)\,(x_1-x_0)$$

es decir, se aproxima el área que hay bajo la curva $f\big(x,\phi(x)\big)$ entre x_1 y x_0 por el área del rectángulo de ancho (x_1-x_0) y altura igual a la ordenada de la curva en su extremo *izquierdo*, $f(x_0,y_0)$. En definitva

$$\phi(x_1) \simeq \phi(x_0) + f\big(x_0,\phi(x_0)\big)\,h. \tag{4.59}$$

Esta aproximación se puede entender también como la estimación que se hace de $\phi(x_1 = x_0+h)$ mediante el desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto x_0 truncado a partir del orden h^2:

$$\begin{aligned}\phi(x_1 = x_0+h) &= \phi(x_0) + \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x_0} h + O(h^2) \\ &= \phi(x_0) + f\big(x_0,\phi(x_0)\big)\,h + O(h^2).\end{aligned} \tag{4.60}$$

La fórmula (4.59) se reobtiene tras despreciar los términos $O(h^2)$. La estimación numérica de $\phi(x_1)$ mediante el método de Euler es justamente

$$\begin{aligned}y_1 &= \phi(x_0) + f\big(x_0,\phi(x_0)\big)\,h \\ &= y_0 + f(x_0,y_0)\,h.\end{aligned}$$

El error que se comete es de orden h^2 pues $\phi(x_1) = y_1 + O(h^2)$.

Para estimar ahora el valor de $\phi(x)$ en el siguiente punto x_2, procedemos como antes e integramos $\phi'(x) = f\big(x,\phi(x)\big)$ entre x_1 y x_2:

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi'(x)\,dx = \phi(x_2) - \phi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx.$$

Aproximando nuevamente la integral mediante la regla del rectángulo se tiene que

$$\int_{x_1}^{x_2} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx \simeq f\big(x_1,\phi(x_1)\big)\,(x_2-x_1),$$

y por tanto

$$\phi(x_2) \simeq \phi(x_1) + f\big(x_1,\phi(x_1)\big)\,(x_2-x_1).$$

Ahora encontramos una dificultad nueva: no sabemos cuánto vale la solución exacta en el punto izquierdo pues $\phi(x_1)$ es desconocido. Antes $\phi(x_0)$ era conocido pues venía dado por las condiciones iniciales: $\phi(x_0) = y_0$. En el método de Euler esta dificultad se resuelve aproximando $\phi(x_1)$ por y_1:

$$\begin{aligned}\phi(x_2) &\simeq \phi(x_1) + f\big(x_1, \phi(x_1)\big)\,(x_2 - x_1)\\ &\simeq y_1 + f(x_1, y_1)\,(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

o bien

$$\phi(x_2) \simeq y_1 + f(x_1, y_1)\,h.$$

Al miembro derecho de esta ecuación lo llamaremos y_2:

$$y_2 \equiv y_1 + f(x_1, y_1)\,h. \tag{4.61}$$

Por tanto y_2 es la estimación del valor de $\phi(x_2)$ que proporciona el método de Euler. Debería ser ahora evidente que cualquier otra estimación y_{n+1} de la cantidad $\phi(x_{n+1})$ según el método de Euler viene dada por la expresión

$$\boxed{\phi(x_{n+1}) \simeq y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)\,h}\,. \tag{4.62}$$

Esta relación es conocida como ecuación o *fórmula de integración* de Euler. Su interpretación gráfica se da en la figura 4.11.

▶ *Ejemplo 4.9*

Ilustraremos el método de Euler utilizándolo para resolver una ecuación diferencial muy sencilla:

$$y'(x) = x + y \qquad \text{con} \qquad y(0) = 1.$$

La solución exacta es $\phi(x) = -1 - x + 2\,\mathrm{e}^x$, como se puede comprobar por sustitución en la ecuación diferencial. Lo primero que hacemos es elegir (arbitrariamente) un tamaño de paso, digamos, $h = 0'1$. Calculamos ahora las estimaciones y_n mediante el método de Euler y comparamos con los valores exactos $\phi(x_n)$ que damos en negrita:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1,$$

$$\begin{aligned}x_1 = 0'1, \quad y_1 &= y_0 + h\,f(x_0, y_0) = 1 + 0'1\,f(0,1)\\ &= 1 + 0'1\,(0+1) = 1'1 \;\leftrightarrow\; \phi(x_1) = \mathbf{1'1103}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2 = 0'2, \quad y_2 &= y_1 + h\,f(x_1, y_1) = 1 + f(0'1, 1'1)\\ &= 1'1 + 0'1\,(0'1 + 1'1) = 1'22 \;\leftrightarrow\; \phi(x_2) = \mathbf{1'2428}\end{aligned}$$

◀

Errores

Hemos visto en el ejemplo anterior que los resultados numéricos difieren de los exactos. Esto es debido a la existencia de dos fuentes de error:

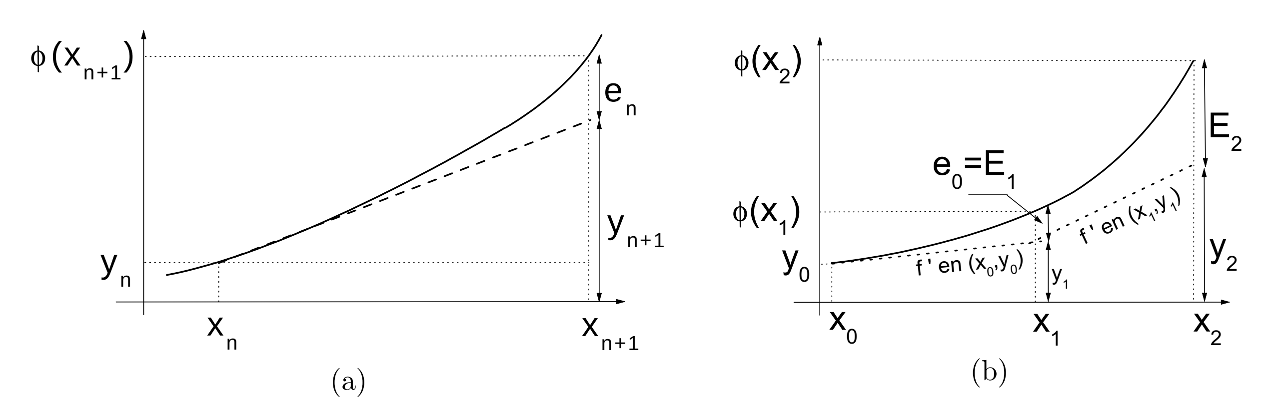


Figura 4.11: Representación gráfica del método de Euler e interpretación geométrica del error debido a la discretización. (a) $e_n = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1}$; (b) $E_n = \phi(x_n) - y_n$.

1. La primera fuente de error es la inexactitud de la fórmula discretizada. El error que se comete al calcular y_{n+1} mediante la fórmula discretizada *suponiendo* que y_n *fuera el valor exacto*, se conoce como *error de discretización local*, e_n, del n-ésimo paso de integración:

$$e_n = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1} \quad \text{siendo } y_n \equiv \phi(x_n) \text{ } \textit{exacto}. \tag{4.63}$$

   Por la fórmula (4.60) sabemos que en el método de Euler este error es de orden h^2. En el ejemplo anterior (con $h = 0'1$) veíamos que

$$e_0 = \phi(0'1) - y_1 = 1'1103 - 1'1 = 0'0103.$$

   La diferencia entre la solución exacta y la numérica en un punto se conoce como error de discretización acumulado:

$$E_n = \phi(x_n) - y_n. \tag{4.64}$$

   En el ejemplo anterior teníamos que

$$E_2 = \phi(0'2) - y_2 = 1'2428 - 1'22 = 0'02.$$

   No es difícil demostrar [KC94] que el error de discretización local que se comete en el método de Euler es de orden h^2 si $f(x, y)$ y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región de integración. En la figura 4.11 se muestra gráficamente en qué consiste el error de discretización local y el error de discretización acumulado.

2. La segunda fuente de error es el número finito de dígitos con los que se representan los números en los cálculos numéricos. Obviamente, este error puede reducirse usando un número mayor de dígitos. El error de redondeo acumulado se define por

$$R_n = y_n - Y_n, \tag{4.65}$$

   siendo Y_n el valor calculado real e y_n el que debería haberse calculado si la precisión de nuestros cálculos fuera infinita. Este tipo de error es difícil de analizar.

El error total está acotado por $|E_n| + |R_n|$:

$$\begin{aligned}|\phi(x_n) - Y_n| &= |\phi(x_n) - y_n + y_n - Y_n| \\ &\leq |\phi(x_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\leq |E_n| + |R_n|.\end{aligned}$$

4.5.2. Método del desarrollo de Taylor

En la ecuación (4.60) mostramos que el el método de Euler se puede entender como procedente del truncamiento en el orden h de la serie de Taylor

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + h\,\frac{d\phi}{dx}\bigg|_{x_n} + \frac{h^2}{2!}\,\frac{d^2\phi}{dx^2}\bigg|_{x_n} + \frac{h^3}{3!}\,\frac{d^3\phi}{dx^3}\bigg|_{x_n} + \dots \tag{4.66}$$

$$= \phi(x_n) + h\,f(x_n,\phi(x_n)) + \frac{h^2}{2!}\,\frac{df(x,\phi(x))}{dx}\bigg|_{x_n} + \frac{h^3}{3!}\,\frac{d^2 f(x,\phi(x))}{dx^2}\bigg|_{x_n} + \dots \tag{4.67}$$

Es evidente que podemos mejorar la estimación del método de Euler si retenemos más términos del desarrollo de Taylor. Por ejemplo, si truncamos a partir del término de orden h^2, la fórmula sería:

$$\phi(x_{n+1}) =\phi(x_n) + h\,f(x_n,\phi(x_n)) + \frac{h^2}{2!}\left[f_x(x_n,\phi(x_n)) + f(x_n,\phi(x_n))f_y(x_n,\phi(x_n))\right] + O(h^3) \tag{4.68}$$

pues

$$\frac{df(x,y(x))}{dx} = f_x(x,y) + \frac{dy}{dx}\,f_y(x,y)$$

y, por la definición de la función $\phi(x)$,

$$\frac{d\phi}{dx} = f(x,\phi).$$

Se ha usado la notación $f_x(x,y)$ para referirse a la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto al primer argumento y $f_y(x,y)$ para referirse a la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto al segundo argumento. La fórmula discretizada correspondiente a la fórmula (4.68) es por tanto:

$$y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n,y_n) + \frac{h^2}{2!}\left[f_x(x_n,y_n) + f(x_n,y_n)\,f_y(x_n,y_n)\right] \tag{4.69}$$

cuyo error local de orden h^3.

La generalización a órdenes más altos es inmediata. Sin embargo, este método tiene como desventajas que:

- Requiere evaluar previamente las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xx}, $\dots$ de $f(x,y)$. Sin embargo, la existencia de programas de cálculo simbólico hace que este requerimiento sea menos penoso y más fiable que cuando, en los viejos buenos tiempos, había que hacerlo "a mano".
- No es factible si estas derivadas parciales no existen. Sin embargo, esto no es lo habitual.

4.5.3. Método de Euler Modificado

Dado que $\phi(x)$ satisface la relación $\phi'(x) = f\big(x,\phi(x)\big)$, se tiene que

$$\phi(x_{n+2}) - \phi(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx. \tag{4.70}$$

Estimaremos de nuevo la integral anterior mediante la regla del rectángulo, aunque ahora aproximaremos el integrando por el valor de f en el punto *medio*, es decir, en x_{n+1}. En tal caso se tiene que

$$\int_{x_n}^{x_{n+2}} f\big(x,\phi(x)\big)\,dx \simeq 2h\,f\big(x_{n+1},\phi(x_{n+1})\big). \tag{4.71}$$

De hecho sabemos [véase la ecuación (4.23)] que el error que se comete al usar esta regla de integración es de orden h^3, es decir,

$$\int_{x_n}^{x_{n+2}} f\big(x, \phi(x)\big)\, dx = 2h\, f\big(x_{n+1}, \phi(x_{n+1})\big) + O(h^3). \tag{4.72}$$

Usando y_{n+1} en vez de $\phi(x_{n+1})$ se obtiene la relación

$$\int_{x_n}^{x_{n+2}} f\big(x, \phi(x)\big)\, dx \simeq 2h\, f(x_{n+1}, y_{n+1}).$$

La fórmula discretizada del método de Euler modificado es por tanto

$$y_{n+2} = y_n + 2h\, f(x_{n+1}, y_{n+1}). \tag{4.73}$$

Para calcular y_{n+2}, es preciso conocer los *dos* puntos anteriores, y_{n+1} e y_n. Por esta razón se dice que es un *método de dos pasos*. Dado que al inicio del procedimiento de resolución numérica sólo conocemos y_0, el valor de y_1 ha de hallarse por otros métodos. Por ejemplo, podemos hallar y_1 mediante métodos de *un* paso, tales como el método de Euler simple, o bien mediante el desarrollo de Taylor. Por ejemplo, usando este último procedimiento, se tiene que

$$y_1 = y(x_1 = x_0 + h) = y_0 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} h + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_0} h^2 + O(h^3) \tag{4.74}$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y)\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

► *Ejemplo 4.10*

Apliquemos este procedimiento a la ecuación del ejemplo 4.9 anterior:

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1.$$

Recuérdese que la solución exacta de esta ecuación es $\phi(x) = -1 - x + 2\,e^x$. Al igual que hicimos en el ejemplo anterior, tomamos $h = 0'1$ como tamaño del paso. Hemos primero de calcular y_1. Lo haremos mediante la serie de Taylor:

$$\begin{aligned} y(0) &= 1, \\ y'(x) &= f(x, y) = x + y, \\ y''(x) &= f_x + f(x, y) f_y = 1 + (x + y)1 = 1 + x + y, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} y'(0) &= f(0, 1) = 0 + 1 = 1, \\ y''(0) &= 1 + 0 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Utilizando la expresión (4.74), tenemos entonces que

$$y_1 = 1 + h + 2\frac{h^2}{2} = 1 + 0'1 + (0'1)^2 = 1'11\ .$$

La fórmula de Euler modificada es para este ejemplo igual a

$$y_{n+2} = y_n + 2 \cdot 0'1[x_{n+1} + y_{n+1}],$$

luego tenemos que

$$y_2 = 1 + 0'2[0'1 + 1'11] = 1'242.$$

El valor exacto es $\phi(0'2) = 1'2428$. El método de Euler modificado ha proporcionado una estimación $y_2 = 1'24$ bastante mejor que el método de Euler simple, el cual conducía a $y_2 = 1'22$.

◀

4.5.4. Métodos Predictor-Corrector

Presentaremos aquí dos métodos de este tipo: el método de Euler mejorado y el método de Milne.

Método de Euler mejorado o método de Heun

Aproximamos la integral de

$$\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(x, \phi(x)\big)\, dx$$

mediante la fórmula del trapecio [véase la ecuación (4.29)]:

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f\big(x, \phi(x)\big)\, dx &= \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right] + O(h^3) \\ &\simeq \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right], \end{aligned}$$

para obtener la fórmula discretizada del método de Euler mejorado o método de Heun:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]. \tag{4.75}$$

Este método es aparentemente inútil porque el valor que queremos hallar, y_{n+1}, aparece en el argumento de $f(x, y)$ en el miembro derecho de la fórmula de discretización. Para solventar este problema, lo que se hace es *predecir* este valor mediante *otro* método (con el de Euler, por ejemplo). El valor estimado mediante este *otro* método es el valor *predictor* y lo denotaremos por $\widetilde{y}_{n+1}$. Es justamente este valor el que se usa en el miembro derecho de la ecuación de discretización (4.75) para hallar un nuevo valor, es decir el valor *corregido*[17] de y_{n+1}:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \widetilde{y}_{n+1})\right]. \tag{4.76}$$

Si utilizamos el método de Euler simple como método predictor se tendría que

$$\widetilde{y}_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n),$$

por lo que la fórmula discretizada (4.76) se reduciría en definitiva a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big[f(x_n, y_n) + f\big(x_{n+1}, y_n + h\, f(x_n, y_n)\big)\Big]. \tag{4.77}$$

Esta fórmula es conocida como fórmula de Heun.

[17] ¿Hace falta explicar por qué se dice que este es un método de tipo Predictor-Corrector?

Método de Milne

En este método se aproxima la integral de

$$\phi(x_{n+2}) - \phi(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+2}} f\big(x, \phi(x)\big)\, dx$$

mediante la fórmula de Simpson:

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{x_{n+2}} f\big(x, \phi(x)\big)\, dx &= \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n+2}, y_{n+2})] + O(h^5)\\ &\simeq \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n+2}, y_{n+2})],\end{aligned}$$

para obtener la fórmula discretizada del método de Milne:

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n+2}, y_{n+2})].$$

Como en el caso anterior, resulta que el valor que pretendemos hallar, y_{n+2}, aparece en el argumento de $f(x, y)$ en el miembro derecho de la fórmula de discretización. Este problema se solventa, tal como hicimos anteriormente, utilizando *otro* método para predecir el valor y_{n+2}. Denotando por $\widetilde{y}_{n+2}$ a este valor predictor, tendríamos que el valor corregido según la ecuación de discretización de Milne sería

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}[f(x_n, y_n) + 4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_{n+2}, \widetilde{y}_{n+2})]. \tag{4.78}$$

Debe notarse que este método es, como el método de Euler modificado de la sección 4.5.3, un método de dos pasos: para calcular y_{n+2} hemos de conocer previamente la solución en los *dos* puntos anteriores y_n e y_{n+1}. Por supuesto, para evaluar y_2, el punto y_1 tiene que calcularse por algún otro método de *un* paso (por ejemplo, puede usarse el método de Euler simple o el método del desarrollo de Taylor).

4.5.5. Métodos de Runge-Kutta

Estos son métodos muy populares por su facilidad de programación mediante ordenador y por la gran precisión que pueden alcanzar. Los métodos de Runge-Kutta de orden m se diseñan para reproducir la estimación de $\phi_{n+1} - \phi_n$ que proporciona la serie de Taylor

$$\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n) = \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_n h + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_n h^2 + \cdots + \frac{1}{m!} \left.\frac{d^m\phi}{dx^m}\right|_n h^m + O(h^{m+1}) \tag{4.79}$$

si se trunca en el orden m. Es decir, la estimación $y_{n+1} - y_n$ de la cantidad $\phi_{n+1} - \phi_n$ que proporciona un método de Runge-Kutta de orden m vendría dada por los primeros m términos de (4.79):

$$y_{n+1} - y_n = \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_n h + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_n h^2 + \cdots + \frac{1}{m!} \left.\frac{d^m\phi}{dx^m}\right|_n h^m. \tag{4.80}$$

Dicho en otros términos, en los métodos de Runge-Kutta de orden m se hace que el error local $e_n = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1}$ sea cero hasta orden h^m, es decir, $e_n = O(h^{m+1})$. Los métodos de Runge-Kutta alcanzan este objetivo mediante la evaluación de $f(x, y(x))$ en ciertos puntos y sin evaluar ninguna derivada de la función $\phi(x)$. Siendo más precisos, en el método de Runge-Kutta de orden m se reproducen los m términos de la serie (truncada) de Taylor de la ecuación (4.80) anterior mediante la fórmula

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \cdots + \alpha_m k_m, \tag{4.81a}$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n)\, h\,, \\ k_2 &= f[x_n + a_2\, h, y_n + b_{21} k_1]\, h\,, \\ k_3 &= f[x_n + a_3 h, y_n + b_{31} k_1 + b_{32} k_2]\, h\,, \\ &\vdots \quad \vdots \\ k_m &= f[x_n + a_m h, y_n + b_{m,1} k_1 + \cdots + b_{m,m-1} k_{m-1}]\, h. \end{aligned} \tag{4.81b}$$

Los valores de los coeficientes α_i, a_i y b_{ij} se determinan de modo que $\phi(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^{n+1})$.

A primera vista, la fórmula de discretización de Runge-Kutta (4.81) podría parecer muy arbitraria y carente de justificación. Sin embargo, un poco más de atención nos haría descubrir que algunas de las fórmulas de discretización que hemos hallado anteriormente no son más que casos particulares de (4.81). Por ejemplo, la fórmula de Heun dada por (4.77) es un caso particular de (4.81) con $m = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = b_{21} = 1$.

▷ ***Ejercicio*** *4.10*

Demuestra que, tras hacer el cambio $h \to h/2$, la fórmula de Milne (4.78) *adopta la forma de la ecuación* (4.81) *si $\widetilde{y}_{n+2}$ está dada por la fórmula de Euler moficada e y_{n+1} por la fórmula de Euler.*

En la siguiente sección nos limitaremos a deducir las fórmulas del método de Runge-Kutta de orden 2 (a pesar de que normalmente se usa el método de Runge-Kutta de orden 4) porque el procedimiento para obtener las fórmulas de Runge-Kutta es el mismo para todos los órdenes y, sin embargo, las manipulaciones algebraicas requeridas para obtener las fórmulas de órdenes superiores se hacen muy pesadas a medida que el orden aumenta.

Método Runge-Kutta de segundo orden

En el método de Runge-Kutta de orden 2 se pretende hallar una fórmula de discretización de este tipo:

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \tag{4.82}$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) h, \\ k_2 &= f(x_n + a\, h, y_n + b\, k_1) h, \end{aligned} \tag{4.83}$$

donde $\{\alpha_1, \alpha_2, a, b\}$ son parámetros a determinar de modo que el error local $e_n = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1}$ sea, como mínimo, de orden h^3. Por la definición de error local asumimos que $\phi(x_n) \equiv y_n$. Calculamos $\phi(x_{n+1})$ mediante serie de Taylor hasta orden h^2:

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n + h) = \phi(x_n) + \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_n h + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_n h^2 + O(h^3) \tag{4.84}$$

donde

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_n &\equiv \left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x_n} = [f(x, y)]_{x_n} = f(x_n, y_n), \\ \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_n &\equiv \left.\frac{d^2\phi}{dx^2}\right|_{x_n} = \left[\frac{d}{dx} f\big(x, y(x)\big)\right]_n = \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y}\right]_n = f_x(x_n, y_n) + f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n)\,. \end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que

$$\phi(x_{n+1}) = y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f_x(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2} f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + O(h^3). \tag{4.85}$$

Por otro lado, usando las expresiones de k_1 y k_2 de (4.83) en (4.82) se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 h\, f(x_n, y_n) + \alpha_2 h\, f[x_n + a\,h, y_n + b\,h\, f(x_n, y_n)]. \tag{4.86}$$

Pero mediante el desarrollo en serie de Taylor de la función de dos variables $f[x_n + a\,h, y_n + b\,h\, f(x_n, y_n)]$ en torno a x_n e y_n se encuentra que

$$f[x_n + a\,h, y_n + b\,h\, f(x_n, y_n)] = f(x_n, y_n) + a\,h\, f_x(x_n, y_n) + b\,h\, f(x_n, y_n)\, f_y(x_n, y_n) + O(h^2).$$

Insertando este resultado en (4.86) obtenemos

$$y_{n+1} = y_n + (\alpha_1 + \alpha_2)\, h\, f(x_n, y_n) + a\,\alpha_2 h^2 f_x(x_n, y_n) + b\,\alpha_2 h^2 f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + O(h^3).$$

Restando esta ecuación de la ecuación (4.85) se encuentra que el error local $e_n = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1}$ es igual a

$$\begin{aligned} e_n =& (1 - \alpha_1 - \alpha_2)\, h\, f(x_n, y_n) + \left(\frac{1}{2} - a\,\alpha_2\right) h^2 f_x(x_n, y_n) \\ &+ \left(\frac{1}{2} - b\,\alpha_2\right) h^2 f(x_n, y_n) f_y(x_n, y_n) + O(h^3). \end{aligned}$$

Podemos hacer que el error local e_n sea cero hasta orden h^2 si elegimos los parámetros $\{\alpha_1, \alpha_2, a, b\}$ de modo que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \qquad a\,\alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad b\,\alpha_2 = \frac{1}{2}. \tag{4.87}$$

Esto significa que en este método (método de Runge-Kutta de orden 2) el error local será de orden h^3: $e_n = O(h^3)$.

En (4.87) hay tres ecuaciones y 4 parámetros a determinar, por lo que la solución de estas ecuaciones no es única. Tenemos pues la libertad de elegir entre las soluciones posibles. Por ejemplo, si escogemos $a = 1$ nos encontramos que

$$a = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = 1, \\ \alpha_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se tiene entonces que la ecuación (4.82) se convierte en

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2} h\, f(x_n, y_n) + \frac{1}{2} h\, f[x_n + h, y_n + h\, f(x_n, y_n)] && (4.88) \\ &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2), && (4.89) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) h, \\ k_2 &= f[x_n + h, y_n + h\, f(x_n, y_n)] h. \end{aligned}$$

La fórmula (4.88) es una fórmula tipo Runge-Kutta de orden 2 que coincide con la fórmula de Heun (véase la expresión (4.77) en la página 234).

Otra elección posible es

$$a = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_2 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_1 = 0.$$

Esta elección conduce a una fórmula de tipo Runge-Kutta

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + k_2, \\ &= y_n + h\, f\left[x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}\, f(x_n, y_n)\right] \end{aligned}$$

equivalente a la fórmula del método de Euler modificado sin más que hacer $h \to h/2$ en la expresión (4.73).

Método Runge-Kutta de cuarto orden

En el método de Runge-Kutta de orden 4 la fórmula discretizada es de la forma

$$y_{n+1} = y_n + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \alpha_4 k_4\,,$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n)h\,, \\ k_2 &= f[x_n + a_2\, h, y_n + b_{21}k_1]h\,, \\ k_3 &= f[x_n + a_3 h, y_n + b_{31}k_1 + b_{32}k_2]h\,, \\ k_4 &= f[x_n + a_4 h, y_n + b_{41}k_1 + b_{42}k_2 + b_{43}k_3]h\,. \end{aligned}$$

Los coeficientes α_i, a_j b_{kl} se buscan de modo que el error local $e_n = \phi(x_{n+1}) - y_{n+1}$ sea cero hasta orden h^4, es decir, $e_n = O(h^5)$. Expresando, tal como hicimos en el método de Runge-Kutta de orden 2, el desarrollo de Taylor de $\phi(x_n + h)$ e y_{n+1} en términos de derivadas parciales de $f(x, y)$ e identificando coeficientes, se obtendría un sistema algebraico de 11 ecuaciones para los 13 parámetros $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, a_2, a_3, a_4, b_{21}, b_{31}, b_{32}, b_{41}, b_{42}, b_{43}\}$ a determinar.[18] Podemos, por ejemplo, elegir arbitrariamente $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ y hallar el resto de los coeficientes mediante las 11 ecuaciones. El resultado es

$$\begin{array}{lllll} \alpha_1 = \dfrac{1}{6}, & & & & \\ \alpha_2 = \dfrac{1}{3}, & a_2 = \dfrac{1}{2}, & b_{21} = \dfrac{1}{2}, & & \\ \alpha_3 = \dfrac{1}{3}, & a_3 = \dfrac{1}{2}, & b_{31} = 0, & b_{32} = \dfrac{1}{2}, & \\ \alpha_4 = \dfrac{1}{6}, & a_4 = 1, & b_{41} = 0, & b_{42} = 0, & b_{43} = 1. \end{array}$$

En definitiva, tendríamos

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}\,, \tag{4.90}$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n)h, \\ k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) h, \\ k_3 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) h, \\ k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + k_3\right) h. \end{aligned}}$$

[18]Pueden verse los detalles de este desarrollo en la referencia [Myi78]

Esta fórmula discretizada es conocida como fórmula de Runge-Kutta de orden 4 con coeficientes de Runge o, simplemente, fórmula de Runge-Kutta de cuarto orden, dado que son los coeficientes de Runge los que se emplean de modo casi exclusivo. Muy a menudo se la conoce como fórmula de Runge-Kutta *clásica*.

Por supuesto, otras elecciones de α_2 y α_3 conducen a otras fórmulas discretizadas también válidas [Ant02, sec. 11.4]. Por ejemplo, si elegimos $\alpha_2 = \alpha_3 = 3/8$, obtenemos la fórmula discretizada de Runge-Kutta con los coeficientes de Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right), \tag{4.91}$$

con

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n)h\,,\\
k_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{k_1}{3}\right)h\,,\\
k_3 &= f\left(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{k_2}{3} - \frac{k_1}{3}\right)h\,,\\
k_4 &= f\left(x_n + h, y_n + k_1 - k_2 + k_3\right)h\,.
\end{aligned}$$

▷ ***Ejercicio*** *4.11*

Demuestra que la fórmula de Runge-Kutta (con coeficientes de Runge) se reduce a la regla de Simpson cuando la función f no depende de y.

▶ *Ejemplo 4.11*

En este ejemplo estimaremos el valor de la solución de la ecuación diferencial

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1,$$

en el punto $x = 0'2$ mediante el método de Runge-Kutta de orden 2 y orden 4 usando un paso igual a $h = 0'2$.

Orden 2:

La ecuación de Runge-Kutta de segundo orden es

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

con

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_n, y_n)\,h,\\
k_2 &= f[x_n + h, y_n + h\,f(x_n, y_n)]\,h.
\end{aligned}$$

En nuestro ejemplo se tiene que

$$\begin{aligned}
h &= 0'2\,,\\
y(0) &= y_0 = 1\,,
\end{aligned}$$

por lo que los valores de k_1 y k_2 son

$$\begin{aligned}
k_1 &= (0+1)\,0'2 = 0'2,\\
k_2 &= (0'2 + 1'2)\,0'2 = 0'28.
\end{aligned}$$

Por tanto encontramos que

$$\begin{aligned} y(0'2) \simeq y_2 &= 1 + \frac{1}{2}\,(0'2 + 0'28) \\ &= 1 + 0'24 \\ &= 1'24 \end{aligned}$$

Orden 4:

Utilizando el grupo de fórmulas correspondientes al método de Runge-Kutta de cuarto orden, ecuaciones (4.90), hallamos que

$$\begin{aligned} k_1 &= f(0,1)\,0'2 = 0'2, \\ k_2 &= f\left(0 + \frac{0'2}{2}, 1 + \frac{0'2}{2}\right)\,0'2 = (0'1 + 1'1)\,0'2 = 0'24, \\ k_3 &= f\left(0 + \frac{0'2}{2}, 1 + \frac{0'24}{2}\right)\,0'2 = (0'1 + 1'12)\,0'2 = 0'244, \\ k_4 &= f(0 + 0'2, 1 + 0'244)\,0'2 = (0'2 + 1'244)\,0'2 = 0'2888, \end{aligned}$$

por lo que la solución es

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 + \frac{1}{6}\,(0'2 + 2 \cdot 0'24 + 2 \cdot 0'244 + 0'2888) \\ &= 1'2428. \end{aligned}$$

Como vimos en los ejemplos anteriores, la solución exacta es $\phi(0'2) = 1'2428$. Luego el método de Runge-Kutta de cuarto orden nos ha proporcionado con sólo un paso de tamaño $h = 0'2$ una mejor estimación del valor exacto $\phi(0'2)$ que cualquiera de los métodos vistos anteriormente (incluso cuando empleaban el tamaño de paso más pequeño $h = 0'1$).[19]

◀

4.5.6. Sistemas de ecuaciones de primer orden

Los métodos numéricos que hemos presentado en la sección anterior estaban diseñados para resolver una única ecuación diferencial de primer orden. Sin embargo, su generalización para hacerlos aplicables a sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden no es especialmente difícil. Por ejemplo, para el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = g(t,x,y). \end{cases} \tag{4.92}$$

es fácil demostrar que la fórmula discretizada de Euler vendría dada por

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\,f(t_n, x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + h\,g(t_n, x_n, y_n). \end{cases} \tag{4.93}$$

De modo análogo, el método de Runge-Kutta de cuarto orden con los coeficientes de Runge tomaría la forma

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{6}(l_1 + 2\,l_2 + 2\,l_3 + l_4), \end{cases} \tag{4.94}$$

[19] En `www` hay una práctica en *Mathematica* en la que se compara el método de Euler y el de Runge-Kutta de orden 4.

con

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(t_n, x_n, y_n)\, h \ , \\
l_1 &= g(t_n, x_n, y_n)\, h \ , \\
k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}\right)\, h \ , \\
l_2 &= g\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}, y_n + \frac{l_1}{2}\right)\, h \ , \\
k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}\right)\, h \ , \\
l_3 &= g\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}, y_n + \frac{l_2}{2}\right)\, h \ , \\
k_4 &= f\left(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3\right)\, h \ , \\
l_4 &= g\left(t_n + h, x_n + k_3, y_n + l_3\right)\, h \ .
\end{aligned}
$$

La generalización a sistemas con un número mayor de ecuaciones es obvia.

4.6. Métodos numéricos para problemas de contorno

Hemos visto en la sección anterior procedimientos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de iniciales. En esta sección nos dedicaremos al estudio de métodos numéricos capaces de resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con *condiciones de contorno* (CC). Estos métodos suelen ser más complicados, menos directos, que los que se usan para resolver los problemas de condiciones iniciales. Las ecuaciones sobre las que aplicaremos los métodos serán ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$
y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad \text{con} \qquad a \le x \le b \ .
$$

La generalización a otro tipo de ecuaciones no suele ser difícil. En esta sección estudiaremos tres clases de métodos: métodos en diferencias finitas, métodos iterativos, y métodos de tiro.

4.6.1. Métodos en diferencias finitas

Estos métodos se basan en la idea de discretizar la función incógnita $y(x)$ en el intervalo de interés $[a, b]$:

$$
y(x) \to \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}
$$

donde

$$
y(x_m) \equiv y_m \quad \text{con} \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b
$$

y traducir las condiciones *diferenciales* que determinan $y(x)$ (es decir, la ecuación diferencial) en condiciones *algebraicas* sobre el conjunto $\{y_0, \ldots, y_n\}$. El siguiente ejemplo debe hacernos entender esto de un modo más claro.

► *Ejemplo 4.12*

Queremos obtener una estimación numérica de la solución de la ecuación diferencial

$$
y''(x) = y(x) \tag{4.95a}
$$

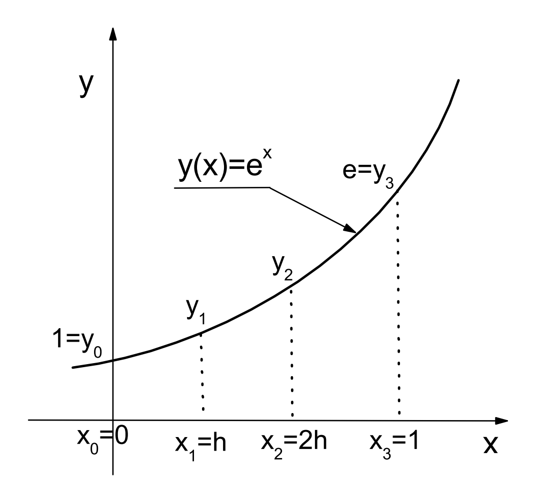


Figura 4.12: Discretizado y notación para el ejemplo 4.12.

que satisface las condiciones de contorno

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = \mathrm{e} \; . \tag{4.95b}$$

La solución exacta es $y(x) = \mathrm{e}^x$, como puede comprobarse fácilmente. Siguiendo la idea expuesta más arriba, vamos a ver cuál sería la traducción algebraica de la anterior ecuación diferencial, o, lo que es lo mismo, la traducción algebraica de la condición: "la segunda derivada de la función incógnita en un punto dado es igual a esa misma función en ese punto", o, equivalentemente, la traducción algebraica de que la curvatura de $y(x)$ por x_m es proporcional a y_m. Tomaremos en este ejemplo $h = x_{m+1} - x_m = 1/3$ como valor de discretización (véase la figura 4.12). Sabemos por la sección 4.3.1 que podemos aproximar la derivada y''_m de $y(x)$ en x_m mediante la fórmula de la derivada central de tres puntos (véase la ecuación (4.19) en la página 214):

$$y''_m \simeq \frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h^2} .$$

Luego la "traducción algebraica" de la ecuación diferencial (4.95) en el punto genérico x_m es

$$\frac{y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1}}{h^2} = y_m \; .$$

Particularizando esta expresión en cada uno de los puntos del discretizado (en x_0, x_1, x_2, y x_3) se obtiene el siguiente *sistema algebraico*:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \, , \\ \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} &= y_1 \, , \\ \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{h^2} &= y_2 \, , \\ y_3 &= \mathrm{e} \; . \end{aligned}$$

De este modo tenemos un sistema algebraico con cuatro valores a determinar, y_0, y_1, y_2, y_3 y cuatro ecuaciones a satisfacer. La solución de este sistema (recuérdese que $h = 1/3$) es:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1 \, , \\ y_1 &= \frac{9\ (19 + 9\ \mathrm{e})}{280} \simeq 1'397 \, , \\ y_2 &= \frac{9\ (9 + 19\ \mathrm{e})}{280} \simeq 1'949 \, , \\ y_3 &= \mathrm{e} \; . \end{aligned}$$

A pesar de la discretización tan grosera que hemos empleado ($h = 1/3$), estos resultados están en muy buen acuerdo con los exactos: $e^{1/3} \simeq 1'396$, $e^{2/3} \simeq 1'948$.

▷ ***Ejercicio** 4.12*

Usa el procedimiento anterior para hallar una estimación numérica de la solución del problema de condiciones de contorno

$$y''(x) = -\pi^2 y(x)$$

con $y(0) = 1$, $y(1) = -1$ para una discretización de tamaño $h = 1/3$. Compara con la solución exacta.

◀

En resumen, la clave para traducir las condiciones *diferenciales* que determinan $y(x)$ (es decir, la ecuación diferencial) en condiciones *algebraicas* sobre $\{y_0, \dots, y_n\}$ consiste en expresar de modo aproximado la derivada i-ésima de $y(x)$ en x_m en la forma de una relación algebraica (derivada en diferencias) que involucre los valores discretizados $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$. Si usamos la fórmula de la derivada central de tres puntos para estimar y'_m (véase la ecuación (4.15)) y la derivada segunda central de tres puntos para estimar y''_m (véase la ecuación (4.19) en la página 214), se tiene que en cada punto $x = x_m$ la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y(x) = f(x)$$

toma la forma

$$\frac{y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}}{h^2} + p(x_m)\frac{y_{m+1} - y_{m-1}}{2h} + q(x_m)\, y_m = f(x_m) \tag{4.96}$$

que es una ecuación en diferencias finitas. En lo que sigue denotaremos a esta ecuación (ecuación de discretización de la ecuación diferencial en el punto x_m) mediante el símbolo $\mathbf{E}_m$. Es decir,

$$\mathbf{E}_m : \quad \frac{1}{h^2}\left(1 - \frac{h}{2}p(x_m)\right) y_{m-1} + \frac{1}{h^2}\left(q(x_m)\, h^2 - 2\right) y_m + \frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{h}{2}p(x_{m+1})\right) y_{m+1} = f(x_m). \tag{4.97}$$

Condiciones de contorno

Vamos ahora a discutir cómo incorporar las condiciones de contorno (CC) de modo que, junto con las relaciones discretizadas de la ecuación diferencial $\mathbf{E}_m$, den lugar a un sistema

$$\left.\begin{array}{c} \text{CCi=CC izquierda discretizada} \\ \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{E}_{n-1} \\ \text{CCd=CC derecha discretizada} \end{array}\right\}$$

que sea resoluble. Distinguimos dos posibilidades:[20]

I. La condición de contorno no involucra a la derivada (condición de contorno de Dirichlet):

$$y(a) \equiv y_0 = \alpha$$

[20] Salvo que se diga lo contrario, y sin pérdida de generalidad, nos limitaremos en lo que sigue a discutir la condición de contorno a la izquierda.

En este caso el sistema en diferencias sería

$$\begin{array}{ll} \text{CCi}: & y_0 = \alpha \\ \mathbf{E_1}: & \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + p(x_1)\,\dfrac{y_2 - y_0}{2h} + q(x_1)\,y_1 = f(x_1) \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

II. La condición de contorno involucra a la derivada (condición de contorno de Neumann):

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha\,. \tag{4.98}$$

Veamos dos modos naturales de discretizar esta condición de contorno e incluirla junto con las ecuaciones $\mathbf{E}_m$ en un sistema sobre $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ que sea resoluble:

1. Un modo de implementar la condición de contorno (4.98) en forma de diferencias finitas es aproximando $y'(a)$ mediante la fórmula de la derivada lateral derecha de dos puntos: $y'(a) \simeq (y_1 - y_0)/h$ [véase la fórmula (4.16) de la página 212]. Por consiguiente la CCi quedaría así

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 \frac{y_1 - y_0}{h} = \alpha$$

y el sistema adoptaría la forma

$$\begin{array}{ll} \text{CCi}: & \alpha_1 y(a) + \alpha_2 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = \alpha \\ \mathbf{E}_1: & \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + p(x_1)\,\dfrac{y_2 - y_0}{2h} + q(x_1)\,y_1 = f(x_1) \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \end{array}$$

2. Pero la derivada en diferencias lateral (por la derecha o izquierda) es menos precisa que la central $y'_m = (y_{m+1} - y_{m-1})/2h$ (tal como vimos en la sección 4.3.1). Sin embargo, si usamos esta ecuación en la frontera, es decir, en el punto x_0, nos encontramos con la ecuación

$$y'_0 = (y_1 - y_{-1})/2h,$$

siendo y_{-1} un valor *ficticio* [correspondiente al punto $x_{-1} = a - h$ situado fuera del intervalo de definición de $y(x)$] cuya introducción añade una incógnita más al sistema algebraico. Por supuesto, este sistema no es resoluble si no se añade una ecuación más que involucre a y_{-1}. El procedimiento habitual consiste en añadir la ecuación genérica (4.97) en el punto $x = x_0 = a$, es decir añadir la ecuación $\mathbf{E}_0$ al sistema. En resumen, el sistema quedaría

$$\text{CCi}\ \begin{cases} \text{CC}_{\text{pura}} & : \quad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 \dfrac{y_1 - y_{-1}}{2h} = \alpha, \\ \mathbf{E_0} & : \quad \dfrac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + p(x_0)\dfrac{y_1 - y_{-1}}{2h} + q(x_0)y_0 = f(x_0), \end{cases}$$
$$\mathbf{E_1}: \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Mediante la notación CC_{pura} nos referimos a la ecuación de la condición de contorno expresada en forma de diferencias.

Veamos un par de ejemplos.

▶ *Ejemplo 4.13*

Queremos hallar el sistema en diferencias correspondiente al problema de condiciones de contorno cuya ecuación es

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x).$$

y cuyas condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= \alpha, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \beta. \end{aligned}$$

Utilizando la opción 2 anterior y tras multiplicar todas las expresiones por h^2, el sistema en diferencias quedaría

$$\begin{array}{ll}
x_0 \rightarrow & \text{CC} \begin{cases} \text{CCi}_{\text{pura}}: & -\dfrac{\alpha_2}{2} h\, y_{-1} + \alpha_1 h^2 y_0 + \dfrac{\alpha_2}{2} h\, y_1 = \alpha\, h^2, \\ \mathbf{E}_0: & \left(1 - \dfrac{h}{2} p_0\right) y_{-1} + \left(q_0 h^2 - 2\right) y_0 + \left(1 + \dfrac{h}{2} p_0\right) y_1 = f_0 h^2, \end{cases} \\
x_1 \rightarrow & \mathbf{E_1}: \left(1 - \dfrac{h}{2} p_1\right) y_0 + \left(q_1 h^2 - 2\right) y_1 + \left(1 + \dfrac{h}{2} p_1\right) y_2 = f_1 h^2, \\
\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{n-1} \rightarrow & \mathbf{E_{n-1}}: \left(1 - \dfrac{h}{2} p_{n-1}\right) y_{n-2} + \left(q_{n-1} h^2 - 2\right) y_{n-1} + \left(1 + \dfrac{h}{2} p_{n-1}\right) y_n = f_{n-1} h^2, \\
x_n \rightarrow & \text{CC} \begin{cases} \mathbf{E_n}: & \left(1 - \dfrac{h}{2} p_n\right) y_{n-1} + \left(q_n h^2 - 2\right) y_n + \left(1 + \dfrac{h}{2} p_n\right) y_{n+1} = f_n h^2, \\ \text{CCd}_{\text{pura}}: & -\dfrac{\beta_2}{2} h\, y_{n-1} + \beta_1 h^2 y_n + \dfrac{\beta_2}{2} h\, y_{n+1} = \beta\, h^2. \end{cases}
\end{array}$$

Obtenemos así un sistema algebraico lineal de $n+3$ ecuaciones con $n+3$ incógnitas.

◀

Observaciones. En los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de contorno basados en la discretización de la ecuación diferencial sucede que:

- La ecuación diferencial ha de ser lineal para que, típicamente, la resolución del sistema algebraico sea abordable.
- Se requiere mucha memoria de ordenador si utilizamos un número grande de puntos.
- A diferencia de los métodos de tiro que expondremos más adelante, las condiciones de contorno que involucran a $y'(x)$ son fáciles de implementar.

4.6.2. Métodos de tiro

Sea el problema de condiciones de contorno

$$\begin{aligned} y''(x) + H\left[y'(x), y(x), f(x)\right] = 0, \quad & x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \qquad & y(b) = \beta, \end{aligned} \tag{4.99}$$

donde H es una función no necesariamente lineal. Los métodos de tiro se basan en sustituir este problema por otro de *condiciones iniciales*:

$$\begin{aligned} y''(x) + H\left[y'(x), y(x), f(x)\right] = 0, \quad & x \in [a, b], \\ y(a) = \alpha, \qquad & \boxed{y'(a) = m}\,. \end{aligned} \tag{4.100}$$

La solución de este último problema depende obviamente del valor inicial m de la derivada (la pendiente) $y'(x)$ en a, por eso escribiremos esta solución así: $y(x; m)$. El objetivo de los métodos

de tiro es dar en el blanco, es decir, determinar el valor $\widetilde{m}$ de la derivada de $y(x)$ en a, $y'(a) = \widetilde{m}$, de tal modo que $y(x; \widetilde{m})$ satisfaga *también* la condición de contorno a la derecha: $y(b, \widetilde{m}) = \beta$. En definitiva:

$$\text{Buscamos el valor } \widetilde{m} \text{ tal que } y(b; \widetilde{m}) = \beta.$$

Dicho en otros términos, hay que encontrar un cero $\widetilde{m}$ de la función $F(m) = y(b; m) - \beta$, es decir,

$$\text{Buscamos el valor } \widetilde{m} \text{ tal que } F(\widetilde{m}) = 0.$$

La función $F(m)$ se calcula integrando numéricamente la ecuación diferencial de valores iniciales (4.100) y evaluando la solución en $x = b$. El cero de $F(m)$ se puede calcular mediante los métodos usuales que estudiamos en la sección 4.4. Los métodos de tiro, en contraste con los de diferencias finitas, pueden aplicarse sin dificultades especiales a ecuaciones diferenciales *no lineales*.

▷ ***Ejercicio** 4.13*

1. *Diseña un método de tiro que permita resolver la ecuación diferencial (4.99) cuando una de las condiciones de contorno involucra una derivada (condición de contorno de Neumann). Por concretar, supón que*
$$y(a) = \alpha, \qquad y'(b) = \beta.$$
2. *Haz lo mismo para el caso en el que ambas condiciones de contorno involucren la derivada. Por ejemplo, supón que*
$$y'(a) = \alpha, \qquad y'(b) = \beta.$$

4.6.3. Métodos iterativos en diferencias

Ilustraremos estos métodos mediante la ecuación

$$y''(x) = f(x). \tag{4.101}$$

La generalización a otro tipo de ecuaciones es inmediata. Si discretizamos la ecuación anterior, es decir, si la traducimos a su relación equivalente en diferencias tal como hemos hecho en la sección anterior, obtenemos que para cada punto x_m la ecuación discretizada es

$$\mathbf{E_m}: \quad y_{m-1} - 2y_m + y_{m+1} = h^2 f_m \Rightarrow \frac{1}{2}\left(y_{m-1} + y_{m+1} - h^2 f_m\right) = y_m. \tag{4.102}$$

En los métodos iterativos se interpreta esta ecuación como una asignación

$$\frac{1}{2}\left(y_{m-1} + y_{m+1} - h^2 f_m\right) \to y_m \tag{4.103}$$

es decir, como un procedimiento para obtener una estimación del valor de la solución $y(x)$ en un punto x_m a partir de estimaciones *previas* de $y(x)$ en los puntos adyacentes x_{m-1} y x_{m+1}. Denotando por y_j^{viejo} al valor previo de $y(x)$ en el punto x_j, la relación (4.103) toma la forma

$$\frac{1}{2}\left(y_{m-1}^{\text{viejo}} + y_{m+1}^{\text{viejo}} - h^2 f_m\right) \to y_m^{\text{nuevo}}. \tag{4.104}$$

Asumiendo que en cada iteración, el valor y_m^{nuevo} es una mejor estimación de $y(x_m)$ que y_{m-1}^{viejo}, es obvio que debemos realizar este proceso repetidamente hasta que el resultado de la iteración

converja. Si llamamos $y_m^{[n]}$ a la estimación de $y(x_m)$ en la n-sima iteración, podemos escribir (4.104) de un modo más conveniente:

$$y_m^{[n+1]} = \frac{1}{2}\left(y_{m-1}^{[n]} + y_{m+1}^{[n]} - h^2 f_m\right). \tag{4.105}$$

En los método iterativos se asume que $y_m^{[n]}$ converge cuando $n \to \infty$ y que este valor $y_m^{[\infty]}$ es una estimación de $y(x_m)$ tanto mejor cuanto menor es h. Dicho en otros términos, se asume que $y_m^{[\infty]} \to y(x_m)$ cuando $n \to \infty$. El procedimiento condensado en la fórmula (4.105) es conocido como método de Jacobi.

Nótese que si usamos la fórmula (4.105) en el sentido de m crecientes ("de izquierda a derecha"), cuando procedemos a calcular el valor $y_m^{[n+1]}$ ya conocemos la estimación $y_{m-1}^{[n+1]}$. Si, como estamos asumiendo, consideramos que $y_{m-1}^{[n+1]}$ es una mejor estimación de $y(x_{m-1})$ que $y_{m-1}^{[n]}$, parece razonable introducir este dato mejorado en nuestro cálculo de $y_m^{[n+1]}$. El modo obvio de hacerlo es cambiando el proceso iterativo (4.105) por este otro:

$$y_m^{[n+1]} = \frac{1}{2}\left(y_{m-1}^{[n+1]} + y_{m+1}^{[n]} - h^2 f_m\right). \tag{4.106}$$

Este método iterativo, llamado método de Gauss-Seidel, converge más rápidamente que el de Jacobi y además es más fácil de implementar.

Por último, existe un método aún más rapido que el de Gauss-Seidel y que también es fácil de implementar. En este método, conocido como método de super-relajación, se estima $y_m^{[n+1]}$ como una mezcla ponderada del valor previo de y_m (es decir, de $y_m^{[n]}$) y el valor de $y_m^{[n+1]}$ que se obtendría mediante el método de Gauss-Seidel:

$$y_m^{[n+1]} = (1-\omega) y_m^{[n]} + \omega \left[y_m^{[n+1]}\right]_{\text{Gauss-Seidel}} \tag{4.107}$$

donde ω es el parámetro de super-relajación o parámetro de mezcla. Para la ecuación (4.101) de nuestro ejemplo, esta relación tomaría la forma

$$y_m^{[n+1]} = (1-\omega) y_m^{[n]} + \omega \frac{1}{2}\left(y_{m-1}^{[n+1]} + y_{m+1}^{[n]} - h^2 f_m\right). \tag{4.108}$$

El valor óptimo del parámetro ω que hace que el método converja rápidamente suele estimarse por tanteo. Nótese que cuando $\omega = 1$ se recupera el procedimiento de Gauss-Seidel.

Es lícito preguntarse sobre la convergencia de estos métodos. El procedimiento más sencillo y efectivo para responder a esta pregunta es implementar los métodos y comprobar si convergen. Si no lo hacen, habría que buscar otros procedimientos. Pero si convergen, sabemos que los valores hacia los cuales tienden las iteraciones son la solución (numérica) del problema.

▷ ***Ejercicio** 4.14*

Demuéstrese que es cierta esta última afirmación para cada uno de los tres métodos anteriores, a saber, método de Jacobi, método de Gauss-Seidel y método de super-relajación.

▶ *Ejemplo 4.14*

A continuación se da un programa en QBASIC que implementa el método de super-relajación para resolver el problema de condiciones de contorno

$$y''(x) + 12x^2 = 0, \quad y(0) = y(1) = 0,$$

cuya solución exacta es $y(x) = x - x^4$ como es fácil comprobar. Los valores iniciales de y_m se escogen todos iguales a cero, es decir, $y_m^{[0]} = 0$. El programa es el siguiente:

```
'Programa SUPRELAX.BAS
n = 50  'n debe ser par
h = 1 / n
omega = 1.9
DIM y(0 TO n), f(0 TO n)
FOR i = 0 TO n
    x = i * h
    f(i) = -h * h * 12 * x * x
    y(i) = 0
NEXT i
PRINT "omega="; omega, "n puntos="; n
PRINT "y en x=1/2 exacto", 7 / 16
FOR it = 1 TO 1001
    FOR i = 1 TO n - 1
         yp = (y(i - 1) + y(i + 1) - f(i)) / 2
         y(i) = (1 - omega) * y(i) + omega * yp
    NEXT i
    IF (it - 1) MOD 100 = 0 THEN
    PRINT USING "iteracion=######,  y(x=1/2)=#.######"; it; y(n / 2)
    END IF
NEXT it
```

Este programa imprime las estimaciones de $y(x=1/2)$ cada 100 iteraciones. Estos valores deben compararse con el valor exacto $y(x=1/2)=7/16=0'4375$. Damos a continuación los resultados que se obtienen para distintos valores de ω (en el programa, ω es la variable "omega") :

```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++
omega= 1      n puntos= 50
y en x=1/2 exacto            .4375
iteración=     1,  y(x=1/2)=0.001110
iteración=   101,  y(x=1/2)=0.124469
iteración=   201,  y(x=1/2)=0.225867
iteración=   301,  y(x=1/2)=0.294880
iteración=   401,  y(x=1/2)=0.341391
iteración=   501,  y(x=1/2)=0.372724
iteración=   601,  y(x=1/2)=0.393831
iteración=   701,  y(x=1/2)=0.408049
iteración=   801,  y(x=1/2)=0.417628
iteración=   901,  y(x=1/2)=0.424080
iteración=  1001,  y(x=1/2)=0.428427
++++++++++++++++++++++++++++++++++++

omega= 1.5    n puntos= 50
y en x=1/2 exacto            .4375
iteración=     1,  y(x=1/2)=0.002857
iteración=   101,  y(x=1/2)=0.291481
iteración=   201,  y(x=1/2)=0.393214
iteración=   301,  y(x=1/2)=0.424020
iteración=   401,  y(x=1/2)=0.433348
iteración=   501,  y(x=1/2)=0.436173
iteración=   601,  y(x=1/2)=0.437028
iteración=   701,  y(x=1/2)=0.437287
iteración=   801,  y(x=1/2)=0.437365
iteración=   901,  y(x=1/2)=0.437389
iteración=  1001,  y(x=1/2)=0.437397
++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

```
omega= 1.9    n puntos= 50
y en x=1/2 exacto            .4375
iteración=     1,  y(x=1/2)=0.007677
iteración=   101,  y(x=1/2)=0.437375
iteración=   201,  y(x=1/2)=0.437397
iteración=   301,  y(x=1/2)=0.437398
iteración=   401,  y(x=1/2)=0.437398
iteración=   501,  y(x=1/2)=0.437398
iteración=   601,  y(x=1/2)=0.437398
iteración=   701,  y(x=1/2)=0.437398
iteración=   801,  y(x=1/2)=0.437398
iteración=   901,  y(x=1/2)=0.437398
iteración=  1001,  y(x=1/2)=0.437398
```

Es evidente la gran influencia que tiene el valor del parámetro de super-relajación ω en la rapidez de la convergencia de las iteraciones.

◄

4.7. Resolución numérica de la ecuación de difusión

En esta sección estudiaremos métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales basados esencialmente en las ideas que discutimos en la sección 4.6 anterior, es decir, basadas en la discretización de las ecuaciones diferenciales para transformarlas en ecuaciones en diferencias (es decir, algebraicas). De forma abreviada, nos referiremos a estos métodos como *métodos en diferencias*. Son muy numerosas las formas de implementar estas ideas en métodos numéricos eficientes [MM94, Ant02]. Discutiremos en secciones separadas los métodos correspondientes a cada una de las tres clases de ecuaciones en derivadas parciales (parabólicas, hiperbólicas y elípticas) dado que los métodos que son apropiados para cada clase suelen tener características comunes. Siendo más precisos, desde un punto de vista computacional, lo más apropiado sería clasificar las ecuaciones en derivadas parciales en dos tipos de ecuaciones:

- Ecuaciones dinámicas, con evolución temporal, tales como las ecuaciones parabólicas e hiperbólicas.

- Ecuaciones estáticas, como son las ecuaciones elípticas.

La distinción desde un punto de vista computacional entre ecuaciones parabólicas e hiperbólicas no es tan importante porque muchos problemas combinan aspectos parabólicos e hiperbólicos y porque, muy a menudo, la resolución de los problemas hiperbólicos conlleva ciertos pasos intermedios en los que hay que resolver problemas parabólicos.

Notación

Empecemos mostrando la notación habitual propia de los métodos numéricos en diferencias. Para ello usaremos un ejemplo concreto. Consideremos la siguiente ecuación en derivadas parciales

(EDP) unidimensional y doblemente inhomogénea

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t)\,, \tag{4.109}$$
$$\text{CC}: \quad \begin{cases} u(0,t) = A(t), \\ u(L,t) = B(t), \end{cases}$$
$$\text{CI}: \quad u(x,0) = f(x).$$

Discretizaremos las funciones $u(x,t)$, $A(t)$, $B(t)$ y $Q(x,t)$ que aparecen en la EDP en la forma que se muestra en la figura 4.13, es decir,

- Δx es el tamaño del paso de discretización de la variable *espacial* x.
- Δt es el tamaño del paso de discretización del variable *temporal* t.
- x_j es la posición dada por $j\Delta x$: $x_j \equiv j\Delta x$.
- t_m es el instante dado por $m\Delta t$: $t_m \equiv m\Delta t$.
- $u_j^{(m)}$ es el valor de la función $u(x,t)$ en la posición x_j en el instante t_m:

$$u(j\Delta x, m\Delta t) \equiv u(x_j, t_m) \equiv u_j^{(m)}.$$

- $U_j^{(m)}$ es la estimación numérica (en general aproximada) del valor exacto $u_j^{(m)}$.
- $Q_j^{(m)}$ es el valor de la función $Q(x,t)$ en la posición x_j en el instante t_m:

$$Q(j\Delta x, m\Delta t) \equiv Q_j^{(m)}.$$

- A_m y B_m son los valores de $A(t)$ y $B(t)$ en t_m, respectivamente.

4.7.1. Un método explícito para ecuaciones difusivas

Describiremos este método aplicándolo a la resolución del siguiente problema difusivo:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{4.110}$$

con

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{4.111}$$

Si $u(x,t)$ fuera un campo de temperaturas, la ecuación anterior describe el problema de la difusión del calor en una barra con extremos a temperatura fija nula y temperatura inicial dada por la función $f(x)$.

Para resolver la anterior ecuación numéricamente hemos de discretizarla, es decir, hemos de hallar la ecuación en diferencias correspondiente mediante la sustitución de los operadores

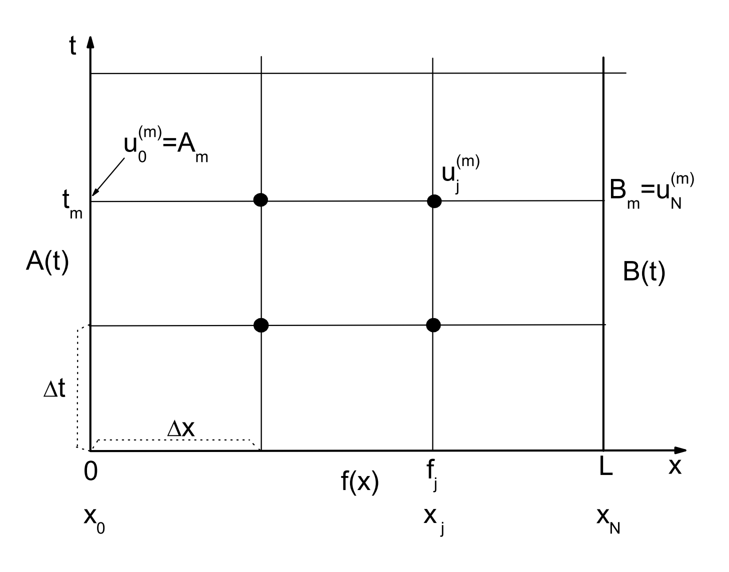


Figura 4.13: Discretizado espacio-temporal para la resolución en diferencias de una ecuación en derivadas parciales unidimensional.

diferenciales por sus equivalentes en diferencias. Por ejemplo, podemos escribir (véase la sección 4.3.1)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x_j,t_m} = \frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} + O(\Delta t),$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x_j,t_m} = \frac{u_{j-1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2.$$

Nótese que en la derivada temporal hemos usado la fórmula discretizada correspondiente a la derivada lateral.[21] En definitiva la ecuación diferencial (4.110) se transforma en al ecuación en diferencias

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = k\,\frac{u_{j-1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + T(x_j,t_m) \tag{4.112}$$

donde $T(x_j,t_m) = O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$ se conoce como error de discretización o error de truncamiento. Las condiciones de contorno y la condición inicial de (4.111) se expresan así:

$$u_0^{(m)} = u(0, m\Delta t) = 0, \tag{4.113}$$

$$u_N^{(m)} = u(L, m\Delta t) = 0, \tag{4.114}$$

$$u_j^{(0)} = u(j\Delta x, 0) = f(j\Delta x) = f(x_j) \equiv f_j. \tag{4.115}$$

Despreciando el error de truncamiento $T(x_j,t_m)$, la ecuación (4.112) se transforma en una expresión aproximada que nos permitirá estimar $u_j^{(m)}$. Como a estas estimaciones las denotamos por $U_j^{(m)}$, la ecuación que obtenemos, tras despreciar $T(x_j,t_m)$, es

$$\frac{U_j^{(m+1)} - U_j^{(m)}}{\Delta t} = k\,\frac{U_{j-1}^{(m)} - 2U_j^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2}. \tag{4.116}$$

[21] ¿Lateral? Aquí sería más natural hablar de derivadas hacia delante o hacia atrás, dado que usualmente tendemos a pensar que el tiempo avanza hacia delante y no hacia los lados. Si aceptamos esto, deberíamos decir que hemos usado una derivada "hacia delante" (o "delantera") de dos puntos.

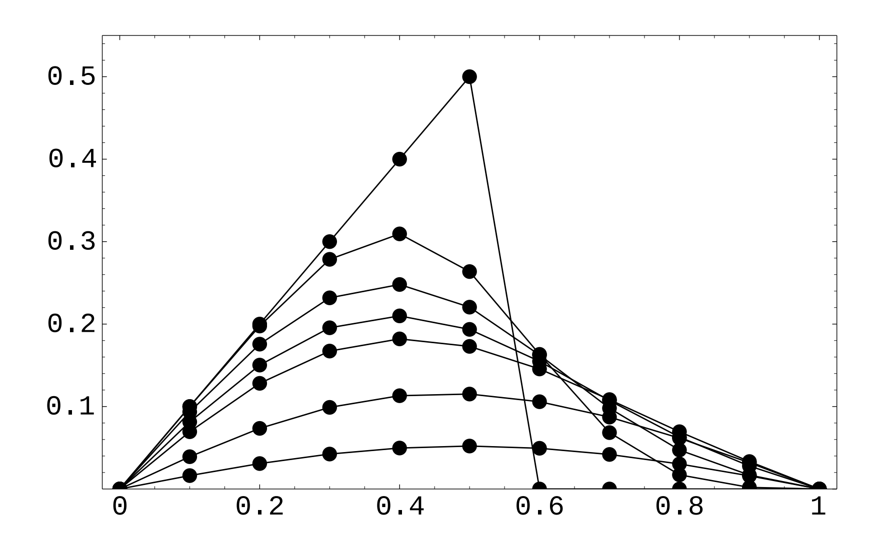


Figura 4.14: Solución numérica mediante el método explícito de la fórmula (4.117) de la EDP (4.118) con $(\Delta t = 0'0025, \Delta x = 0'1)$, es decir, con $S = 1/4$, para $t = 0, 0'01, 0'02, 0'03, 0'04, 0'08, 0'16$.

Esta ecuación la escribiremos de este modo más conveniente:

$$\boxed{U_j^{(m+1)} = U_j^{(m)} + S\left(U_{j-1}^{(m)} - 2U_j^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}\right) \quad \text{con } S = \frac{k\,\Delta t}{(\Delta x)^2}}. \tag{4.117}$$

Esta fórmula, conocida como fórmula en diferencias del *método explícito*, proporciona de forma explícita una estimación de la solución u en el punto (x_j, t_{m+1}), $u(x_j, t_m + \Delta t) = u(x_j, t_{m+1}) \simeq U_j^{(m+1)}$, a partir del valor de U en x_j y en sus dos puntos adyacentes, x_{j-1} y x_{j+1}, en el instante t_m.

Estabilidad: ¿qué valores de Δt y Δx se pueden usar?

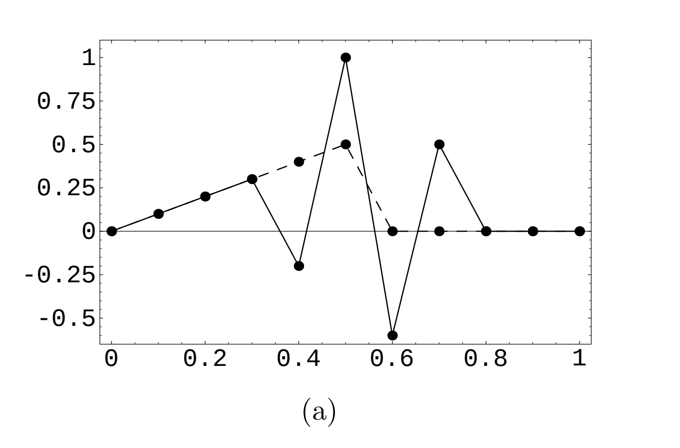
Mostraremos a continuación mediante un ejemplo la importancia de la correcta elección del tamaño del discretizado $(\Delta t, \Delta x)$ cuando se emplea la fórmula (4.117). Para ello vamos a resolver la siguiente EDP:[22]

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \text{CC:} \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ \text{CI:} \quad u(x,0) = \begin{cases} x & \text{para} \quad 0 \le x \le 1/2, \\ 0 & \text{para} \quad 1/2 < x \le 1, \end{cases}\end{gathered} \tag{4.118}$$

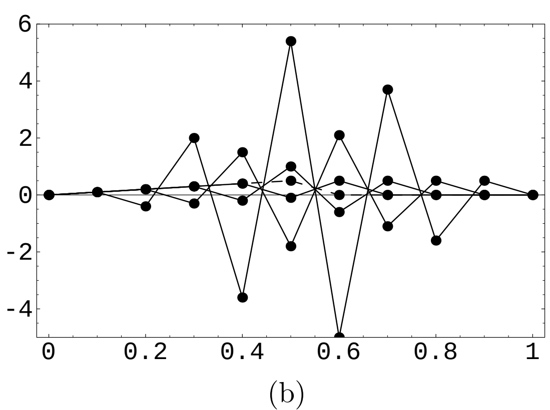
mediante el método explícito, ecuación (4.117), usando diferentes valores de $(\Delta t, \Delta x)$.

- **Primera elección:** $(\Delta t = 0'0025, \Delta x = 0'1)$. En este caso se tiene que el valor del parámetro S de la fórmula (4.117) es igual $S = 1/4$. El resultado de la integración se muestra en la figura 4.14. Se ve que los resultados obtenidos son sensatos.

[22] En [www] hay una práctica en *Mathematica* donde se resuelve este problema de difusión unidimensional.



(a)



(b)

Figura 4.15: Solución numérica mediante el método explícito de la fórmula (4.117) de la EDP (4.118) con $(\Delta t = 0'01, \Delta x = 0'1)$, es decir, con $S = 1$, para (a) $t = 0$ (línea discontinua) y $t = 0'02$ (línea continua) y (b) $t = 0, 0'01, 0'02, 0'03, 0'04$.

▷ ***Ejercicio*** *4.15*

La resolución numérica de (4.118) *mediante el método explícito con* $\Delta t = 0'0025$ *y* $\Delta x = 0'1$ *en el instante* $t = 0'02$ *da el siguiente resultado:*

$(0, 0)$, $(0'1, 0'0935394)$, $(0'2, 0'175665)$, $(0'3, 0'231825)$, $(0'4, 0'248004)$, $(0'5, 0'220543)$, $(0'6, 0'162534)$, $(0'7, 0'0979706)$, $(0'8, 0'0472595)$, $(0'9, 0'0168854)$, $(1, 0)$

donde el par (x, U) *nos proporciona el valor de* U *en la posición* x.
Resuelve la EDP mediante separación de variables y compara la solución analítica para $t = 0'02$ *con los anteriores resultados numéricos.*

- **Segunda elección:** $(\Delta t = 0'01, \Delta x = 0'1)$. En este caso se tiene que $S = 1$. El resultado de la integración se muestra en la figura 4.15.

  No hay duda de que esta solución numérica es completamente errónea. Lo que hemos encontrado es que el método numérico sintetizado en la fórmula (4.117) se vuelve inestable para $S = 1$.

Afortunadamente se sabe bajo qué circunstancias el método que hemos expuesto es estable. Es posible demostrar [Hab83, sección 13.3.4] (véase también el problema 4.16) que el método explícito (4.117) es estable si

$$S \leq \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{(N-1)\,\pi}{N}\right)}. \tag{4.119}$$

Esta condición se conoce como criterio de estabilidad de von Neumann. Dado que $1 - \cos\left((N-1)\pi/N\right)$ es siempre menor o igual que 2 (la igualdad se da para $N \to \infty$), podemos asegurar que, a fortiori, el método es estable siempre que

$$S \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 - \cos\left(\frac{(N-1)\,\pi}{N}\right)}. \tag{4.120}$$

Es decir, podría ocurrir que el procedimiento sea estable incluso para $S > 1/2$ si

$$S < \left[1 - \cos\left(\frac{(N-1)\,\pi}{N}\right)\right]^{-1},$$

pero lo que es siempre cierto es que el algoritmo será estable si $S \leq 1/2$.

Vale la pena notar que si se escoge $S = 1/2$, la fórmula (4.117) se reduce a

$$\boxed{U_j^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[U_{j-1}^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}\right]}\,. \tag{4.121}$$

Esta fórmula es bien fácil de recordar: la temperatura (solución) en el instante $t_{m+1} = t_m + \Delta t$ en un punto x_j es igual al valor medio de la temperatura de sus vecinos en el instante anterior t_m.

Eficiencia-coste

Nótese que la condición $S = k\,\Delta t/(\Delta x)^2 \leq 1/2$ implica que el valor de Δt que elijamos debe verificar que

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2k}, \tag{4.122}$$

es decir, si discretizamos finamente la posición para alcanzar una buena precisión, esto es, si escogemos Δx pequeño, resulta entonces que Δt es muy, muy pequeño, por lo que avanzar en el tiempo con saltos tan diminutos resulta computacionalmente muy costoso. Esto además puede conducir a pérdida de precisión por acumulación de errores de redondeo.

EDP no homogénea

La generalización del método explícito que acabamos de ver a ecuaciones diferenciales parciales no homogéneas[23] es inmediata. Es fácil ver que la versión discretizada de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t),\\
\text{CC:}\quad &\begin{cases} u(0,t) = A(t),\\ u(L,t) = B(t),\end{cases}\\
\text{CI:}\quad & u(x,0) = f(x),
\end{aligned}$$

vendría dada por

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} = k\frac{u_{j-1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + Q(j\Delta x, m\Delta t) + T(x_j, t_m)$$

con

$$u_0^{(m)} = A(m\Delta t), \tag{4.123}$$
$$u_N^{(m)} = B(m\Delta t), \tag{4.124}$$
$$u_j^{(0)} = f(j\Delta x). \tag{4.125}$$

Procediendo como en la página 252 deduciríamos aquí una fórmula similar a la fórmula (4.117) la cual nos permitiría obtener $U_j^{(m+1)}$ a partir de $U_{j\pm1}^{(m)}$ y $U_j^{(m)}$.

▷ ***Ejercicio** 4.16*

Escríbase esta fórmula explícitamente.

[23]Nótese que son doblemente inhomogéneas: inhomogéneas en la ecuación y en las condiciones de contorno.

Para estos problemas no homogéneos se sigue verificando el criterio de estabilidad dado por $S = k\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1/2$.

► *Ejemplo 4.15*

En este ejemplo damos un programa `QBASIC` que resuelve numéricamente mediante el método explícito la ecuación[24]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con } k = 1,$$

junto con condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y la condición inicial

$$u(x,0) = \texttt{fnexacta}(\texttt{x},0) = \left[\mathrm{e}^{-20\,(x-1/2)^2} - \mathrm{e}^{-20\,(x-3/2)^2} - \mathrm{e}^{-20\,(x+1/2)^2}\right].$$

La solución exacta de este problema es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[\mathrm{e}^{-20\,(x-1/2)^2/\tau} - \mathrm{e}^{-20\,(x-3/2)^2/\tau} - \mathrm{e}^{-20\,(x+1/2)^2/\tau}\right]$$

con $\tau = 1 + 80t$. El programa es el siguiente:

```
'Programa EDPEXPLI.BAS
DEF fngauss (x, t) = EXP(-20 * (x - .5) ^ 2 / (1 + 80 * t)) / SQR(1 + 80 * t)
DEF fnexacta (x, t) = fngauss(x, t) - fngauss(x - 1, t) - fngauss(x + 1, t)
n = 30  'numero de puntos (escojase par)
DIM u(n)
CLS
ix = 1 / n
dt = .0005        ' dt=discretizado temporal
itmax = 200       ' numero maximo de iteraciones
saltot = 40       ' mostraremos los resultados cada saltot iteraciones
s = dt / ix ^ 2   ' parametro S
PRINT "numero de puntos="; n
PRINT "dx="; ix;
PRINT ",   dt="; dt;
PRINT ",    S="; s
PRINT "numero de saltos="; itmax; ", t final="; itmax * dt
PRINT
t = 0
u(0) = 0: u(n) = 0
FOR i = 1 TO n - 1
     u(i) = fnexacta(i * ix, 0)
NEXT i
PRINT "Errores en el punto medio para varios tiempos:"
FOR it = 1 TO itmax
     uvieja = 0
     FOR i = 1 TO n - 1
         unueva = u(i) + s * (uvieja + u(i + 1) - 2 * u(i))
         uvieja = u(i)
         u(i) = unueva
     NEXT i
     IF it MOD saltot = 0 THEN
        t = dt * it
        dif = fnexacta(ix * n / 2, t) - u(n / 2)
        PRINT USING "tiempo=#.######, error=#.#########"; t; dif
```

[24]Pueden verse más detalles en [Koo86].

```
     END IF
NEXT it
PRINT
PRINT USING "Valores en varias posiciones en t=#.######"; t
FOR i = 1 TO n - 1
IF i MOD 5 = 0 THEN
     exacto = fnexacta(i * ix, t)
     PRINT USING "u(##)=#.####^^^^,  exacta=#.####^^^^"; i; u(i); exacto
END IF
NEXT i
```

Los resultados obtenidos con el programa para distintas elecciones de Δx y Δt son:

1. $\Delta x = 1/30$ y $\Delta t = 0'005$ (y por tanto $S = 0'45$):

```
numero de puntos= 30
dx= 3.333334E-02 ,   dt= .0005 ,    S= .45
numero de saltos= 200 , t final= .1

Errores en el punto medio para varios tiempos:
tiempo=0.020000, error=0.001334429
tiempo=0.040000, error=0.000661522
tiempo=0.060000, error=0.000449330
tiempo=0.080000, error=0.000396758
tiempo=0.100000, error=0.000313401

Valores en varias posiciones en t=0.100000
u( 5)=0.1303E+00,  exacta=0.1298E+00
u(10)=0.2258E+00,  exacta=0.2260E+00
u(15)=0.2608E+00,  exacta=0.2611E+00
u(20)=0.2258E+00,  exacta=0.2260E+00
u(25)=0.1303E+00,  exacta=0.1298E+00
```

   Los resultados son bastante buenos, siendo el error del orden esperado.

2. $\Delta x = 1/30$ y $\Delta t = 0'001$ (y por tanto $S = 0'9$):

```
numero de puntos= 30
dx= 3.333334E-02 ,   dt= .001 ,    S= .9
numero de saltos= 100 , t final= .1

Errores en el punto medio para varios tiempos:
tiempo=0.020000, error=1.983485937
tiempo=0.040000, error=%0.439629824E+09
tiempo=0.060000, error=%0.814366000E+17
tiempo=0.080000, error=%0.148818889E+26
tiempo=0.100000, error=%0.272760126E+34

Valores en varias posiciones en t=0.100000
u( 5)=-.8610E+33,  exacta=0.1298E+00
u(10)=0.1859E+34,  exacta=0.2260E+00
u(15)=-.2728E+34,  exacta=0.2611E+00
u(20)=0.2819E+34,  exacta=0.2260E+00
u(25)=-.1785E+34,  exacta=0.1298E+00
```

   En este caso el parámetro S es mayor que $1/2$ y la solución numérica es completamente errónea.

◄

Otro método explícito: Método de Richardson

Este método *pretende* mejorar al método explícito anterior disminuyendo el error de discretizado que se comete al evaluar la derivada temporal. Para ello, se sustituye la derivada (temporal) "delantera" de dos puntos (véase la nota al pie de la página 251) por la fórmula de diferencias centrales de dos puntos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m-1)}}{2\Delta t} + O(\Delta t)^2,$$

de modo que ahora el error de discretización es de orden $(\Delta t)^2$ [véase la fórmula (4.14) en la página 212]. Usando esta relación, la ecuación de difusión discretizada (en diferencias) queda

$$\frac{U_j^{(m+1)} - U_j^{(m-1)}}{2\Delta t} = k\,\frac{U_{j-1}^{(m)} - 2U_j^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2},$$

obteniéndose la siguiente ecuación explícita:

$$U_j^{(m+1)} = U_j^{(m-1)} + \frac{2k\Delta t}{(\Delta x)^2}\left(U_{j-1}^{(m)} - 2U_j^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}\right),$$

La idea que hemos expuesto parece muy buena pero, desafortunadamente, este método numérico tiene un "pequeño" problema: es *siempre inestable* por lo que no ha de usarse nunca. Esto puede demostrarse mediante un análisis de estabilidad de von Neumann (véase el problema 4.18 y la referencia [Hab83, sec. 13.3.4]).

4.7.2. El método implícito de Crank-Nicholson

En el método explícito (por supuesto, no en el de Richardson) que hemos visto en la sección anterior, discretizábamos la EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

aproximando la derivada temporal por la derivada "frontal" en diferencias de dos puntos:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_j,t_m)} \simeq \frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t}.$$

Desde luego, lo más natural es interpretar

$$\frac{u_j^{(m+1)} - u_j^{(m)}}{\Delta t} \tag{4.126}$$

como la fórmula "frontal" en diferencias de la primera derivada de $u(x,t)$ en el punto (x_j, t_m) de dos puntos. Sin embargo, es posible interpretar la fórmula (4.126) de otro modo: podemos ver la fórmula como la *derivada* central *en diferencias de tres puntos* de $u(x,t)$ con respecto a t evaluada en el punto *intermedio* $(x_j, t_m + \Delta t/2)$. Es decir,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\left(x_j,t_m+\frac{\Delta t}{2}\right)} = \frac{u(x_j, t_m+\Delta t) - u(x_j,t_m)}{\Delta t} + O(\Delta t/2)^2. \tag{4.127}$$

Para completar la discretización de la EDP en este punto intermedio debemos proporcionar la derivada segunda *espacial* en este punto intermedio. ¿Cómo hacerlo si sólo sabemos de $u(x,t)$ en los puntos no intermedios (x_j, t_m)? Un modo bastante natural de resolver este problema es

estimar esta derivada espacial mediante una interpolación o mezcla lineal de la derivada segunda de u con respecto a x en t_m y la derivada segunda de u con respecto a x en $t_m + \Delta t$:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\left(x_j, t_m + \frac{\Delta t}{2}\right)} \simeq \lambda \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_j, t_m + \Delta t)} + (1-\lambda) \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_j, t_m)}. \tag{4.128}$$

Aquí λ es el coeficiente que pondera la mezcla. Usando la fórmula de diferencias centrales de tres puntos se tiene que

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\left(x_j, t_m + \frac{\Delta t}{2}\right)} \simeq \lambda \left[\frac{u_{j-1}^{(m+1)} - 2u_j^{(m+1)} + u_{j+1}^{(m+1)}}{(\Delta x)^2}\right] + (1-\lambda)\left[\frac{u_{j-1}^{(m)} - 2u_j^{(m)} + u_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2}\right]. \tag{4.129}$$

En definitiva la EDP se discretiza en $(x_j, t_m + \Delta t/2)$ mediante la relación

$$\frac{U_j^{(m+1)} - U_j^{(m)}}{\Delta t} = k\,\lambda \left[\frac{U_{j-1}^{(m+1)} - 2U_j^{(m+1)} + U_{j+1}^{(m+1)}}{(\Delta x)^2}\right] + k\,(1-\lambda)\left[\frac{U_{j-1}^{(m)} - 2U_j^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2}\right].$$

Habitualmente se toma $\lambda = \frac{1}{2}$ (en este caso el método se llama de Crank-Nicholson) y la ecuación queda

$$-S\,U_{j-1}^{(m+1)} + 2(1+S)\,U_j^{(m+1)} - S\,U_{j+1}^{(m+1)} = S\,U_{j-1}^{(m)} + 2(1-S)\,U_j^{(m)} + S\,U_{j+1}^{(m)} \tag{4.130}$$

donde

$$S = \frac{k\,\Delta t}{(\Delta x)^2}.$$

Puede probarse sin mucha dificultad [MM94] que, en este caso, el error de truncamiento $T(x_j, t_m)$ es la suma de dos términos: uno de orden $(\Delta x)^2$ y otro de orden $(\Delta t)^2$.

Es fácil ver que si la EDP fuera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x,t),$$

la ecuación en diferencias sería

$$\begin{aligned} -S\,U_{j-1}^{(m+1)} + 2(1+S)\,U_j^{(m+1)} - S\,U_{j+1}^{(m+1)} =& S\,U_{j-1}^{(m)} + 2(1-S)\,U_j^{(m)} + S\,U_{j+1}^{(m)} \\ &+ 2\Delta t\,Q(x_j, t_m + \Delta t/2) \end{aligned} \tag{4.131}$$

Este método tiene la ventaja de que es *estable para todo* S [Hab83, MM94]. Además, recordemos que para que el método explícito fuera estable Δt tenía que ser, como poco, de orden de $(\Delta x)^2$ pues $\Delta t = S(\Delta x)^2/k$ con $S \leq 1/2$. Dado que el error de truncamiento $T(x_j, t_m)$ en este caso venía dado por $O(\Delta t) + O(\Delta x)^2$, resultaba que el tamaño de paso Δt debía de ser muy pequeño [del orden de $(\Delta x)^2$] para que el error de truncamiento fuera de orden $(\Delta x)^2$. En el método de Crank-Nicholson el error de discretización es $O(\Delta t)^2 + O(\Delta x)^2$, por lo que podemos tomar un Δt más grande (del orden de Δx) y aún así tener un error de truncamiento pequeño [de orden $(\Delta x)^2$].

Una desventaja del método implícito es que el cálculo de U en el instante t_{m+1} a partir U en el instante anterior, t_m, es mucho menos simple que en el método explícito pues es preciso resolver el sistema algebraico (4.131). Sin embargo, desde el punto de vista práctico, esta desventaja no es muy relevante porque (4.131) es un sistema tridiagonal y puede resolverse mediante el llamado algoritmo de Thomas de un modo muy *eficiente*.

Algoritmo de Thomas

El sistema (4.131) puede escribirse de este modo más compacto

$$a_j^- \, U_{j-1}^{(m+1)} + a_j^0 \, U_j^{(m+1)} + a_j^+ \, U_{j+1}^{(m+1)} = b_j^{(m+1)} \,, \quad j = 1, \ldots, N-1 \tag{4.132}$$

cuando las condiciones de contorno de la EDP son de Dirichlet (es decir, cuando no involucran a ninguna derivada). En este caso $U_0^{(m)}$ y $U_N^{(m)}$ están bien determinados para todo m (es decir, para todo instante). Es posible demostrar [Koo86, sección 7.2][MM94, Sec. 2.9] que la solución $U_j^{(m+1)}, j = 1, \ldots, N-1$ del sistema tridiagonal (4.132) puede obtenerse mediante la fórmula

$$U_{j+1}^{(m+1)} = \alpha_j^{(m+1)} U_j^{(m+1)} + \beta_j^{(m+1)} \,.$$

Para simplificar la notación escribiremos esta relación sin superíndice temporal así:

$$U_{j+1} = \alpha_j U_j + \beta_j, \tag{4.133a}$$

pero no debe olvidarse que α_j y β_j pueden depender del tiempo t_m. Los valores de α_j y β_j vienen dados por

$$\begin{aligned} \alpha_{j-1} &= \gamma_j a_j^- \\ \beta_{j-1} &= \gamma_j (a_j^+ \beta_j - b_j), \end{aligned} \tag{4.133b}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_j &= -\frac{1}{a_j^0 + a_j^+ \alpha_j}, \\ \alpha_{N-1} &= 0, \\ \beta_{N-1} &= U_N. \end{aligned} \tag{4.133c}$$

Este procedimiento, que se conoce como algoritmo de Thomas, es estable si la matriz tridiagonal es diagonalmente dominante, es decir, si [MM94, Sec. 2.9]

$$a_j^- < 0, \quad a_j^0 > 0, \quad a_j^+ < 0 \quad \text{y} \quad a_j^0 > |a_j^-| + |a_j^+|$$

Los coeficientes de (4.131), $a_j^- = a_j^+ = -S$, $a_j^0 = 2(1+S)$, satisfacen obviamente estas condiciones.

► *Ejemplo 4.16*

En este ejemplo vamos a usar un programa `QBASIC` para calcular mediante el método implícito de Crank-Nicholson la solución numérica de la ecuación[25]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{con } k = 1,$$

con condiciones de contorno $u(0,t) = u(1,t) = 0$ y condición inicial

$$u(x,0) = \texttt{fnexacta(x,0)} = \left[\mathrm{e}^{-20\,(x-1/2)^2} - \mathrm{e}^{-20\,(x-3/2)^2} - \mathrm{e}^{-20\,(x+1/2)^2} \right].$$

La solución exacta de este problema es

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left[\mathrm{e}^{-20\,(x-1/2)^2/\tau} - \mathrm{e}^{-20\,(x-3/2)^2/\tau} - \mathrm{e}^{-20\,(x+1/2)^2/\tau} \right]$$

con $\tau = 1 + 80t$.

[25] Pueden verse más detalles en [Koo86].

```
'Programa EDPCRANK
DEF fngauss (x, t) = EXP(-20 * (x - .5) ^ 2 / (1 + 80 * t)) / SQR(1 + 80 * t)
DEF fnexacta (x, t) = fngauss(x, t) - fngauss(x - 1, t) - fngauss(x + 1, t)
CLS
n = 30  'numero de puntos (escojase par)
DIM u(n), alfa(n), beta(n), gamma(n), b(n)
ix = 1 / n
dt = .01      ' dt=constante difusiva*discretizado temporal
itmax = 10     ' numero maximo de iteraciones
saltot = 2    ' mostraremos los resultados cada saltot iteraciones
s = dt / ix ^ 2
PRINT "dt="; dt; ",      dx"; ix; ",    S="; s
PRINT "numero de pasos="; itmax; ",   t final="; itmax * dt
PRINT
PRINT "Errores en punto medio para varios tiempos:"
t = 0
u(0) = 0: u(n) = 0
FOR i = 1 TO n - 1
    u(i) = fnexacta(i * ix, 0)
NEXT i
amas = -s: amenos = amas: acero = 2 + 2 * s
alfa(n - 1) = 0: gamma(n - 1) = -1 / acero
FOR i = n - 1 TO 1 STEP -1
    alfa(i - 1) = gamma(i) * amenos
    gamma(i - 1) = -1 / (acero + amas * alfa(i - 1))
NEXT i

FOR it = 1 TO itmax
    beta(n - 1) = u(n)
    FOR i = n - 1 TO 1 STEP -1
        b(i) = s * u(i - 1) + 2 * (1 - s) * u(i) + s * u(i + 1)
        beta(i - 1) = gamma(i) * (amas * beta(i) - b(i))
    NEXT i
    u(0) = 0
    FOR i = 1 TO n - 1
        u(i + 1) = alfa(i) * u(i) + beta(i)
    NEXT i
    IF it MOD saltot = 0 THEN
    t = dt * it
    dif = fnexacta(ix * n / 2, t) - u(n / 2)
    PRINT USING "tiempo=#.######, error=#.#########"; t; dif
    END IF
NEXT it
PRINT
PRINT USING "Valores para varias posiciones en el tiempo=#.######"; t
    FOR i = 1 TO n - 1
        IF i MOD 5 = 0 THEN
        exacto = fnexacta(i * ix, t)
    PRINT USING "u(##)=#.####^^^^,  exacta=#.####^^^^"; i; u(i); exacto
    END IF
NEXT i
```

Los resultados obtenidos con el programa para distintas elecciones de Δx y Δt son:

1. $\Delta x = 1/30$ y $\Delta t = 0'0005$ (luego $S = 0'45$):

```
dt= .0005 ,      dx 3.333334E-02 ,    S= .45
```

```
numero de pasos= 200 ,   t final= .1

Errores en punto medio para varios tiempos:
tiempo=0.020000, error=-.000533998
tiempo=0.040000, error=0.002127796
tiempo=0.060000, error=0.005351275
tiempo=0.080000, error=0.007616609
tiempo=0.100000, error=0.008715063

Valores para varias posiciones en el tiempo=0.100000
u( 5)=0.1127E+00,  exacta=0.1298E+00
u(10)=0.2123E+00,  exacta=0.2260E+00
u(15)=0.2524E+00,  exacta=0.2611E+00
u(20)=0.2215E+00,  exacta=0.2260E+00
u(25)=0.1287E+00,  exacta=0.1298E+00
```

2. $\Delta x = 1/30$ y $\Delta t = 0'001$ (luego $S = 0'9$):

```
dt= .001 ,      dx 3.333334E-02 ,    S= .9
numero de pasos= 100 ,   t final= .1

Errores en punto medio para varios tiempos:
tiempo=0.020000, error=-.000491738
tiempo=0.040000, error=0.002137989
tiempo=0.060000, error=0.005351812
tiempo=0.080000, error=0.007614762
tiempo=0.100000, error=0.008712739

Valores para varias posiciones en el tiempo=0.100000
u( 5)=0.1127E+00,  exacta=0.1298E+00
u(10)=0.2123E+00,  exacta=0.2260E+00
u(15)=0.2524E+00,  exacta=0.2611E+00
u(20)=0.2215E+00,  exacta=0.2260E+00
u(25)=0.1287E+00,  exacta=0.1298E+00
```

3. $\Delta x = 1/30$ y $\Delta t = 0'01$ (luego $S = 9$):

```
dt= .01 ,      dx 3.333334E-02 ,    S= 8.999999
numero de pasos= 10 ,   t final= 9.999999E-02

Errores en punto medio para varios tiempos:
tiempo=0.020000, error=0.004702628
tiempo=0.040000, error=0.003842652
tiempo=0.060000, error=0.005907238
tiempo=0.080000, error=0.007922173
tiempo=0.100000, error=0.008969218

Valores para varias posiciones en el tiempo=0.100000
u( 5)=0.1126E+00,  exacta=0.1298E+00
u(10)=0.2120E+00,  exacta=0.2260E+00
u(15)=0.2521E+00,  exacta=0.2611E+00
u(20)=0.2214E+00,  exacta=0.2260E+00
u(25)=0.1286E+00,  exacta=0.1298E+00
```

Nótese que Δt es igual a $0'01$ en este último caso por lo que el instante $t = 0'1$ se alcanza tras

sólo 10 pasos. Es instructivo comparar estos resultados con los del caso de la página 256 en donde se usaba el método explícito con $\Delta t = 0'0005$ y $\Delta x = 1/30$. Allí se necesitaron 200 pasos para evaluar $u(x,t)$ en el instante $t = 0'1$ y, sin embargo, los resultados son similares a los obtenidos mediante el método de Crank-Nicholson en el que Δt es *veinte* veces mayor.

◀

4.7.3. Condiciones de contorno que involucran a la derivada

En los apartados anteriores discutimos el modo de resolver EDPs mediante un método explícito e implícito cuando en las condiciones de contorno no aparecía ninguna derivada (espacial, por supuesto). Cuando en las condiciones de contorno aparece alguna derivada (condiciones de contorno de Neumann), los procedimientos anteriores no se pueden aplicar sin más. En este apartado discutiremos cómo proceder en estos casos.

Por concretar, supongamos que la condición de contorno en $x = a$ (a la izquierda) es

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = A(t).$$

Expresamos esta condición diferencial en forma de diferencias mediante la fórmula de la derivada central de tres puntos:

$$\frac{U_1^{(m)} - U_{-1}^{(m)}}{2\Delta x} = A(t_m) \equiv A_m.$$

Luego la solución estimada U en el punto ficticio $x_{-1} = a - \Delta x$ viene dada por

$$U_{-1}^{(m)} = U_1^{(m)} - 2\Delta x\, A_m. \tag{4.134}$$

Podemos usar esta relación junto con la derivada lateral derecha ("delantera") de dos puntos en el tiempo y la central de tres puntos en el espacio[26] para obtener $U_0^{(m+1)}$ en términos de $U_{-1}^{(m)}, U_0^{(m)}$ y $U_1^{(m)}$:

$$U_0^{(m+1)} = U_0^{(m)} + S\left(U_1^{(m)} - 2U_0^{(m)} + U_{-1}^{(m)}\right).$$

Insertando la relación (4.134) en esta ecuación se obtiene

$$U_0^{(m+1)} = U_0^{(m)} + S\left(U_1^{(m)} - 2U_0^{(m)} + U_1^{(m)} - 2\Delta x\, A_m\right). \tag{4.135}$$

Esta fórmula nos permite conocer $U_0^{(m)}$ en todo instante. De este modo hemos conseguido reducir nuestra condición de contorno de Neumann a una condición de contorno de Dirichlet y, por tanto, podemos así aplicar los métodos tal como se discutieron en los apartados anteriores.

▷ ***Ejercicio*** *4.17*

Supón que la condición de contorno en $x = 0$ *es*

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x=0,t)} = A(t).$$

Escribe para este caso la relación equivalente a (4.134) *y* (4.135).

[26]Esto es equivalente a decir que usamos el método explícito para hallar los valores de u sobre la frontera.

4.7.4. Ecuaciones difusivas bidimensionales

Los procedimientos numéricos para resolver esta clase de ecuaciones bidimensionales (o de dimensión aún mayor) no difieren esencialmente de los que hemos estudiado en la sección anterior para el caso unidimensional.

La ecuación de difusión en dos dimensiones es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2}\right). \tag{4.136}$$

Discretizamos la región en donde se busca la solución de la EDP utilizando separaciones de tamaño $\Delta x, \Delta y, \Delta t$. Denotaremos por $u_{j,l}^{(m)}$ al valor de la solución $u(x,y,t)$ en los nudos ($x_j = j\Delta x, y_l = l\Delta y, t_m = m\Delta t$):

$$u_{j,l}^{(m)} \equiv u(j\Delta x, l\Delta y, m\Delta t), \quad j = 0,\ldots,N_x, \quad l = 0,\ldots,N_y \tag{4.137}$$

y por $U_{j,l}^{(m)}$ a la estimación numérica del valor exacto $u_{j,l}^{(m)}$.

Nos limitaremos en esta sección a describir un método explícito para resolver la anterior ecuación diferencial. Empezamos discretizando la EDP usando la derivada lateral derecha (o delantera) de dos puntos para la derivada en t y derivadas centrales tres puntos en x e y para las derivadas segundas espaciales:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(x_j,y_l,t_m)} &= \frac{u_{j-1,l}^{(m)} - 2u_{j,l}^{(m)} + u_{j+1,l}^{(m)}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2,\\
\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(x_j,y_l,t_m)} &= \frac{u_{j,l-1}^{(m)} - 2u_{j,l}^{(m)} + u_{j,l+1}^{(m)}}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2,\\
\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x_j,y_l,t_m)} &= \frac{u_{j,l}^{(m+1)} - u_{j,l}^{(m)}}{\Delta t} + O(\Delta t).
\end{aligned}$$

La versión discretizada de la EDP es por tanto

$$\frac{U_{j,l}^{(m+1)} - U_{j,l}^{(m)}}{\Delta t} = \frac{k}{(\Delta x)^2}[U_{j-1,l}^{(m)} - 2U_{j,l}^{(m)} + U_{j+1,l}^{(m)}] + \frac{k}{(\Delta y)^2}[U_{j,l-1}^{(m)} - 2U_{j,l}^{(m)} + U_{j,l+1}^{(m)}], \tag{4.138}$$

de donde se deduce que

$$U_{j,l}^{(m+1)} - U_{j,l}^{(m)} = \frac{k\Delta t}{(\Delta x)^2}[U_{j-1,l}^{(m)} - 2U_{j,l}^{(m)} + U_{j+1,l}^{(m)}] + \frac{k\Delta t}{(\Delta y)^2}[U_{j,l-1}^{(m)} - 2U_{j,l}^{(m)} + U_{j,l+1}^{(m)}],$$

Si hacemos $\Delta x = \Delta y$, se tiene que

$$\boxed{U_{j,l}^{(m+1)} = U_{j,l}^{(m)} + S\left[U_{j+1,l}^{(m)} + U_{j-1,l}^{(m)} + U_{j,l-1}^{(m)} + U_{j,l+1}^{(m)} - 4U_{j,l}^{(m)}\right]} \tag{4.139}$$

donde $S = k\,\Delta t/(\Delta x)^2$.

Resulta que este método explícito es estable cuando $S \leq 1/4$. Si tomamos el valor $S = 1/4$, la ecuación anterior se transforma en

$$\boxed{U_{j,l}^{(m+1)} = \frac{U_{j+1,l}^{(m)} + U_{j-1,l}^{(m)} + U_{j,l-1}^{(m)} + U_{j,l+1}^{(m)}}{4}}. \tag{4.140}$$

Es decir, la temperatura en el instante $t_{m+1} = t_m + \Delta t$ en un punto x_j es igual al valor medio de la temperatura de sus vecinos en el instante anterior t_m.[27]

▷ ***Ejercicio** 4.18*

Generaliza las fórmulas de esta sección para el caso de ecuaciones difusivas tridimensionales.

4.8. Resolución numérica de la ecuación de ondas

Nos centraremos en la ecuación de ondas unidimensional. La generalización a otras dimensiones es inmediata. Sea la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.141}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{x,t=0} &= g(x). \end{aligned} \tag{4.142}$$

Procediendo como en las secciones anteriores, es fácil obtener la ecuación discretizada correspondiente a la EDP (4.141) en el punto (x_j, t_m):

$$\frac{U_j^{(m-1)} - 2U_j^{(m)} + U_j^{(m+1)}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{U_{j-1}^{(m)} - 2U_j^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}}{(\Delta x)^2}.$$

es decir

$$\boxed{U_j^{(m+1)} = 2U_j^{(m)} - U_j^{(m-1)} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\left[U_{j-1}^{(m)} - 2U_j^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}\right]}. \tag{4.143}$$

Los errores cometidos en la discretización son de orden $(\Delta x)^2$ y $(\Delta t)^2$ porque hemos usado la fórmula de la derivada segunda central de tres puntos.

En la ecuación (4.143), para calcular $U_j^{(m+1)}$ es necesario conocer U_{j-1}, U_j y U_{j+1} en los dos instantes inmediatamente anteriores t_m y t_{m-1}. En particular, para calcular $U_j^{(1)}$ es preciso conocer $U_{j-1}^{(0)}$, $U_j^{(0)}$, $U_{j+1}^{(0)}$, $U_{j-1}^{(-1)}$, $U_j^{(-1)}$, y $U_{j+1}^{(-1)}$. Para estimar estos tres últimos puntos *ficticios* procedemos de un modo similar al llevado a cabo en la sección 4.7.3 para implementar las condiciones de contorno que involucraban derivadas, aunque ahora la derivada primera es sobre el tiempo y en la sección 4.7.3 era sobre el espacio. Esta no es una diferencia conceptual importante. Procediendo como entonces, escribimos las ecuaciones discretizadas de las condiciones iniciales (4.142) así:

$$U_j^{(0)} = f(x_j), \tag{4.144a}$$

$$\frac{U_j^{(1)} - U_j^{(-1)}}{2\Delta t} = g(x_j). \tag{4.144b}$$

[27] En `www` hay un cuaderno de *Mathematica* que trata sobre la resolución numérica de un problema difusivo bidimensional.

En la última ecuación hemos usado la fórmula de la derivada primera central de tres puntos para que el error sea, como en la ecuación (4.143), de orden $(\Delta t)^2$. Las ecuaciones (4.144) cuando se introducen en la ecuación de discretización (4.143) para $t = 0$,

$$U_j^{(1)} = 2U_j^{(0)} - U_j^{(-1)} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\left[U_{j-1}^{(0)} - 2U_j^{(0)} + U_{j+1}^{(0)}\right], \tag{4.145}$$

dan lugar a la ecuación

$$U_j^{(1)} = f(x_j) + g(x_j)\Delta t + \frac{c^2(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2}\left[U_{j-1}^{(0)} - 2U_j^{(0)} + U_{j+1}^{(0)}\right], \tag{4.146}$$

la cual permite calcular $U_j^{(1)}$ a partir de las condiciones iniciales (4.142). Para calcular $U_j^{(m)}$ si $m \geq 2$ basta con la aplicación directa de la fórmula explícita (4.143). No es difícil demostrar (véase la sección 13.5 de [Hab83]) que esta fórmula explícita es estable siempre que (criterio de estabilidad de Courant, Friedrichs y Lewy[28])

$$c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Esto significa que la velocidad de propagación del método de integración debe ser mayor que la velocidad de la onda para que haya estabilidad.

4.9. Resolución numérica de la ecuación de Laplace

En lo que sigue nos centraremos en la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$, aunque debiera ser evidente cómo generalizar los resultados que siguen a la ecuación de Poisson $\nabla^2 u = \rho(\vec{r})$.

La ecuación de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \tag{4.147}$$

suele acompañarse de condiciones de contorno en las que se especifica el valor de u sobre la frontera cerrada. Para el caso bidimensional y procediendo como en la sección anterior 4.7.4, es fácil ver que la versión discretizada de (4.147) viene dada por [véase (4.138)]

$$\frac{U_{j-1,l} - 2U_{j,l} + U_{j+1,l}}{(\Delta x)^2} + \frac{U_{j,l-1} - 2U_{j,l} + U_{j,l+1}}{(\Delta y)^2} = 0.$$

Si $\Delta x = \Delta y$, se tiene que

$$\frac{U_{j+1,l} + U_{j-1,l} + U_{j,l-1} + U_{j,l+1} - 4U_{j,l}}{(\Delta x)^2} = 0, \tag{4.148}$$

es decir,

$$U_{j,l} = \frac{1}{4}\left[U_{j+1,l} + U_{j-1,l} + U_{j,l-1} + U_{j,l+1}\right] \tag{4.149}$$

donde $j = 0, \cdots, N_x$ y $l = 0, \cdots, N_y$. Esto constituye un sistema lineal de ecuaciones que, en principio, puede resolverse por métodos de tipo estándar. Pero nótese que el número de ecuaciones y de incógnitas es del orden de $N_x \times N_y$ [exactamente de $(N_x+1)\times(N_y+1)$ ecuaciones e incognitas] por lo que, incluso si el discretizado no es muy fino (es decir, si N_x y N_y no son muy grandes) el sistema de ecuaciones puede ser demasiado grande como para ser resuelto de un modo efectivo.

[28] R. Courant, K. O. Friedrichs y H. Lewy, *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann. (1928) **100**, 32

Esto es especialmente grave para medios tridimensionales: por ejemplo, para un discretizado de tan sólo $N_x = N_y = N_z = 10$, el sistema resultante tendría más de 1000 ecuaciones e incógnitas. En las secciones siguientes vamos a ver métodos alternativos en los que la solución final se alcanza tras sucesivas aproximaciones o iteraciones. La similitud de estos procedimientos con los de la sección 4.6.3 no es casual: uno puede entender los problemas de condiciones de contorno de la sección 4.6.3 como versiones unidimensionales de las ecuaciones de Poisson.

▷ ***Ejercicio*** *4.19*

1. *Escríbase la ecuación equivalente a* (4.149) *para el caso tridimensional.*
2. *Obtén las fórmulas de esta sección si la ecuación es de Poisson.*

4.9.1. Métodos iterativos

Método de Jacobi

Este en un método iterativo que, en comparación con los métodos de Gauss-Seidel y superrelajación que se discuten más adelante, converge lentamente. Su utilidad es por tanto más bien pedagógica por ser punto de partida para la discusión de métodos más eficientes.

Partimos de la ecuación de Laplace discretizada (4.149):

$$U_{j,l} = \frac{U_{j+1,l} + U_{j-1,l} + U_{j,l-1} + U_{j,l+1}}{4}. \tag{4.150}$$

Si los valores $U_{\alpha,\beta}$ del miembro derecho fueran los correctos, es decir, aquellos que se obtienen al resolver (4.149), es obvio que la cantidad

$$\frac{U_{j+1,l} + U_{j-1,l} + U_{j,l-1} + U_{j,l+1}}{4} \tag{4.151}$$

sería justamente igual al valor correcto de $U_{j,l}$. Pero si los valores $U_{\alpha,\beta}$ en (4.151) no son los correctos, esta expresión proporciona valores también incorrectos para $U_{j,l}$. Sin embargo, si con los resultados incorrectos así obtenidos repetimos el proceso de modo iterativo, resulta que los valores que obtenemos convergen, aunque de un modo muy lento, hacia el valor exacto [KC94, sección 13.6]. En definitiva, interpretamos la fórmula (4.150) como un modo de hacer una mejor estimación de $U_{j,l}$ a partir del valor de U en los puntos vecinos:

$$(U_{j,l})_{\text{nuevo}} \leftarrow \frac{1}{4}\left(U_{j+1,l} + U_{j-1,l} + U_{j,l-1} + U_{j,l+1}\right)_{\text{viejo}}, \tag{4.152}$$

o bien

$$\boxed{U_{j,l}^{[m+1]} = \frac{1}{4}\left(U_{j+1,l}^{[m]} + U_{j-1,l}^{[m]} + U_{j,l-1}^{[m]} + U_{j,l+1}^{[m]}\right)}. \tag{4.153}$$

donde denotamos por $U_{j,l}^{[m]}$ a la estimación de $u(x_j, y_l)$ en la m-ésima iteración. Si $U_{j,l}^{[m]}$ converge para $m \to \infty$, es decir, si $U_{j,l}^{[\infty]} = \lim_{m\to\infty} U_{j,l}^{(m)}$, entonces $U_{j,l}^{[\infty]}$ satisface la ecuación de Laplace discretizada (4.150).

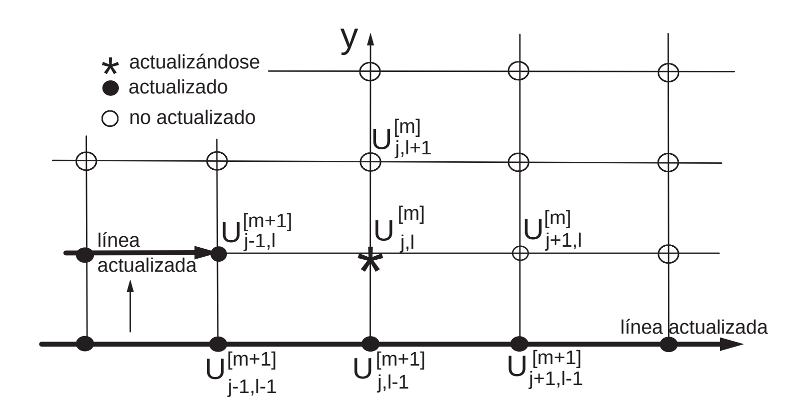


Figura 4.16: Esquema de actualización de los valores en el método de Gauss-Seidel.

Método de Gauss-Seidel

Este es un método iterativo que converge más rápidamente a la solución de la EDP que el método de Jacobi. Consiste esencialmente en la iteración de Jacobi (4.153) aunque con una importante diferencia: al calcular $U_{j,l}^{[m+1]}$ mediante el promedio del miembro derecho de (4.153) se utilizan los valores de $U_{\alpha,\beta}^{[n]}$ *más actualizados que se conozcan*, lo que significa que n no será siempre igual a m y que en algunos puntos se tendrá que $n = m+1$ (véase la figura 4.16). Según el esquema de barrido mostrado en la figura 4.16, se tiene que $U_{j,l}^{[m+1]}$ se calcula mediante la fórmula

$$U_{j,l}^{[m+1]} = \frac{1}{4}\left(U_{j+1,l}^{[m]} + U_{j-1,l}^{[m+1]} + U_{j,l-1}^{[m+1]} + U_{j,l+1}^{[m]}\right). \tag{4.154}$$

Esta relación es conocida como fórmula iterativa de Gauss-Seidel. El método de Gauss-Seidel, además de converger más rápidamente a la solución que el método de Jacobi (típicamente converge el doble de rápido), es también más fácil de programar al no ser necesario distinguir en el programa entre valores actualizados y no actualizados de U.

Método de super-relajación

El método conocido como método de super-relajación suele ser aún más rápido que el de Gauss-Seidel.[29] Consiste en actualizar $U_{j,l}^{[m]}$, es decir, estimar $U_{j,l}^{[m+1]}$ añadiendo a $U_{j,l}^{[m]}$ un factor ω del cambio $U_{j,l}^{[m+1]} - U_{j,l}^{[m]}$ que se obtendría mediante la fórmula de Gauss-Seidel. Usando la expresión (4.154), esta diferencia se puede escribir así:

$$U_{j,l}^{[m+1]} - U_{j,l}^{[m]} = \frac{1}{4}\left(U_{j,l-1}^{[m+1]} + U_{j-1,l}^{[m+1]} + U_{j,l+1}^{[m]} + U_{j+1,l}^{[m]} - 4U_{j,l}^{[m]}\right).$$

Luego, según la descripción del método de super-relajación que hemos hecho, la fórmula iterativa correspondiente a este método es:

$$U_{j,l}^{[m+1]} = U_{j,l}^{[m]} + \frac{\omega}{4}\left(U_{j,l-1}^{[m+1]} + U_{j-1,l}^{[m+1]} + U_{j,l+1}^{[m]} + U_{j+1,l}^{[m]} - 4U_{j,l}^{[m]}\right), \tag{4.155}$$

siendo ω un parámetro (llamado parámetro de relajación) a elegir. Para $\omega = 1$ el método de super-relajación se reduce al de Gauss-Seidel. El valor más adecuado (en el sentido de que la convergencia sea más rápida) de ω para cada problema no suele conocerse *a priori*, de modo

[29]Puede verse una discusión algo más detallada de estos métodos iterativos en la sección 13.8 de [Ant02]

que habitualmente se estima tras un breve tanteo con valores de ω comprendidos entre 1 y 2. El método se llama de super-relajación porque un valor de ω mayor que 1 implica una corrección al valor de $U_{j,l}^{[m]}$ mayor que la corrección propia del método de Gauss-Seidel.

▷ ***Ejercicio*** *4.20*

Escribe las fórmulas de Jacobi, Gauss-Seidel y super-relajación para la ecuación de Poisson.

4.10. Problemas

4.1. Un ordenador que emplea diez dígitos decimales de mantisa resuelve mediante un método numérico extraordinariamente bueno la ecuación $y''(x) = 4y(x)$ con $y(0) = 1,\ y'(0) = -2$. El resultado se muestra en la figura 4.17. Resulta que esta solución es completamente

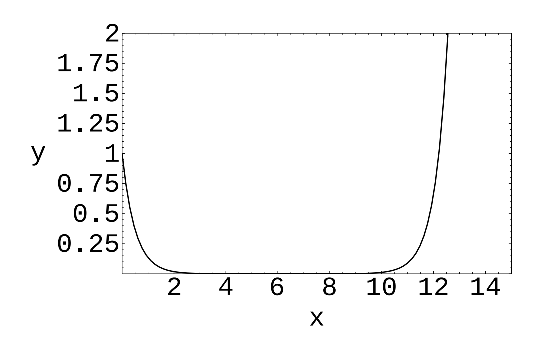


Figura 4.17: Integración numérica de $y''(x) = 4y(x)$ con $y(0) = 1,\ y'(0) = -2$.

errónea pues la solución exacta es siempre decreciente.

a) Demuéstralo hallando la solución exacta.

b) ¿Por qué crees que el ordenador da una solución falsa? Estima el valor de x para el cual la solución numérica creciente pasa por $y = 1$ y compara tu estimación con el valor de la figura. ¿Es coherente?

4.2. Estima el valor de $\sqrt{4}$ mediante el método de Newton utilizando $x_0 = 4$ como estimación inicial. Calcula hasta x_5.

4.3. Halla la relación $x_{n+1} = F(x_n, R)$ que permite hallar la raíz cúbica del número R. Utiliza esta relación para estimar el valor de $\sqrt[3]{8}$ comenzando con $x_0 = 3$. Calcula hasta x_5.

4.4. En los problemas anteriores y en el ejemplo 4.8 se ha visto que el método de Newton converge cuadráticamente a la raíz $\widetilde{x}$ de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, que $e_{n+1} = O(e_n^2)$ para $e_n = x_n - \widetilde{x} \ll 1$. Demuestra que ésta es una propiedad general del método de Newton.

4.5. Encuentra de qué orden en h es el error que se comete en las siguientes fórmulas en diferencias centrales de cinco puntos:

$$a)\qquad f' \simeq \frac{1}{12h}(f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_1 - f_2),$$

$$b)\qquad f'' \simeq \frac{1}{12h^2}(-f_{-2} + 16f_{-1} - 30f_0 + 16f_1 - f_2).$$

4.6. Halla numéricamente el valor de la solución de

$$y' = x + y, \qquad y(x = 0) = 1,$$

en $x = 0'3$, usando el tamaño de paso $h = 0'1$, mediante los métodos de Euler, Euler Modificado, Heun, Milne y Runge-Kutta de segundo orden. Calcula además la solución mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden empleando un tamaño de paso $h = 0'3$.

4.7. Estima numéricamente el valor de la solución de

$$y' = xy, \qquad y(x=0) = 1,$$

en $x = 0'2$, usando el tamaño de paso $h = 0'1$, mediante los métodos de Euler, Euler Modificado, Heun, Milne y Runge-Kutta de segundo orden. Calcula además la solución mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden empleando un tamaño de paso $h = 0'2$.

4.8. Calcula numéricamente el valor de la solución del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= & y, \\ \dot{y} &= & -x, \end{cases}$$

en $t = 0'2$ con $x(t=0) = 1$ e $y(t=0) = 0$, usando el tamaño de paso $h = 0'1$, mediante los métodos de Euler y Runge-Kutta de segundo orden. Compara con la solución exacta.

4.9. Sea el problema de contorno doblemente inhomogéneo

$$y'' - y = 2\,\mathrm{e}^x, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = e\,.$$

a) Comprueba que $x\,\mathrm{e}^x$ es una solución particular y escribe la solución general de la ecuación anterior sin tener en cuenta las condiciones de contorno. Halla solución que satisface las condiciones de contorno.

b) Resuelve el problema mediante diferencias finitas utilizando *dos* puntos (internos, no en la frontera) equiespaciados. Compara con la solución exacta.

c) Comprueba que la solución por diferencias finitas es

$$\{y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} = \{0, 0'246, 0'599, 1'096, 1'783, e\}$$

cuando se usan *cuatro* puntos. Compara con la solución exacta.

d) Repite los apartados (9*a*) y (9*b*) si las condiciones de contorno son $y(0) = 0$, $y'(1) = 2e$.

4.10. Resuelve el problema anterior mediante el método de disparo, pero de manera analítica. En otras palabras, halla la función $y(1; m)$ que proporciona el valor de y en $x = 1$ en función de la derivada, m, de $y(x)$ en $x = 0$ y halla el cero, $\widetilde{m}$, de la función $F(m) = y(1; m) - e$. Muestra que $y(x; \widetilde{m})$ es la solución exacta.

4.11. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k(x)y = S(x)$$

y las condiciones $y(x_0) = y_0$, $y(x_0 + h) = y_1$ para $h \ll 1$. Halla una relación de recurrencia que permita calcular $y(x_0 + nh) = y_n$ con un error del orden h^6 en cada paso de integración. El método así obtenido se conoce como método de Numerov (o, también, método de Cowling) [Koo86, sec. 3.1].

4.12. Resuelve numéricamente la ecuación

$$y''(x) + \frac{\pi^2}{4} y(x) = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

mediante:

a) El método de diferencias finitas, usando el discretizado $\Delta x = 1/3$.

b) El método del disparo.

Compara con la solución exacta.

4.13. Sea el problema de condiciones de contorno

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \tag{4.156}$$

con $y(0) = y(1) = 0$.

a) Escribe la ecuación en diferencias correspondiente aproximando la segunda derivada mediante la fórmula de diferencias centrales de tres puntos.

b) Divide el intervalo $[0, 1]$ en tres segmentos ($h = 1/3$), escribe el sistema de ecuaciones en diferencias equivalente al problema de contorno (4.156) y resuélvelo.

c) Halla la solución aproximada en $x = 1/3$ y $x = 2/3$ para $f(x) = 2 - 6x$ y $f(x) = 6x(1 - 2x)$ y compara con las soluciones exactas. ¿A qué atribuyes la igualdad o desigualdad de los resultados?

4.14. Sea la ecuación diferencial

$$y^{(4)}(x) = 0 \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.157}$$

con las condiciones de contorno $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$.

a) Demuestra que la solución exacta de este problema es $y(x) = 4(x - \frac{1}{2})^2$.

b) Halla una fórmula en diferencias centrales de cinco puntos para la derivada cuarta y para la derivada primera.

c) Usando los resultados del apartado anterior, escribe las ecuaciones en diferencias finitas correspondientes al problema de condiciones de contorno (4.157) si el discretizado es igual a $h = 1/2$.

d) Halla la solución de las ecuaciones anteriores. Compara con el resultado exacto y justifica la similitud o diferencia entre ambos resultados.

4.15. Sea la ecuación *integrodiferencial*

$$y''(x) + \mathrm{e}^x \int_0^1 y(z)dz = e\, y(x)$$

Halla la solución numérica de esta ecuación en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ usando $h = 1/2$ como tamaño del intervalo de discretización si:

- Las condiciones de contorno son $y(0) = 1$, $y(1) = e$. Discretiza la ecuación integrodiferencial usando la fórmula de la fórmula central de tres puntos para la derivada segunda y la regla de Simpson para la integral.
- Las condiciones de contorno son $y'(0) = 1$, $y(1) = e$. Discretiza la ecuación integrodiferencial usando la fórmula de la fórmula central de tres puntos para la derivada segunda y la regla del rectángulo para la integral. Implementa la condición de contorno en $x = 0$ usando la fórmula de la derivada primera central de tres puntos.

Compara la solución numérica con la exacta que, en los dos casos anteriores, es $y(x) = \mathrm{e}^x$.

4.16. Sea el problema difusivo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con $u(0,t) = u(L,t) = 0$ y $u(x,0) = f(x)$. Queremos justificar en este problema el criterio de estabilidad de von Neumann[30], es decir, justificar que el método explícito cuya ecuación discretizada es

$$U_j^{(m+1)} = U_j^{(m)} + S\left(U_{j-1}^{(m)} - 2U_{j-1}^{(m)} + U_{j+1}^{(m)}\right) \quad \text{con} \quad S = \frac{k\,\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

es estable si $S \leq \left[1 - \cos\left(\frac{(N-1)\,\pi}{N}\right)\right]^{-1}$.

a) Halla el valor de Q que hace que $U_j^{(m)} = Q^m\, \mathrm{e}^{i\alpha j\Delta x}$ sea solución de la anterior ecuación en diferencias.

b) Demuestra que, para ese mismo valor de Q, se tiene que $U_j^{(m)} = Q^m \operatorname{sen}(\alpha j\Delta x)$ y $U_j^{(m)} = Q^m \cos(\alpha j\Delta x)$ son también solución.

c) Demuestra que las condiciones de contorno exigen que $\alpha = \alpha_n \equiv n\pi/L$ con $n = 1, 2\cdots$. (La solución para cada α_n es un *modo* difusivo)

d) Demuestra que para $n \geq N+1$ no se obtienen modos difusivos distintos a los anteriores. Esto significa que (nótese que $n = N$ conduce a la solución trivial) los modos difusivos son los correspondientes a $n = 1, 2, \cdots, N-1$.

e) Escribe la solución de la ecuación en diferencias como una combinación lineal de los modos difusivos. ¿A qué te recuerda esta solución?

f) ¿Para qué valores de S se tiene que $|Q| > 1$? ¿Qué les sucede a las soluciones anteriores si $|Q| > 1$? ¿Qué puedes concluir entonces sobre la estabilidad del método de integración explícito anterior?

4.17. La ecuación de conservación $\partial u/\partial t = -v\partial u/\partial x$ admite la aproximación de diferencias finitas siguiente:

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = -v\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x}\,.$$

a) Usa el procedimiento simplificado de von Neumann (es decir, no te preocupes de hallar la forma admisible de la parte espacial de los modos difusivos) para demostrar que este esquema de integración es inestable.

b) Demuestra que el cambio $U_j^n \to (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)/2$ estabiliza el método anterior siempre y cuando $v\Delta t/\Delta x \leq 1$.

4.18. Usa el procedimiento simplificado de von Neumann para demostrar que:

a) El método explícito de Richardson (expuesto en la sección 4.7.1, página 257) es siempre inestable.

b) El método de Crank-Nicholson es siempre estable.

4.19. Sea el problema de potencial

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = f(x,y)$$

[30]Pueden verse más detalles sobre este método y este problema en [Hab83, sec. 13.3.4]

donde $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, y con las condiciones de contorno $\varphi(x=0,y) = \varphi(x=1,y) = 0$, $\varphi(x,y=0) = \varphi(x,y=1) = 1$. Divide el cuadrado unidad en celdas cuadradas de lado $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{4}$ y calcula un valor numérico aproximado del potencial $\varphi(x,y)$ en los nudos de la red resultante cuando (a) $f(x,y) = 0$, (b) $f(x,y) = 4^2\, x(1-x)$.

4.20. Halla una fórmula explícita en diferencias finitas que, con un error de discretización temporal de orden Δt y error de discretización espacial de orden $(\Delta x)^2$, permita resolver la ecuación difusiva

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con la condición de contorno (en la izquierda)

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = A(t).$$

Escribe explícitamente las ecuaciones de discretización en $x = 0$ y $x = 1/2$ si $A(t) = 1$, $\Delta x = 1/2$, $\Delta t = 1/2$, $v\Delta t/(2\Delta x) = P = 1/4$ y $k\Delta t/(\Delta x)^2 = S = 1/2$. Usa estas ecuaciones junto con la condición inicial $u(x,t=0) = 1$ y de contorno (en la derecha) $u(1,t) = 1$ para hallar la solución numérica aproximada en el instante $t_2 = 2\Delta t$.

4.21. Se pide resolver numéricamente mediante el método explícito la ecuación de difusión $u_t = u_{xx}$ con la condición inicial $u(x,t=0) = \operatorname{sen}\pi x$ y las condiciones de contorno:

a) $u(x=0,t) = 0$, $u(x=1,t) = 0$;

b) $u_x(x=0,t) = 1$, $u(x=1,t) = 0$.

Usa el discretizado $\Delta x = 1/3$ y $\Delta t = 1/18$ para hallar la solución $u(x_j, t_m)$ en los puntos espacio-temporales $x_j = j\Delta x$ y $t_m = m\Delta t$, $m = 1, 2$, con un error de discretización de orden Δt y $(\Delta x)^2$.

Capítulo 5

Ecuaciones diferenciales y sistemas no lineales. Estabilidad

Nature, with scant regard for the desires of the mathematician, often seems to delight in formulating her mysteries in terms of nonlinear systems of equations.
H. T. Davis
Linear systems are all alike, but each nonlinear system is nonlinear in its own way.

5.1. Introducción

El esfuerzo dedicado en los estudios de Ciencias e Ingeniería a las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales *no* lineales es una pequeña fracción del dedicado a las ecuaciones y sistemas diferenciales lineales. Esto podría hacernos pensar que las ecuaciones no lineales son poco importantes, que no son frecuentes en la Naturaleza y que, por tanto, no merecen mucha atención. La realidad es justo la contraria. Lo cierto es que las ecuaciones que describen muchos sistemas y fenómenos físicos son no lineales. Sin embargo, usualmente, estas ecuaciones se *aproximan* por otras lineales porque el problema no lineal es simplemente inabordable. Por supuesto, en muchas ocasiones las aproximaciones lineales son adecuadas y válidas para la mayor parte de los propósitos. Pero, y de esto hay que ser consciente, en otras muchas ocasiones la aproximación lineal es completamente inútil por no recoger las características no lineales que son esenciales en los fenómenos. Estas situaciones físicas no lineales suelen darse en sistemas físicos alejados del equilibrio.

La teoría de las ecuaciones y sistemas lineales es un campo de investigación que, desde el siglo XVIII, ha sido muy estudiado y que está acabado: nada (?) queda por descubrir. Sin embargo, se sabe aún poco sobre las ecuaciones y sistemas no lineales: es un tema complejo, lleno de sorpresas (¡es divertido!) y muy vivo. Es fácil convencerse de la verdad de estas afirmaciones con sólo nombrar algunos de sus términos característicos: catástrofes, caos, atractores extraños, solitones... Ante esto, es muy natural preguntarse: ¿por qué son tan fáciles [difíciles] los problemas lineales [no lineales]? La clave está en que los problemas lineales pueden descomponerse en problemas más sencillos ("divide y vencerás") cuyas soluciones pueden al final combinarse para obtener la solución del problema original. Ejemplos en este mismo libro: la función de Green, el

método de separación de variables, solución del problema de Sturm-Liouville como desarrollo en autofunciones.

Hasta ahora, cuando nos enfrentábamos con un problema diferencial (lineal), nuestro objetivo casi único era hallar una solución explícita. Sin embargo, este modo de atacar los problemas fracasará, casi con total seguridad, cuando se emplee en los problemas no lineales ya que son pocos, muy pocos, los que tienen solución explícita conocida. En este capítulo mostraremos ejemplos de dos modos distintos de abordar estos problemas:

1. En el primero se busca información *cualitativa* sobre el comportamiento global de las soluciones. Nosotros nos centraremos especialmente sobre el problema de caracterizar la estabilidad de las soluciones y el estudio del comportamiento de las soluciones en las vecindades de ciertos puntos (los llamados puntos críticos).

2. En el segundo modo se buscan soluciones *aproximadas* del problema no lineal. Ilustraremos este procedimiento con los métodos de balance armónico y de Krylov-Bogoliubov.

5.2. Estabilidad

En sistemas físicos reales es a menudo crucial saber si el comportamiento del sistema es estable, esto es, si pequeños cambios en las condiciones iniciales provocan cambios sustanciales en su comportamiento. Nótese que en los sistemas reales siempre existen ruidos, pequeñas perturbaciones, que hacen que las condiciones iniciales no estén bien definidas. Además, todos somos conscientes de que no es posible determinar con precisión absoluta cuál es el estado inicial de un sistema físico real. Por ello es importante saber si el comportamiento de este sistema es sensible a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales.

En esta sección estudiaremos procedimientos que nos permitan determinar la estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

5.2.1. Definiciones previas

Sea un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden[1] que escribiremos bien así:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.1}$$

o bien, de un modo más compacto, así:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \tag{5.2}$$

donde

$$X \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)\,,$$
$$F(X,t) \equiv (f_1(X,t), f_2(X,t), \ldots, f_n(X,t))\,,$$

y

$$f_j(X,t) \equiv f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)\,.$$

[1] En ocasiones, para abreviar, nos referiremos a este sistema diciendo que es un sistema n dimensional.

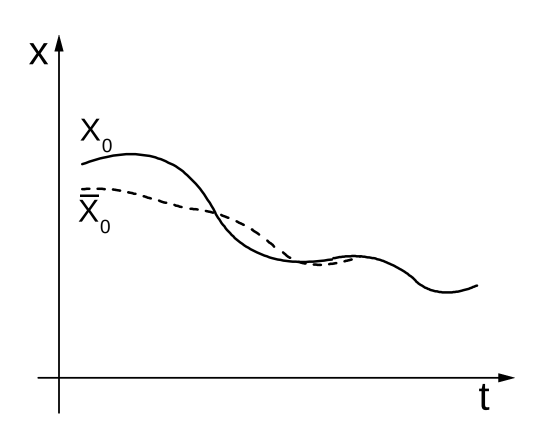


Figura 5.1: Solución estable.

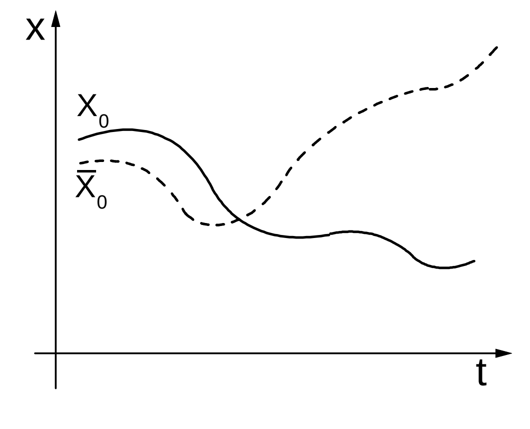


Figura 5.2: Solución inestable.

En lo que sigue, llamaremos simplemente $X(t)$ a la solución del sistema anterior que pasa por X_0 en el instante t_0, y $\bar{X}(t)$ a la solución que pasa por $\bar{X}_0$ en el instante t_0:

$$\begin{aligned} X(t_0) \equiv X_0 \Rightarrow &\quad X(t), \\ \bar{X}(t_0) \equiv \bar{X}_0 \Rightarrow &\quad \bar{X}(t)\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sin pretender por el momento ser precisos, diremos que una solución $\bar{X}(t)$, con condiciones iniciales dadas por $\bar{X}_0$, es estable si pequeñas desviaciones en las condiciones iniciales conducen a soluciones que no difieren sustancialmente de dicha solución. En otros términos, $\bar{X}(t)$ es estable [inestable] si es poco [muy] sensible a cambios en sus condiciones iniciales. En la figura 5.1 representamos un comportamiento típico de una solución estable, mientras que en la figura 5.2 se muestra el comportamiento de una solución inestable.

Por supuesto, debemos proporcionar definiciones más precisas de estabilidad. Para ello empezaremos dando unas definiciones previas:

- *Distancia entre dos soluciones* $X(t)$ y $\bar{X}(t)$:

$$\|X(t) - \bar{X}(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} [x_i(t) - \bar{x}_i(t)]^2}. \tag{5.4}$$

  A esta distancia se la conoce como *distancia euclídea*. Para nuestros propósitos, la forma concreta de esta distancia no es importante. Por ejemplo, también podríamos haber usado esta otra definición de distancia entre las dos soluciones:

$$\|X(t) - \bar{X}(t)\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i(t) - \bar{x}_i(t)|. \tag{5.5}$$

- Sean $\bar{X}_0$ y X_0 dos puntos del espacio de fases "próximos", es decir, sea $\|X_0 - \bar{X}_0\|$ pequeño, y sean $X(t)$ y $\bar{X}(t)$ las soluciones del sistema

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t), \tag{5.6}$$

  que pasan por X_0 y $\bar{X}_0$, respectivamente. Entonces:

- Diremos que $X(t)$ es la *solución perturbada* con respecto a la *solución de referencia* $\bar{X}(t)$.
- A la diferencia
$$\widetilde{X}(t) = X(t) - \bar{X}(t), \tag{5.7}$$
la llamamos perturbación de la solución de referencia $\bar{X}(t)$, o simplemente, *perturbación.*
- A la perturbación en el instante inicial
$$\widetilde{X}(t_0) = X(t_0) - \bar{X}(t_0) \equiv \widetilde{X}_0, \tag{5.8}$$
la llamaremos *perturbación inicial.*

5.2.2. Definición de estabilidad según el criterio de Liapunov

Damos a continuación la definición de estabilidad según el criterio de Liapunov usando tres notaciones distintas:

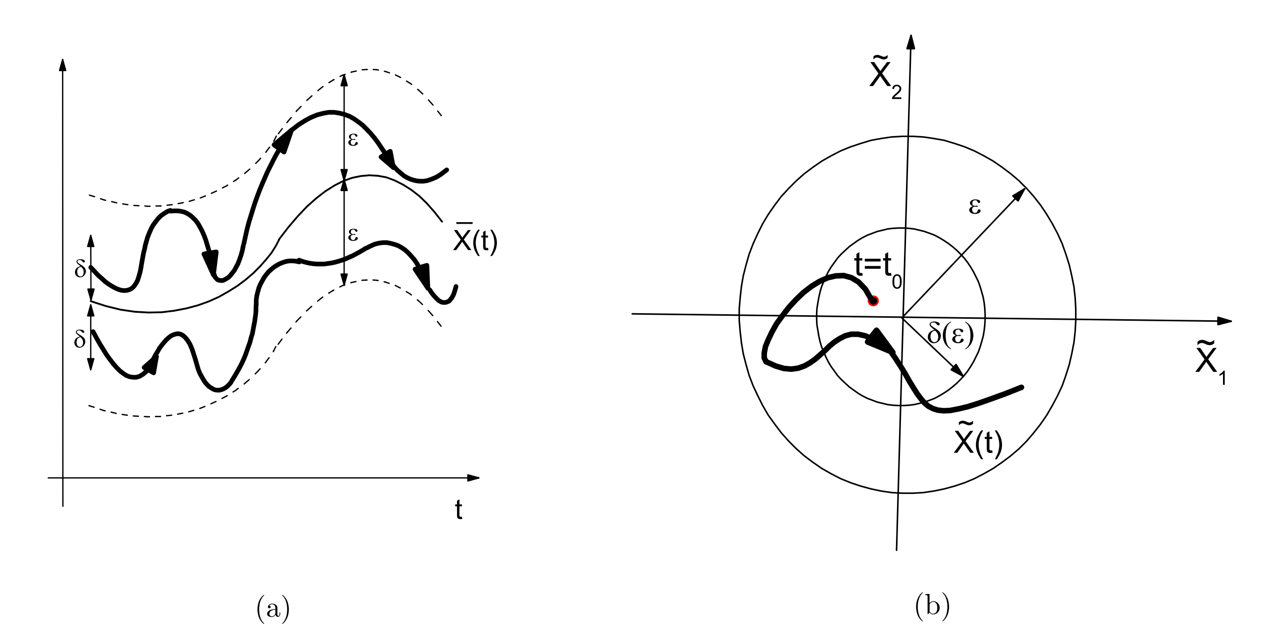
- $\bar{X}(t)$ es estable si y sólo si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta(\epsilon)\ /\ (\epsilon) \Rightarrow |x_i(t) - \bar{x}_i(t)| < \epsilon, \tag{5.9}$$
para $t > t_0$ e $i = 1, 2, \ldots, n$.[2]
- $\bar{X}(t)$ es estable si y sólo si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta(\epsilon)\ /\ \|X_0 - \bar{X}_0\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|X(t) - \bar{X}(t)\| < \epsilon \quad \text{para} \quad t > t_0. \tag{5.10}$$
- $\bar{X}(t)$ es estable si y sólo si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta(\epsilon)\ /\ \|\widetilde{X}_0\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\widetilde{X}(t)\| < \epsilon \quad \text{para} \quad t > t_0. \tag{5.11}$$

En definitiva, una solución $\bar{X}(t)$ es estable si sus soluciones perturbadas se mueven *siempre* arbitrariamente próximas a ella cuando las perturbaciones iniciales son suficientemente pequeñas (véase la figura 5.3).

5.2.3. Definición de estabilidad asintótica

Definiremos la estabilidad asintótica también de tres modos equivalentes (sólo formalmente distintos):

- $\bar{X}(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si
$$\exists \delta > 0\ /\ |x_i(t_0) - \bar{x}_i(t_0)| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |x_i(t) - \bar{x}_i(t)| = 0, \tag{5.12}$$
para $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $\bar{X}(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si
$$\exists \delta > 0\ /\ \|X(t_0) - \bar{X}(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|X(t) - \bar{X}(t)\| = 0. \tag{5.13}$$



(a) (b)

Figura 5.3: (a) Una solución de referencia $\bar{X}(t)$ estable (línea continua fina) y dos soluciones perturbadas (líneas gruesas con flechas). (b) Comportamiento típico en el plano de fases de una perturbación de la solución de referencia estable de un sistema bidimensional.

- $\bar{X}(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si

$$\exists \delta > 0 \ / \ \|\widetilde{X}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|\widetilde{X}(t)\| = 0. \tag{5.14}$$

► *Ejemplo 5.1*

Vamos a estudiar la estabilidad de las soluciones[3] (¡de todas las soluciones!) del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dX}{dt} = -a\,X$$

donde a es una constante real. La solución de este sistema es bien simple:

$$\begin{cases} \bar{X}(t) = \bar{X}_0\ \mathrm{e}^{-a\,t} & \text{donde} \quad \bar{X}_0 = \bar{X}(t=0) \\ X(t) = X_0\ \mathrm{e}^{-a\,t} & \text{donde} \quad X_0 = X(t=0) \end{cases}$$

Por tanto

$$\|X(t) - \bar{X}(t)\| = \mathrm{e}^{-a\,t}\,\|X_0 - \bar{X}_0\|,$$

es decir,

$$\|\widetilde{X}(t)\| = \mathrm{e}^{-a\,t}\,\|\widetilde{X}_0\|.$$

Si tomamos $\delta(\epsilon) = \epsilon$, se tiene que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta(\epsilon) = \epsilon \ / \ \|X_0 - \bar{X}_0\| < \delta = \epsilon \Rightarrow \|X(t) - \bar{X}(t)\| < \delta\ \mathrm{e}^{-a\,t} = \epsilon\ \mathrm{e}^{-a\,t}\,.$$

Por tanto, para $t > 0$, $\bar{X}(t)$ es solución estable si $a \geq 0$, y asintóticamente estable si $a > 0$. Es evidente que la solución $\bar{X}(t)$ no es estable si $a < 0$.

◄

[2]Es decir, $\bar{X}(t)$ es estable si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un valor de δ que depende de ϵ tal que si $|x_i(t_0) - \bar{x}_i(t_0)| < \delta$ entonces $|x_i(t) - \bar{x}_i(t)| < \epsilon$ para $t > t_0$ e $i = 1, 2, \ldots, n$

[3]Cuando estudiemos la estabilidad de *todas* las soluciones del un sistema diremos que estamos estudiando la estabilidad del sistema.

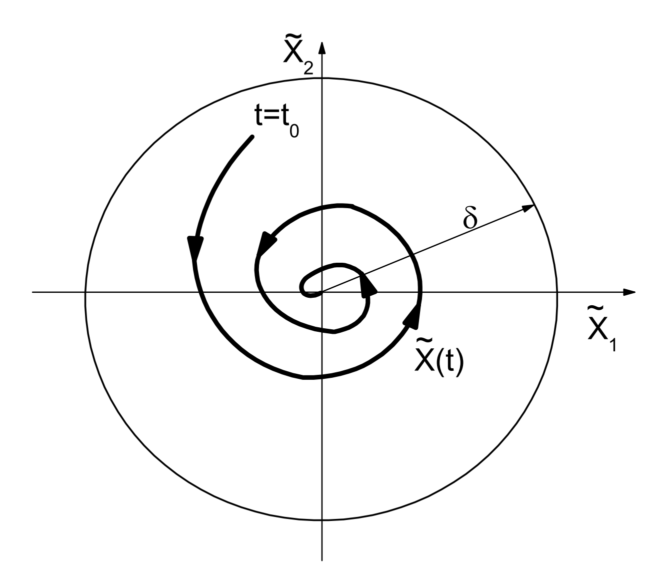


Figura 5.4: Esquema de un comportamiento típico en el plano de fases de la perturbación de una solución asintóticamente estable de un sistema bidimensional

5.2.4. Sistema perturbativo

Veamos qué ecuaciones ha de satisfacer la perturbación $\widetilde{X}(t)$. Sabemos que

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{X}}{dt} &= F(\bar{X}, t) \\ \frac{dX}{dt} &= F(X, t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dX}{dt} - \frac{d\bar{X}}{dt} = F(X, t) - F(\bar{X}, t). \tag{5.15}$$

Pero $\frac{dX}{dt} - \frac{d\bar{X}}{dt} = \frac{d}{dt}\widetilde{X}$, por lo que $\widetilde{X}$ satisface el sistema de ecuaciones:

$$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = F(X, t) - F(\bar{X}, t) \equiv \widetilde{F}(\bar{X}, \widetilde{X}, t). \tag{5.16}$$

Al sistema (5.16) lo llamaremos *sistema perturbativo*. Debe notarse que la solución nula $\widetilde{X} = (0, 0, \ldots, 0) \equiv \mathbf{0}$ es siempre solución del sistema perturbativo. Dado que la solución de referencia $\bar{X}$ se da por conocida, en ocasiones no se incluye como argumento en $\widetilde{F}$ y se usa la notación abreviada

$$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = \widetilde{F}(\widetilde{X}, t). \tag{5.17}$$

Dijimos que $\bar{X}(t)$ era estable si su perturbación $\widetilde{X}(t)$ satisfacía la condición (5.11). Obviamente, podemos reescribir la ecuación (5.11) de este modo:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ \delta(\epsilon)\ /\ \|\widetilde{X}_0 - \mathbf{0}\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|\widetilde{X}(t) - \mathbf{0}\| < \epsilon \quad \text{para} \quad t > t_0. \tag{5.18}$$

Pero (5.18) es la estricta definición de estabilidad de la solución nula $\widetilde{X}(t) = \mathbf{0}$ del sistema perturbativo. Esto significa que las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. La solución $\bar{X}(t)$ del sistema $F(X, t)$ es estable.

2. La solución nula $\widetilde{X}(t) = \mathbf{0}$ del sistema perturbativo $\widetilde{F}(\bar{X}, \widetilde{X}, t)$ es estable.

Por lo tanto, $\bar{X}(t)$ *es estable si y sólo si* $\widetilde{X}(t) = \mathbf{0}$ *es estable.*

Razonando de manera similar, es fácil darse cuenta de que la siguiente afirmación es también válida: $\bar{X}(t)$ *es asintóticamente estable si y sólo si* $\widetilde{X}(t) = \mathbf{0}$ *es asintóticamente estable.*

En resumen:

> *Analizar la estabilidad de la solución* $\bar{X}(t)$ *del sistema*
>
> $$dX/dt = F(X, t)$$
>
> *es equivalente a analizar la estabilidad de la solución nula* $\widetilde{X}(t) = \mathbf{0}$ *de su sistema perturbativo*
>
> $$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = \widetilde{F}(\bar{X}, \widetilde{X}, t).$$

5.2.5. Definición de punto crítico

Diremos que X_c es un *punto crítico* del sistema $\frac{dX}{dt} = F(X,t)$ si $F(X_c, t) = 0$. La solución que comienza en estos puntos, $X(t_0) = X_c$, no puede cambiar en el tiempo pues $\left.\frac{dX}{dt}\right|_{X=X_c}$ es, por definición de punto crítico, cero. Por consiguiente

$$\left.\frac{dX}{dt}\right|_{X=X_c} = \mathbf{0} \Rightarrow X(t) = X_c \quad \text{para todo}\, t. \tag{5.19}$$

Por este motivo a los puntos críticos también se les conoce como *puntos fijos* o *puntos de reposo*.

Debe notarse que, según lo que acabamos de exponer, la solución perturbativa nula $\widetilde{X}(t) = \mathbf{0}$ es un punto crítico o fijo del sistema perturbativo. Concluimos por tanto que:

> *Analizar la estabilidad de la solución* $\bar{X}(t)$ *es equivalente a analizar la estabilidad del punto crítico* $\widetilde{X}_c = \mathbf{0}$ *de su sistema perturbativo*
>
> $$\frac{d\widetilde{X}}{dt} = \widetilde{F}(\bar{X}, \widetilde{X}, t).$$

Este resultado justifica la importancia de estudiar métodos que nos permitan determinar la estabilidad de los puntos críticos. A esta tarea nos dedicaremos en las secciones siguientes. Pero veamos antes un ejemplo.

► *Ejemplo 5.2*

Queremos analizar la estabilidad de las soluciones del sistema

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

que, utilizando la notación general, podemos escribir así:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

siendo $f_1(x_1, x_2) = -x_2$ y $f_2(x_1, x_2) = x_1$. Este sistema puede reescribirse como dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden independientes (es decir, desacopladas):

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_1}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(-x_2) = -x_1,$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx_2}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(x_1) = -x_2,$$

cuyas soluciones son

$$x_1(t) = A_1 \cos t + B_1 \operatorname{sen} t,$$
$$x_2(t) = A_2 \cos t + B_2 \operatorname{sen} t.$$

Entonces

$$x_1'(t) = -\, A_1 \operatorname{sen} t + B_1 \cos t,$$
$$x_2'(t) = -\, A_2 \operatorname{sen} t + B_2 \cos t.$$

Por tanto, para $t = 0$,

$$A_1 = x_1(0), \quad B_1 = x_1'(0),$$
$$A_2 = x_2(0), \quad B_2 = x_2'(0).$$

Pero tenemos que

$$x_1'(0) \equiv \left.\frac{d}{dt}x_1\right|_{t=0} = \left.-x_2\right|_{t=0} = -x_2(0),$$

$$x_2'(0) \equiv \left.\frac{d}{dt}x_2\right|_{t=0} = \left.x_1\right|_{t=0} = x_1(0).$$

Luego la solución es

$$x_1(t) = x_1(0) \cos t - x_2(0) \operatorname{sen} t,$$
$$x_2(t) = x_2(0) \cos t + x_1(0) \operatorname{sen} t.$$

Estudiemos ahora la estabilidad de la solución $\bar{X}(t)$ que pasa por $\bar{x}_1(0)$ y $\bar{x}_2(0)$. Lo haremos mediante el análisis de la estabilidad de la solución nula del sistema perturbativo. Veamos qué forma tiene este sistema perturbativo. Para ello sustituimos la solución perturbada $X(t) = \bar{X}(t) + \widetilde{X}(t)$ en la ecuación del sistema $dX/dt = F(X, t)$ [Ec. (5.21)]:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\bar{x}_1}{dt} + \dfrac{d\widetilde{x}_1}{dt} = -\bar{x}_2 - \widetilde{x}_2 \\ \dfrac{d\bar{x}_2}{dt} + \dfrac{d\widetilde{x}_2}{dt} = \bar{x}_1 + \widetilde{x}_1 \end{array}\right.$$

Pero, por definición, $\bar{X}(t)$ es solución del sistema $dX/dt = F$, por lo que la ecuación anterior se reduce a

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\widetilde{x}_1}{dt} = -\widetilde{x}_2 \\ \dfrac{d\widetilde{x}_2}{dt} = \widetilde{x}_1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{d\widetilde{X}}{dt} = \widetilde{F}(\widetilde{X}), \tag{5.22}$$

que es el sistema perturbativo. En este ejemplo tan sencillo encontramos que $F = \widetilde{F}$.
Recuérdese que dijimos que el análisis de la estabilidad de $\bar{X}$ es equivalente a estudiar el comportamiento de las soluciones de (5.22) en las vecindades del punto crítico $\mathbf{0}$. Por ello analizaremos ahora la estabilidad

de la solución nula del sistema perturbativo. En este ejemplo la solución del sistema original (5.20) es igual que la del perturbativo (5.22) por lo que

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_1(t) &= \widetilde{x}_1(0)\cos t - \widetilde{x}_2(0)\,\mathrm{sen}\,t,\\ \widetilde{x}_2(t) &= \widetilde{x}_1(0)\cos t + \widetilde{x}_2(0)\,\mathrm{sen}\,t.\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}|\widetilde{x}_1(t)-0| \le |\widetilde{x}_1(0)\cos t| + |\widetilde{x}_2(0)\,\mathrm{sen}\,t| \le |\widetilde{x}_1(0)| + |\widetilde{x}_2(0)|,\\ |\widetilde{x}_2(t)-0| \le |\widetilde{x}_1(0)\cos t| + |\widetilde{x}_2(0)\,\mathrm{sen}\,t| \le |\widetilde{x}_1(0)| + |\widetilde{x}_2(0)|.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\ \delta(\epsilon)=\frac{\epsilon}{2}\ \text{ tal que }\ \left\{\begin{array}{l}|\widetilde{x}_1(0)-0|<\delta\\ |\widetilde{x}_2(0)-0|<\delta\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}|\widetilde{x}_1(t)-0| & < & \epsilon\\ |\widetilde{x}_2(t)-0| & < & \epsilon\end{array}\right.$$

Esto significa que $\widetilde{X}(t)=\mathbf{0}$ es estable, lo que equivale a decir que $\bar{X}(t)$ es estable. Nótese que, sin embargo, $\bar{X}(t)$ no es asintóticamente estable porque los límites $\lim_{t\to\infty}\widetilde{x}_1(t)$ y $\lim_{t\to\infty}\widetilde{x}_2(t)$ *no existen.*

◄

► Ejemplo 5.3

En este ejemplo queremos estudiar la estabilidad de las órbitas planetarias *circulares* con respecto a *perturbaciones radiales*, es decir, con respecto a perturbaciones que se producen en la dirección del radio de la órbita. Por concretar, supongamos que el sistema que estudiamos es el formado por el Sol y la Tierra. El lagrangiano del sistema viene dado por

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-U(r)$$

donde μ es la masa reducida del sistema, r y θ son la coordenadas polares de la posición de la Tierra con respecto al Sol y

$$U(r)=-\frac{k}{r}$$

es la energía potencial correspondiente a la fuerza gravitatoria

$$F(r)=-\frac{dU}{dr}=-\frac{k}{r^2}.$$

Las ecuaciones del movimiento de la Tierra (ecuaciones de Lagrange) son

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=0, \tag{5.23}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{r}}=0. \tag{5.24}$$

De la primera ecuación se obtiene

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}=\mu r^2\dot{\theta}=\text{const}\equiv\ell \tag{5.25}$$

que no es más que la segunda ley de Kepler que dice que la velocidad aerolar $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ es constante. La segunda ecuación de Lagrange es

$$\mu\ddot{r}-\mu r\dot{\theta}^2=F(r).$$

Incorporando el resultado de (5.25) en esta ecuación y dividiendo por μ se obtiene

$$\ddot{r}-\frac{\ell^2}{\mu^2r^3}=-g(r) \tag{5.26}$$

donde

$$g(r)=\frac{k}{\mu r^2}. \tag{5.27}$$

Es evidente que la ecuación (5.26) tiene una solución sencilla cuando r es igual al valor constante R (lo que implica una órbita planetaria *circular* de radio R) que satisface la relación

$$\frac{\ell^2}{\mu^2 R^3} = g(R).$$

Usando (5.27) esta distancia es

$$R = \frac{\ell^2}{k\mu}. \tag{5.28}$$

Lo que queremos averiguar ahora es si esta órbita circular es estable frente a perturbaciones radiales. Nótese que en el diagrama de fases (radial) en el que representamos $\dot{r}$ frente a r, la órbita circular viene representada por un punto situado en $(r, \dot{r}) = (R, 0)$. Nuestra pregunta es: si en un instante dado $t = 0$ la órbita circular se perturba[4] de modo que el radio pasa de R a $r_0 = R + x_0$ y la velocidad inicial de 0 a $\dot{x}_0$ con $x_0/R \ll 1$ y $\dot{x}_0 \ll 1$, ¿qué le sucede a la nueva órbita? Por ejemplo, ¿se aleja de la anterior de modo que su radio crece y crece alejándose la Tierra del Sol?, o bien, en el espacio de fases $(r, \dot{r})$, ¿permanece la nueva órbita (trayectoria) moviéndose en las vecindades de la trayectoria original, es decir, moviéndose en las vecindades del punto $(R, 0)$? En el primer caso la órbita circular sería inestable y en el segundo caso sería estable. Para responder a estas cuesiones vamos a ver cómo evoluciona la perturbación $x = r - R$. Sustituyendo la relación $r = R + x$ en (5.26) obtenemos la ecuación perturbativa:

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{\mu^2 R^3[(1 + (x/R)]^3} = -g(R + x). \tag{5.29}$$

Nótese que, según terminología general que hemos usado hasta ahora, la solución de referencia es $\bar{X} = (R, 0)$, la solución perturbada es $X = (R + \epsilon, 0)$, la perturbación es $\widetilde{X} = (x, \dot{x})$ y el sistema perturbativo $\frac{d\widetilde{X}}{dt} = F(\widetilde{X}, \bar{X}, t)$ es

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \tag{5.30}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\ell^2}{\mu^2 R^3[(1 + (x/R)]^3} - g(R + x). \tag{5.31}$$

La solución exacta de (5.29) es desconocida, pero podemos hallar una solución aproximada válida en las vecindades del origen $(x = 0, \dot{x} = 0)$ del sistema perturbativo si introducimos en (5.29) las aproximaciones

$$\frac{1}{[1 + (x/R)]^3} = 1 - 3\frac{x}{R} + O(x^2), \tag{5.32}$$

$$g(R + x) = g(R) + g'(R)x + O(x^2), \tag{5.33}$$

con

$$g'(R) \equiv \left.\frac{dg}{dr}\right|_{r=R}.$$

En este caso la ecuación (5.29) se puede aproximar, tras despreciar términos de orden x^2, por[5]

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{\mu^2 R^3}\left[1 - 3\frac{x}{R}\right] = -g(R) - g'(R)x. \tag{5.34}$$

Pero de (5.27) y (5.28) se deduce que

$$g(R) = \frac{\ell^2}{\mu^2 R^3}$$

por lo que (5.34) se transforma en

$$\ddot{x} + \left[\frac{3g(R)}{R} + g'(R)\right] x = 0. \tag{5.35}$$

---

[4]Por ejemplo, debido al impacto de un planetoide.

[5]Este procedimiento se conoce como "linealización" de la ecuación original. En la sección 5.4.2 se estudiarán con detalle las condiciones bajo las cuales este procedimiento es válido y permite determinar la estabilidad de las soluciones.

Usando la definición de $g(r)$ dada en (5.27) se obtiene

$$\ddot{x} + \frac{k}{\mu R^3} x = 0.$$

Esta es la ecuación de un oscilador lineal [de frecuencia $\omega^2 = k/(\mu R^3)$] por lo que sus soluciones son acotadas, lo que significa que el punto crítico $(x = 0, \dot{x} = 0)$ es estable. Es decir, la solución perturbada $(r = R + x, \dot{r} = \dot{x})$ oscila alrededor de la órbita circular (solución de referencia) $(r = R, \dot{r} = 0)$. Según el criterio de Liapunov esto implica que la solución $(r = R, \dot{r} = 0)$ de la ecuación (5.26) es estable. La demostración paso a paso de esta afirmación sería igual a la llevada a cabo en el ejemplo 5.2, por lo que no la repetimos aquí.

◀

5.3. Estabilidad de sistemas lineales

En esta sección estudiaremos la estabilidad de la solución nula o punto crítico $(0, 0, \cdots, 0)$ del siguiente sistema lineal *autónomo* de n ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneo con coeficientes a_{ij} constantes:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{5.36}$$

Se dice que este sistema es autónomo porque en él no aparece la variable independiente t de forma explícita. En la sección 5.3.1 haremos un estudio detallado del caso con $n = 2$ (caso bidimensional). En la sección 5.3.2 presentaremos algunos consideraciones válidas para los casos con $n \geq 3$.[6]

La justificación de estudiar la estabilidad de sistemas lineales en este capítulo dedicado a la estabilidad de sistema *no* lineales se dará en la sección 5.4. Veremos entonces que en ciertos casos puede decidirse cuál es la estabilidad de un sistema *no* lineal a partir del análisis de la estabilidad de un sistema *lineal* relacionado.

5.3.1. Estabilidad de sistemas lineales de dos ecuaciones

En esta sección estudiaremos el comportamiento global de las soluciones del siguiente sistema lineal autónomo con coeficientes constantes:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y, \end{cases} \tag{5.37}$$

prestando especial atención a su comportamiento en las vecindades del origen $(0, 0)$. Nótese que este sistema tiene siempre un punto crítico (o fijo) en el origen $(x, y) = (0, 0)$. Un sistema de este tipo fue estudiado en el ejemplo 5.2.

[6]En la sección 5.7 se estudiará la estabilidad de la solución nula de algunos sistemas lineales con $n = 3$.

En lo que sigue supondremos que el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.38}$$

Esto significa que la única solución del sistema algebraico

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= 0, \\ a_2 x + b_2 y &= 0, \end{aligned}$$

es la trivial, $x = y = 0$, de modo que $(x, y) = 0$ es el único punto crítico. (Los casos con determinante nulo se tratan en los problemas 5.5 y 5.6.)

Resolución del sistema (5.37). Ahora, a modo de recordatorio y, también, para introducir la notación que usaremos más adelante, vamos a mostrar cómo se resuelve el sistema diferencial lineal (5.37) mediante el método de Euler.[7] En este método se buscan soluciones del sistema lineal con la forma

$$\vec{r}(t) \equiv (x(t), y(t)) = (A\,\mathrm{e}^{mt}, B\,\mathrm{e}^{mt}) = \mathrm{e}^{mt}(A, B) \equiv \mathrm{e}^{mt}\,\vec{\xi}.$$

Sustituyendo esta expresión en (5.37) se tiene

$$\begin{aligned} m\,\mathrm{e}^{mt}\,A &= a_1 A\,\mathrm{e}^{mt} + b_1 B\,\mathrm{e}^{mt}, \\ m\,\mathrm{e}^{mt}\,B &= a_2 A\,\mathrm{e}^{mt} + b_2 B\,\mathrm{e}^{mt}. \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 - m)A + b_1 B, \\ 0 &= a_2 B + (b_2 - m)B. \end{aligned} \tag{5.39}$$

Este sistema sólo tiene solución distinta de la trivial $(A, B) = (0, 0)$ si el determinante de sus coeficientes es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} a_1 - m & b_1 \\ a_2 & b_2 - m \end{vmatrix} = m^2 - (a_1 + b_2)\,m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \tag{5.40}$$

Esta ecuación se conoce como ecuación característica. Nótese que la condición (5.38) implica que $m = 0$ no puede ser solución de la ecuación característica. La solución de (5.39) es inmediata:

$$\frac{B}{A} = \frac{m - a_1}{b_1} = \frac{a_2}{m - b_2}. \tag{5.41}$$

Si la ecuación característica tiene dos soluciones m_1 y m_2 distintas[8], entonces $(x(t), y(t)) = (A_1, B_1)\,\mathrm{e}^{m_1 t}$ y $(x(t), y(t)) = (A_2, B_2)\,\mathrm{e}^{m_2 t}$ donde

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{m_1 - a_1}{b_1} = \frac{a_2}{m_1 - b_2}, \tag{5.42}$$

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{m_2 - a_1}{b_1} = \frac{a_2}{m_2 - b_2}, \tag{5.43}$$

[7] Es *muy* conveniente que repases los resultados principales sobre la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Aquí sólo se dan unas cuantas expresiones a modo de recordatorio. Puedes consultar, por ejemplo, el capítulo 10 de [Sim93].

[8] La discusión detallada de los otros casos puede verse, por ejemplo, en el capítulo 10 de [Sim93].

son dos soluciones distintas linealmente independientes del sistema (5.37). La solución general de este sistema es

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{m_2 t} \\ &= c_1 \vec{\xi}_1 \mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 \vec{\xi}_2 \mathrm{e}^{m_2 t},\end{aligned} \tag{5.44}$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes que se determinan mediante las condiciones iniciales

$$\vec{r}(0) = c_1 \vec{\xi}_1 + c_2 \vec{\xi}_2,$$

es decir, c_1 y c_2 se obtienen resolviendo el sistema algebraico

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 A_1 + c_2 A_2, \\ y(0) &= c_1 B_1 + c_2 B_2. \end{aligned} \tag{5.45}$$

▶ *Ejemplo 5.4*

Queremos resolver el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases} \tag{5.46}$$

Procedemos tal como hemos discutido anteriormente y proponemos soluciones de la forma $(x(t), y(t)) = (A\,\mathrm{e}^{mt}, B\,\mathrm{e}^{mt}) = \mathrm{e}^{mt}(A, B)$. Al sustituir esta expresión en (5.46) y tras cancelar el término e^{mt} encontramos

$$\begin{aligned} mA &= 3A - 2B, \\ mB &= 2A - 2B, \end{aligned} \tag{5.47}$$

cuya solución es distinta de la solución trivial nula ($A = B = 0$) sólo si

$$\begin{vmatrix} 3 - m & -2 \\ 2 & -2 - m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = 0. \tag{5.48}$$

Ésta es la ecuación característica. Sus raíces son $m_1 = 2$ y $m_2 = -1$. Si $m_1 = 2$, el sistema (5.47) se reduce a

$$\begin{aligned} 0 &= A - 2B, \\ 0 &= 2A - 4B, \end{aligned}$$

cuya solución es $B = A/2$. Por tanto, podemos escribir $\vec{\xi}_1 = (2, 1)$ si tomamos $A = 2$. De igual modo, para $m_2 = -1$, el sistema (5.47) se reduce a

$$\begin{aligned} 0 &= 4A - 2B, \\ 0 &= 2A - B, \end{aligned}$$

cuya solución es $B = 2A$. Por tanto, $\vec{\xi}_2 = (1, 2)$ si tomamos $A = 1$. La solución general del sistema (5.46) es por tanto

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = c_1 \vec{\xi}_1 \mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 \vec{\xi}_2 \mathrm{e}^{m_2 t}, \tag{5.49}$$

$$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}, \tag{5.50}$$

es decir

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 2\,\mathrm{e}^{2t} + c_2\,\mathrm{e}^{t}, \\ y(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{2t} + c_2 2\,\mathrm{e}^{t}. \end{aligned}$$

◀

Soluciones en el plano de fases. La naturaleza de las soluciones del sistema y, por consiguiente, el modo en el que las soluciones se comportarán en las vecindades del punto crítico (0,0) dependerá del tipo de las raíces características $m_1,\ m_2$. Pasemos a analizar todos los casos posibles.

Caso A. RAÍCES REALES Y DISTINTAS.

Caso A-1. *Raíces reales, distintas y negativas:* $m_1 < m_2 < 0$.

En este caso la solución general es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 A_1 \, \mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 A_2 \, \mathrm{e}^{m_2 t}, \\ y(t) &= c_1 B_1 \, \mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 B_2 \, \mathrm{e}^{m_2 t}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Veamos qué aspecto tienen las soluciones $(x(t), y(t))$ en el espacio de fases. Para ello consideraremos los siguientes casos:

- Cuando $c_2 = 0$ se tiene que $\vec{r}(t) = c_1 \vec{\xi}_1 \, \mathrm{e}^{m_1 t}$, y la solución correspondiente $y(x)$ es una recta generada por el vector $\vec{\xi}_1$, es decir,

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= c_1 A_1 \, \mathrm{e}^{m_1 t} \\ y(t) &= c_1 B_1 \, \mathrm{e}^{m_1 t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{B_1}{A_1} x, \tag{5.52}$$

  de modo que la trayectoria $y(x)$ es una recta de pendiente B_1/A_1 que pasa por el origen $(0,0)$ del plano de fases (x,y). Para $c_1 > 0$ se tiene una semirrecta y para $c_1 < 0$ la semirrecta complementaria (al otro lado del origen).

- Cuando $c_1 = 0$, se tiene que $\vec{r}(t) = c_2 \vec{\xi}_2 \, \mathrm{e}^{m_2 t}$ y la solución correspondiente $y(x)$ es una recta generada por el vector $\vec{\xi}_2$, es decir, es una recta de pendiente B_2/A_2 que pasa por el origen $(0,0)$ del plano de fases (x,y):

$$y = \frac{B_2}{A_2} x. \tag{5.53}$$

- En general, cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$ la solución da lugar a una trayectoria descrita por la ecuación

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 \, \mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 B_2 \, \mathrm{e}^{m_2 t}}{c_1 A_1 \, \mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 A_2 \, \mathrm{e}^{m_2 t}} = \frac{c_1 B_1 \, \mathrm{e}^{(m_1 - m_2)\, t} + c_2 \, B_2}{c_1 A_1 \, \mathrm{e}^{(m_1 - m_2)\, t} + c_2 \, A_2}. \tag{5.54}$$

  Dado que $m_2 > m_1$, se tiene que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y}{x} = \frac{B_2}{A_2},$$

  de modo que todas las trayectorias, excepto una, tienden a entrar en el origen con la pendiente B_2/A_2. La única excepción es la trayectoria particular $y = B_1 x / A_1$.

Cuando las trayectorias en las vecindades de un punto crítico se comportan del modo que acabamos de describir, decimos que el punto crítico es un *nodo estable*. En la figura 5.5 representamos el aspecto de las trayectorias en el plano de fases correspondientes a este caso.

Caso A-2. *Raíces reales, distintas y positivas:* $m_2 > m_1 > 0$.

La discusión de este caso es idéntica a la del caso anterior y no la llevaremos a cabo. La única diferencia reside en que la dirección de las trayectorias en el plano de fases es ahora justo la contraria a las del caso 1 (véase la figura 5.6). Este punto crítico se llama *nodo inestable*.

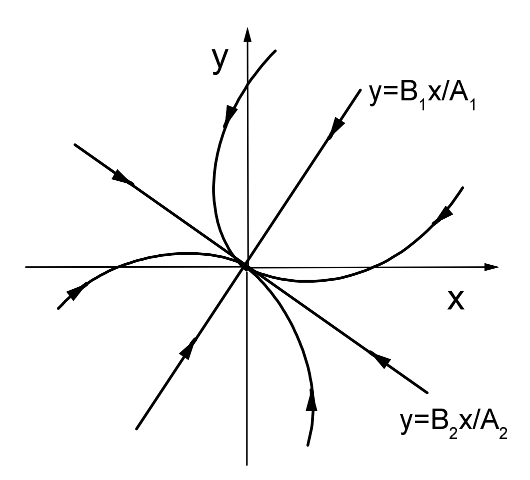


Figura 5.5: Trayectorias en el plano de fases para el nodo estable.

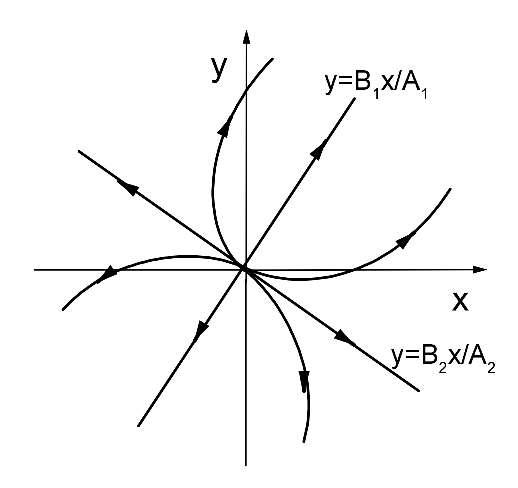


Figura 5.6: Trayectorias en el plano de fases para el nodo inestable.

Caso A-3. *Raíces reales, distintas y de signos opuestos:* $m_1 < 0 < m_2$.

En este caso la solución general sigue siendo de la forma (5.51). Existen tres clases de trayectorias:

- Cuando $c_2 = 0$ se tiene que

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 A_1 \,\mathrm{e}^{m_1 t} \\ y(t) &= c_1 B_1 \,\mathrm{e}^{m_1 t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \frac{B_1}{A_1} x, \tag{5.55}$$

  es decir, la trayectoria es una línea recta de pendiente B_1/A_1 que pasa por el origen. Esta trayectoria apunta hacia hacia el origen pues $m_1 < 0$ implica que $x(t)$ e $y(t)$ tienden a cero cuando t aumenta.

- Cuando $c_1 = 0$ se tiene

$$y = \frac{B_2}{A_2} x, \tag{5.56}$$

  es decir, la trayectoria es una línea recta de pendiente B_2/A_2 que pasa por el origen. Esta trayectoria apunta hacia hacia afuera del origen pues $m_2 > 0$.

- En general, cuando $c_1 \neq 0$ y $c_2 \neq 0$ las trayectorias vienen dadas por

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 \,\mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 B_2 \,\mathrm{e}^{m_2 t}}{c_1 A_1 \,\mathrm{e}^{m_1 t} + c_2 A_2 \,\mathrm{e}^{m_2 t}}. \tag{5.57}$$

  Pero

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{y}{x} &= \frac{B_2}{A_2}, \\ \lim_{t\to-\infty} \frac{y}{x} &= \frac{B_1}{A_1}, \end{aligned}$$

  dado que $m_1 < 0 < m_2$. Por tanto encontramos que las trayectorias son curvas que "vienen" asintóticamente de la recta $y/x = B_1/A_1$ (es decir, que tienden hacia esta recta para t decrecientes) y tienden asintóticamente a la recta $y/x = B_2/A_2$ con t creciente. A este tipo de punto crítico se le llama *punto de silla* (véase la figura 5.7). Este punto es, por supuesto, inestable.

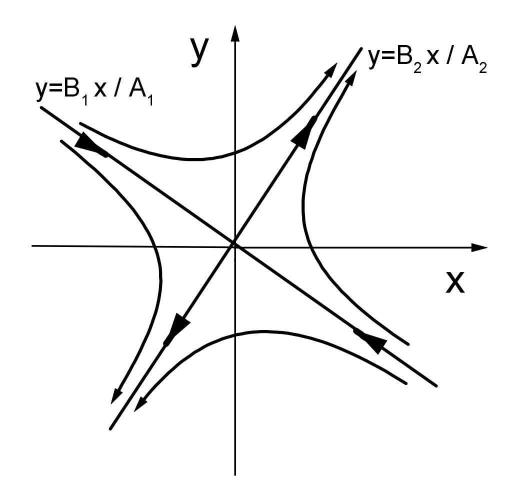


Figura 5.7: Trayectorias en el plano de fases en torno a un punto de silla.

▷ ***Ejercicio** 5.1*

Demuestra que, en la solución (5.51) *y en términos de la condiciones iniciales* $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, *las constantes* c_1 *y* c_2 *vienen dadas por*

$$c_1 = \frac{A_2 y_0 - B_2 x_0}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \qquad c_2 = \frac{A_1 y_0 - B_1 x_0}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Caso B. RAÍCES COMPLEJAS CONJUGADAS $m_{1,2} = \alpha \pm i\beta$.

Caso B-1. *Raíces imaginarias puras:* $\alpha = 0$.

Las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ son ahora combinaciones lineales de $\exp(i\beta t)$ y $\exp(-i\beta t)$, es decir, combinaciones lineales de $\cos(\beta t)$ y $\operatorname{sen}(\beta t)$:

$$\begin{cases} x(t) = c_1(\bar{A}_1 \cos\beta t - \bar{A}_2 \operatorname{sen}\beta t) + c_2(\bar{A}_1 \operatorname{sen}\beta t + \bar{A}_2 \cos\beta t), \\ y(t) = c_1(\bar{B}_1 \cos\beta t - \bar{B}_2 \operatorname{sen}\beta t) + c_2(\bar{B}_1 \operatorname{sen}\beta t + \bar{B}_2 \cos\beta t). \end{cases} \tag{5.58}$$

donde $A_1 = \bar{A}_1 + i\bar{A}_2$ y $B_1 = \bar{B}_1 + i\bar{B}_2$ son las soluciones (complejas) de (5.39) correspondientes a la raíz m_1 [Sim93, Sec. 56]. Es decir, las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ son funciones periódicas por lo que todas las trayectorias $(x(t), y(t))$ son curvas cerradas en el espacio de fases. El punto crítico $(0,0)$ es estable pero no asintóticamente estable. A este punto crítico se le llama *centro* (véase la figura 5.8).

El *sentido del giro* de las trayectorias puede determinarse fácilmente a partir del sistema de ecuaciones (5.37) examinando, por ejemplo, en qué sentido las trayectorias solución cortan al eje de ordenadas $(x = 0)$, es decir, examinando el signo de $\dot{x}$ para $x = 0$: si $\dot{x} < 0$ para $(x = 0, y > 0)$ [o $\dot{x} > 0$ para $(x = 0, y < 0)$] entonces la trayectorias giran en sentido contrario a las agujas del reloj, si $\dot{x} > 0$ para $(x = 0, y > 0)$ [o $\dot{x} < 0$ para $(x = 0, y < 0)$] entonces la trayectorias giran en el sentido de las agujas del reloj. Por supuesto, igual de válido y sencillo es determinar el sentido de giro examinando el sentido en el que las trayectorias solución cortan al eje de abcisas $(y = 0)$.

▷ ***Ejercicio** 5.2*

Demuestra que los centros son estables, pero no asintóticamente estables. El ejemplo 5.2 puede servirte de ayuda pues en él está hecha esencialmente esta demostración.

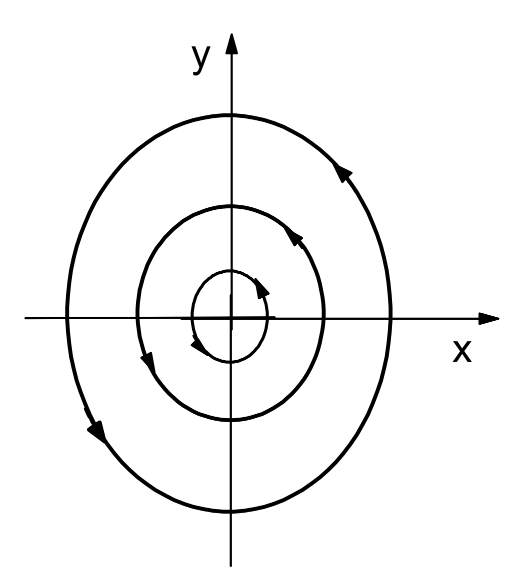


Figura 5.8: Trayectorias en el plano de fases para un centro.

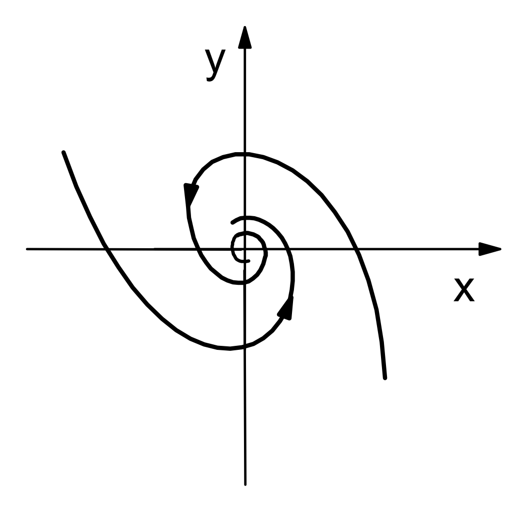


Figura 5.9: Trayectorias en el plano de fases para un foco estable.

Caso B-2. *Raíces complejas conjugadas con parte real negativa:* $\alpha < 0$. La solución general dada por (5.51) se puede escribir en este caso como

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}[c_1(\bar{A}_1 \cos \beta t - \bar{A}_2 \operatorname{sen} \beta t) + c_2(\bar{A}_1 \operatorname{sen} \beta t + \bar{A}_2 \cos \beta t)], \\ y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}[c_1(\bar{B}_1 \cos \beta t - \bar{B}_2 \operatorname{sen} \beta t) + c_2(\bar{B}_1 \operatorname{sen} \beta t + \bar{B}_2 \cos \beta t)]. \end{cases} \tag{5.59}$$

donde $A_1 = \bar{A}_1 + i\bar{A}_2$ y $B_1 = \bar{B}_1 + i\bar{B}_2$ son las soluciones (complejas) de (5.39) correspondientes a la raíz m_1 [Sim93, Sec. 56]. Las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen la forma de oscilaciones amortiguadas (pues $\alpha < 0$) y por lo tanto la trayectoria $(x(t), y(t))$ en el plano de fases es una espiral que se dirige hacia el centro $(0, 0)$. El punto crítico $(0, 0)$ es asintóticamente estable y se le llama *foco estable* o *punto en espiral estable* (véase la figura 5.9).

Caso B-3. *Raíces complejas conjugadas con parte real positiva:* $\alpha > 0$.

Este caso es igual al anterior: la solución viene también dada por (5.59), pero ahora las oscilaciones son crecientes, por lo que la trayectorias en el plano de fases son espirales

que escapan del centro. A este punto crítico se le llama *foco inestable punto en espiral inestable.*

El *sentido del giro* de las trayectorias de las espirales puede determinarse fácilmente mediante el procedimiento que explicamos para determinar el sentido de giro de los centros, es decir, examinando en qué dirección los brazos de la espiral cortan al eje de ordenadas ($x = 0$): si $\dot{x} < 0$ para $(x = 0, y > 0)$ [o $\dot{x} > 0$ para $(x = 0, y < 0)$] entonces la trayectorias giran en sentido contrario a las agujas del reloj, si $\dot{x} > 0$ para $(x = 0, y > 0)$ [o $\dot{x} < 0$ para $(x = 0, y < 0)$] entonces la trayectorias giran en el sentido de las agujas del reloj.

Caso C. RAÍCES IGUALES $m_1 = m_2 = m$.

Distinguiremos dos casos:

1. Cuando los coeficientes del sistema (5.37) cumplen que

$$\begin{cases} a_1 = b_2 \equiv a \neq 0, \\ a_2 = b_1 = 0, \end{cases} \tag{5.60}$$

se tiene que este sistema se reduce al sistema desacoplado

$$\begin{cases} \dot{x} = a\,x, \\ \dot{y} = a\,y\;. \end{cases} \tag{5.61}$$

2. Todas las demás posibilidades que conducen a una raíz doble.

Caso C-1. *Sistema desacoplado.*

Si introducimos las condiciones dadas en (5.60) en la ecuación característica (5.40), obtenemos que $m = a$ es una raíz doble:

$$m^2 - 2\,a\,m + a^2 = 0 \longrightarrow (m-a)^2 = 0 \Rightarrow m = a.$$

En este caso, la solución del sistema (5.37), o equivalentemente, del sistema desacoplado (5.61), es

$$x = c_1\,\mathrm{e}^{mt},$$
$$y = c_2\,\mathrm{e}^{mt}\,.$$

Por tanto $y/x = c_1/c_2$ para todo c_1 y c_2, es decir, todas las trayectorias son rectas que se cortan en el origen. Al este punto crítico se le llama nodo radial. Si $m < 0$, el nodo es asintóticamente estable, y si $m > 0$, el nodo es inestable (véase la figura 5.10).

Caso C-2. *Todas las demás posibilidades que conducen a una raíz doble.*

Para este caso, la solución general del sistema lineal autónomo dado por la ecuación (5.37) es

$$x(t) = c_1 A\,\mathrm{e}^{m\,t} + c_2(A_1 + A\,t)\;\mathrm{e}^{m\,t},$$
$$y(t) = c_1 B\,\mathrm{e}^{m\,t} + c_2(B_1 + B\,t)\;\mathrm{e}^{m\,t},$$

donde A, A_1, B, B_1 son constantes definidas y c_1, c_2 son constantes arbitrarias. Analizemos a continuación la forma que adoptan las distintas trayectorias (soluciones) posibles en el espacio de fases.

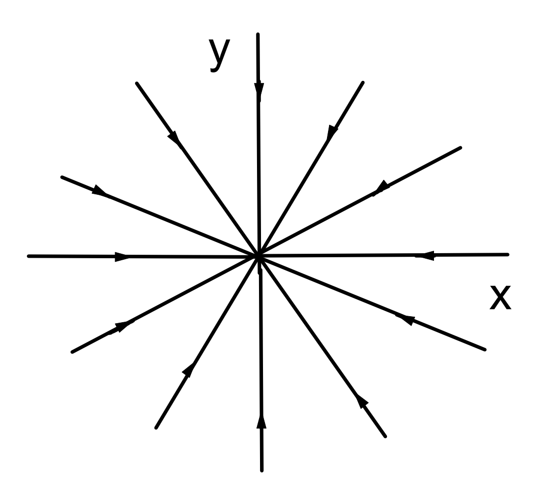


Figura 5.10: Trayectorias en el plano de fases del nodo radial estable.

- Para $c_2 = 0$, se tiene la solución

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= c_1 A\, \mathrm{e}^{m\,t} \\ y(t) &= c_1 B\, \mathrm{e}^{m\,t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{B}{A}\,,$$

  es decir, hay una trayectoria con forma de una recta de pendiente B/A que pasa por el origen.

- La ecuación de las trayectorias generales son las curvas

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B\, \mathrm{e}^{m\,t} + c_2 (B_1 + B\,t)\ \mathrm{e}^{m\,t}}{c_1 A\, \mathrm{e}^{m\,t} + c_2 (A_1 + A\,t)\ \mathrm{e}^{m\,t}} = \frac{c_1 B + c_2 B_1 + c_2 B\,t}{c_1 A + c_2 A_1 + c_2 A\,t}.$$

  Pero vemos que

$$\lim_{t\to\infty} = \frac{B}{A},$$

  luego todas estas trayectorias tienden asintóticamente a la recta $y = Bx/A$ cuando $t \to \infty$. De igual modo, dado que

$$\lim_{t\to-\infty} = \frac{B}{A},$$

  las trayectorias "vienen" asintóticamente de la recta $y = Bx/A$. A estos puntos críticos se les llama nodos (véase la figura 5.11). Nótese que estos nodos son asintóticamente estables si $m < 0$.

La siguiente tabla resume lo visto en esta sección:

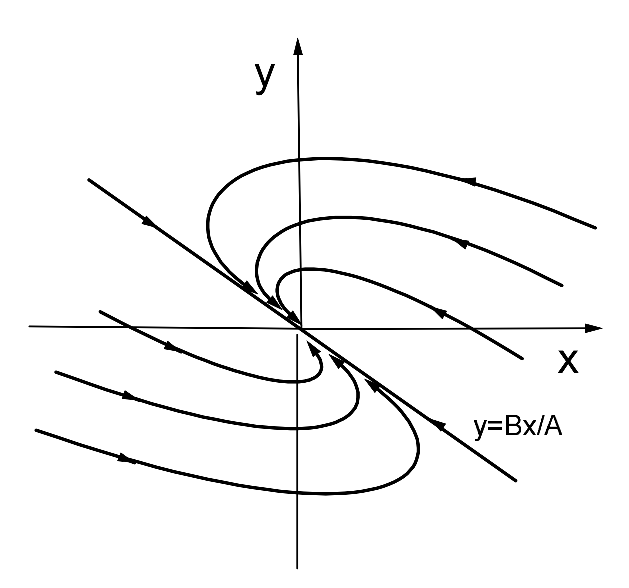


Figura 5.11: Trayectorias en el plano de fases para un nodo con raíz doble.

Naturaleza de las raíces m_1 y m_2 de la ecuación característica.	**Naturaleza del punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal.**	**Estabilidad del punto crítico.**
Reales, desiguales y del mismo signo.	Nodo.	Asintóticamente estable si las raíces son negativas; inestable si las raíces son positivas.
Reales, desiguales y de signo contrario.	Punto de silla.	Inestable.
Reales e iguales.	Nodo.	Asintóticamente estable si las raíces son negativas; inestable si las raíces son positivas.
Complejas conjugadas pero no imaginarias puras.	Punto espiral.	Asintóticamente estable si la parte real de las raíces es negativa; inestable si la parte real de las raíces es positiva.
Imaginarias puras.	Centro.	Estable, pero no asintóticamente estable.

En lo que se refiere a la estabilidad de los sistemas lineales, lo que hemos visto hasta ahora puede resumirse así:

El punto crítico $(0,0)$ del sistema lineal (5.37) es *estable* si y sólo si las *dos* raíces de la ecuación característica tienen parte real *no positiva* y es *asintóticamente estable* si y sólo si las *dos* raíces tienen parte real *negativa*.

Veamos, finalmente, otro modo de discriminar la estabilidad de los puntos críticos atendiendo a los coeficientes de la ecuación característica. Si la ecuación característica la escribimos de la forma

$$m^2 - (a_1 + b_2)\, m + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = (m - m_1)\,(m - m_2) = m^2 + p\, m + q = 0$$

se tiene que las raíces m_1 y m_2 vienen dadas por

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \, .$$

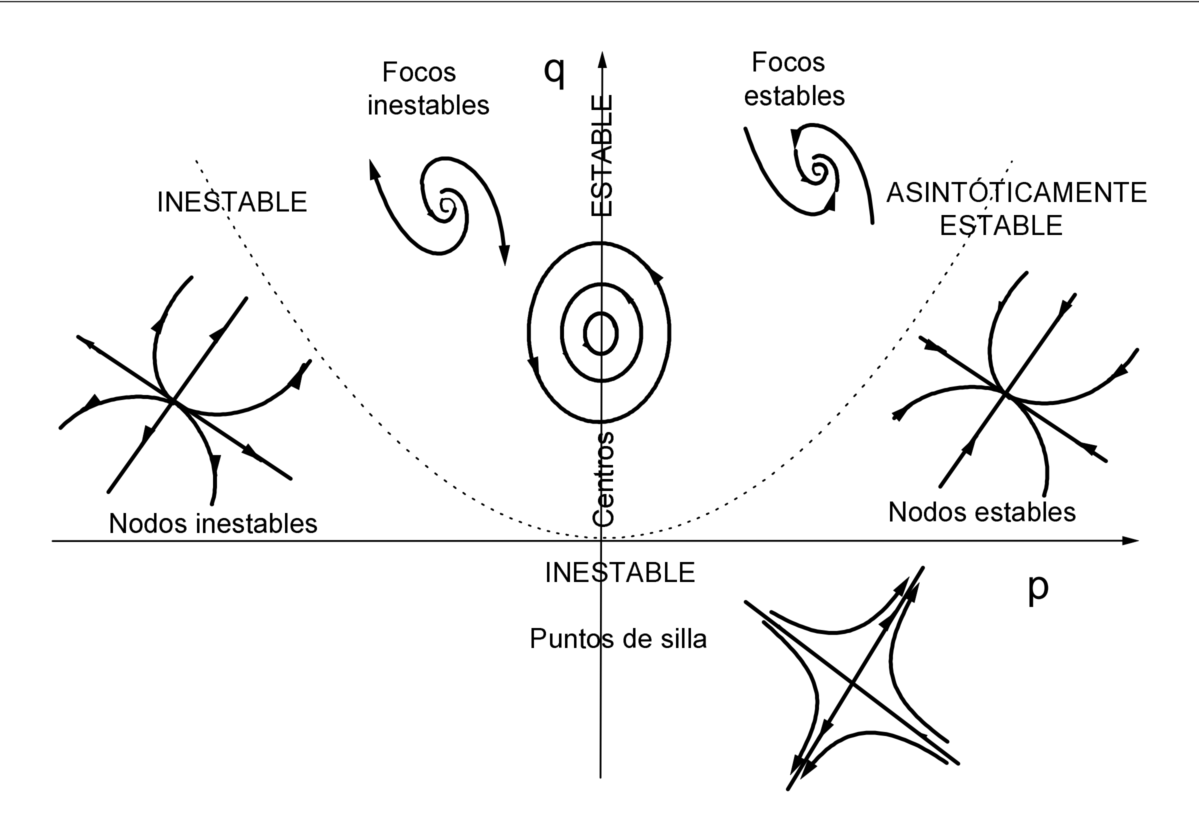


Figura 5.12: Diagrama que muestra los distintos comportamientos del punto crítico $(0,0)$ de un sistema de ecuaciones lineales dependiendo de los valores de p y q. La línea de puntos es una parábola dada por la ecuación $q = p^2/4$ que separa los focos de los nodos.

Es muy fácil analizar la estabilidad del punto crítico en términos de p y q. El resultado del análisis se muestra en la figura 5.12. Por ejemplo, encontramos que el punto crítico $(0,0)$ es asintóticamente estable si y sólo si los coeficientes $p = -(a_2 + b_2)$ y $q = a_1 b_2 - a_2 b_1$ de la ecuación característica son ambos positivos.[9]

▷ ***Ejercicio*** *5.3*

1. *En esta sección hemos ido estableciendo sin demostración, porque nos parecía evidente, cuál era la estabilidad del punto crítico* $(0,0)$*, esto es, la estabilidad de la solución* $(x(t), y(t)) = (0,0)$ *del sistema (5.37). No obstante, puede ser un ejercicio instructivo determinar la estabilidad de cada tipo de punto crítico aplicando cuidadosamente la definición de estabilidad que vimos en la sección 5.2.*
2. *Comprueba los resultados sintetizados en la figura 5.12.*
3. *Sea el sistema*

$$\frac{d}{dt}X(t) = F\,X(t)$$

con

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

y

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

[9]Éste es el criterio de Hurwitz para $n = 2$; véase la sección 5.3.2.

a) *Sea*

$$F = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

es decir, sea el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases} \tag{5.62}$$

Demuestra que su solución general viene dada por

$$X(t) = c_1\, \mathrm{e}^{m_1 t}\, \vec{\xi}_1 + c_2\, \mathrm{e}^{m_2 t}\, \vec{\xi}_2 \tag{5.63}$$

donde $m_1 = -2$ *y* $m_2 = -1$ *son los autovalores de la matriz de coeficientes* F *y*

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix},$$

son sus correspondientes autovectores. Demuestra que si en $t = 0$ *la solución pasa por* $X_0 = (0, 1/2)$, *entonces* $c_1 = 1$ *y* $c_2 = -1$. *Por último demuestra que la solución nula [o punto crítico (0,0)] es asintóticamente estable.*

b) *Demuestra que la solución general del sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y, \end{cases} \tag{5.64}$$

viene dada por (5.63) *donde* $m_1 = -1$ *y* $m_2 = 2$ *son los autovalores de la matriz de coeficientes y*

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

son sus correspondientes autovectores. Demuestra que la solución nula [o punto crítico (0,0)] no es estable.

c) *Demuestra que la solución general del sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 3y, \end{cases} \tag{5.65}$$

viene dada por (5.63) *donde* $m_1 = -2 - i$ *y* $m_2 = -2 + i$ *son los autovalores de la matriz de coeficientes y*

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 - i \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 \end{pmatrix},$$

son sus correspondientes autovectores. Demuestra que la solución nula [o punto crítico (0,0)] es asintóticamente estable.

d) *Encuentra la solución general del sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - y, \end{cases} \tag{5.66}$$

y demuestra que la solución nula [o punto crítico (0,0)] no es estable.

5.3.2. Sistemas con más de dos ecuaciones

Para sistemas lineales autónomos con coeficientes constantes con más de dos ecuaciones, es decir, para

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{5.67}$$

con $n \geq 3$ y a_{ij} constante, los criterios para decidir sobre la estabilidad de la solución nula son los mismos que hemos visto en la sección anterior. De hecho, el resultado enmarcado en la página 294 es esencialmente válido para sistemas con más ecuaciones cambiando la palabra "dos" por "todas"; es decir:

> El punto crítico $(0, 0, \cdots, 0)$ del sistema lineal (5.67) es *estable* si y sólo si *todas* las raíces de la ecuación característica tienen parte real *no positiva* y es *asintóticamente estable* si y sólo si todas las raíces tienen parte real *negativa*.

Por supuesto, la ecuación característica viene dada por

$$\begin{vmatrix} a_{11}-m & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-m & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-m \end{vmatrix} = 0. \tag{5.68}$$

Gracias al criterio de Hurwitz (también llamado criterio de Routh-Hurwitz) es posible saber si es negativa la parte real de todas las raíces de nuestra ecuación característica sin necesidad de calcularlas:

Teorema 5.1 (Criterio de Hurwitz) *Todas las raíces de la ecuación*

$$c_0x^n + c_1x^{n-1} + \cdots + c_{n-1}x + c_n = 0,$$

con $c_0 > 0$, tendrán partes reales negativas si, y sólo si, todos los determinantes D_m definidos por

$$\begin{aligned} D_1 &= c_1, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}, \\ D_4 &= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{vmatrix}, \\ &\vdots \\ D_n &= \begin{vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{2n-1} & c_{2n-2} & c_{2n-3} & \cdots & c_n \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{5.69}$$

son positivos, siendo $c_m = 0$ *para* $m > n$.

▷ ***Ejercicio*** *5.4*

Utiliza el criterio de Hurwitz para demostrar que:

1. *Todas las raíces de la ecuaciones*

$$x^4 + 2\,x^3 + 14\,x + 15 = 0$$

   y

$$x^5 + 2\,x^4 - 8\,x^3 - 8\,x^2 + 31\,x + 30 = 0$$

   tienen parte real negativa.

2. *Alguna(s) de las raíces de las ecuaciones*

$$x^4 - 6\,x^3 + 16\,x^2 - 26\,x + 15 = 0$$

   y

$$x^5 - 10\,x^3 + 10\,x^2 + 29\,x - 30 = 0$$

   tienen parte real no negativa.

5.4. Estabilidad de sistemas no lineales

Ahora estudiaremos algunos criterios que nos permitirán determinar la estabilidad de los puntos críticos de sistemas **no lineales** autónomos.

Nos restringiremos, sin excesiva pérdida de generalidad, al caso de un sistema de segundo orden:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y). \end{cases} \tag{5.70}$$

Además, vamos a suponer (i) que el punto crítico está aislado, es decir, que existe un entorno en el que no hay ningún otro punto crítico, y (ii) que está situado en el origen.[10]

5.4.1. Campo vectorial de direcciones y trayectorias solución

Un procedimiento muy sencillo y eficaz para determinar gráficamente las trayectorias solución del sistema (5.70) y, por consiguiente, para determinar la estabilidad de sus puntos críticos, consiste en representar el campo vectorial de las direcciones (o pendientes) de las trayectorias en la zona del plano de fases de interés (por ejemplo, en las vecindades de los puntos críticos, si queremos conocer la estabilidad de estos puntos). Para llevar a cabo esta representación se eligen unos cuantos puntos (x,y) en la zona del plano de fase que nos interese y trazamos con origen en cada uno de estos puntos un vector (una flecha) $\vec{v}(x,y) = (v_x, v_y)$ con componentes proporcionales a $F(x,y)$ y $G(x,y)$, respectivamente, es decir

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} F(x,y) \\ G(x,y) \end{pmatrix} \tag{5.71}$$

donde c es un número arbitrario pero independiente de los puntos (x,y) escogidos. En la figura

[10] Lo consideraremos así por sencillez en la exposición. Si el punto crítico estuviera situado en otro punto, digamos en (x_0, y_0), analizaríamos su comportamiento estudiando la estabilidad del punto crítico $(\bar{x} = 0, \bar{y} = 0)$ donde $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$.

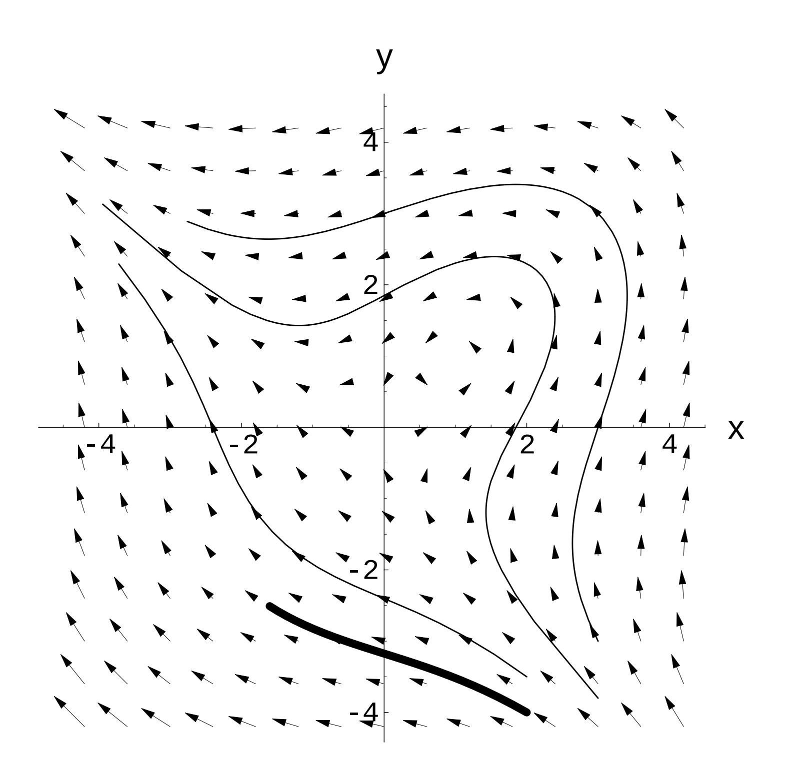


Figura 5.13: Campo vectorial de direcciones del sistema no lineal (5.72) y tres trayectorias solución (líneas continuas delgadas) que comenzaron en $(x, y) = (3, -3)$, $(x, y) = (2, -3'5)$ y $(x, y) = (3, -3'8)$.

5.13 se ha representado el campo vectorial del sistema no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y, \end{cases} \tag{5.72}$$

junto con tres trayectorias solución que comenzaron en tres puntos distintos del plano de fases (x, y). Se ve en la figura que los vectores y las trayectorias de las soluciones se disponen de forma alineada allí donde los vectores y las trayectorias coinciden, es decir, se observa que los vectores situados sobre las trayectorias son tangentes a las mismas. Esto no es casual como es fácil de entender: la pendiente dy/dx de la tangente a la trayectoria en el punto (x, y) puede obtenerse dividiendo la segunda ecuación de (5.70) por la primera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

de modo que esta pendiente es justamente igual a la pendiente del vector $\vec{v}(x, y)$ que pasa por el punto (x, y). Podemos entender esto de un modo ligeramente diferente: la primera ecuación de (5.70) nos dice que durante el tiempo dt la abcisa x de la trayectoria solución cambia en la cantidad $dx = F(x, y)dt$; la segunda ecuación de (5.70) nos dice que la ordenada y cambia en la cantidad $dy = G(x, y)dt$. Luego durante el intervalo de tiempo dt la solución del sistema pasa de (x, y) a $(x + F(x, y)dt, y + G(x, y)dt)$. Luego un vector que vaya del punto (x, y) al punto $(x + F(x, y)dt, y + G(x, y)dt)$ nos está indicando el sentido en el que se traza la trayectoria solución. Este vector es justamente proporcional al vector $\vec{v}(x, y)$ definido en (5.71). Además, la

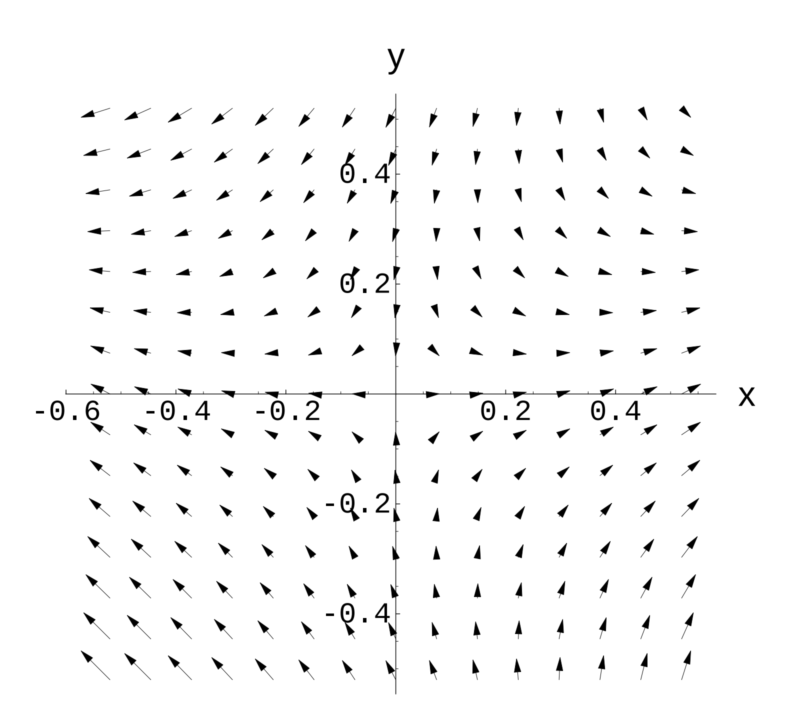


Figura 5.14: Campo vectorial de direcciones del sistema no lineal (5.72) en las vecindades del punto crítico $(0,0)$.

magnitud de $F(x,y)$ y $G(x,y)$, y por consiguiente, el tamaño de la flecha $\vec{v}(x,y)$ que aparece en el diagrama de fases, nos indica la rapidez con la que se recorre la trayectoria solución en el punto (x,y).

En resumen, una vez construido el campo vectorial de direcciones podemos trazar la trayectoria solución que pasa por cualquier punto sin más que trazar una línea que se dirija siempre en la dirección en la que apuntan las flechas $\vec{v}(x,y)$ sobre las que pasa la trayectoria. Por supuesto, esto es tanto más fácil de llevar a cabo cuanto mayor sea el número de flechas dibujadas. Por ejemplo, no debería ser difícil para el lector continuar en la figura 5.13 con la trayectoria, trazada con línea más gruesa, que comienza en el punto $(x,y) = (3,-4)$ y que se ha truncado en las vecindades del punto $(x,y) = (-2,-3)$.

En la figura 5.13 es difícil apreciar cómo se comportan las trayectorias en las vecindades del punto crítico situado en el origen, $(x,y) = (0,0)$. Por ello es conveniente trazar con más detalle el campo vectorial en las vecindades del origen. Esto se ha llevado a cabo en la figura 5.14. Es ahora evidente que el campo vectorial en las vecindades del punto crítico $(0,0)$ es el propio de un punto de silla: $(0,0)$ es un punto inestable.

▷ ***Ejercicio*** *5.5*

1. *Excepto en los punto críticos, las trayectorias de los sistemas autónomos (5.37)* nunca se cortan. *Sin embargo, esta propiedad no se verifica para sistemas no autónomos. ¿Por qué? Pista: si dos trayectorias se cortaran en un punto ¿en qué dirección apuntaría el vector del campo vectorial situado sobre el punto de corte? ¿se alinearía con una trayectoria y no con la otra? ¿es esto posible?*

2. *Determina cuál de los campos vectoriales de la figura 5.15 es el campo vectorial correspondiente a cada uno de los sistemas dados en las ecuaciones (5.62), (5.64), (5.65) y (5.66) del ejercicio 5.3.*

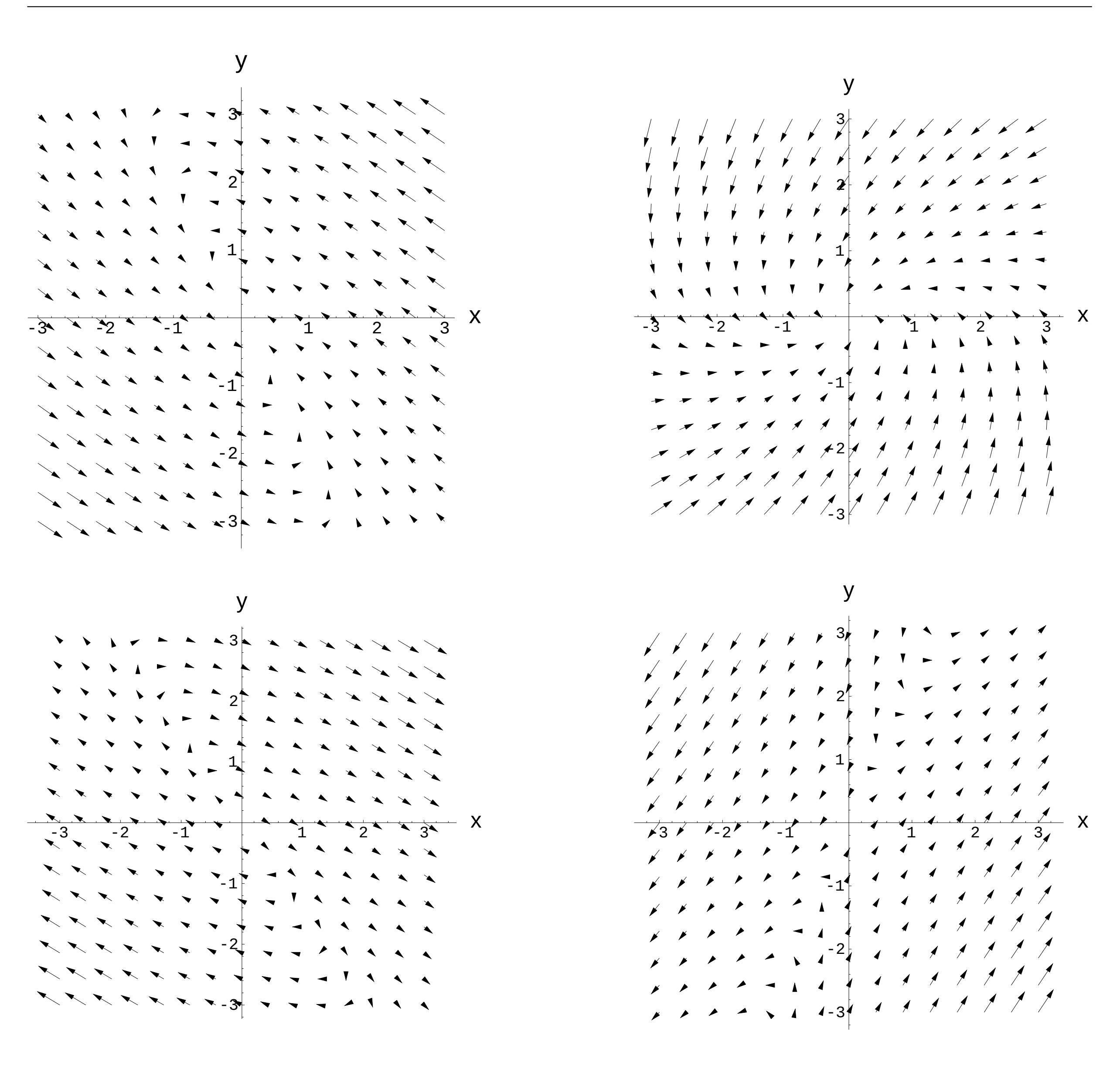


Figura 5.15: Campos vectoriales de las trayectorias de los sistemas (5.62), (5.64), (5.65) y (5.66)

5.4.2. Estabilidad en torno a los puntos críticos simples

Sea un sistema autónomo no lineal descrito por la ecuación (5.70) que, en esta sección, escribiremos así:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + f(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + g(x,y). \end{cases} \tag{5.73}$$

Además, vamos a asumir que:

1. $a_1,\ b_1,\ a_2$ y b_2 son constantes reales que cumplen que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5.74}$$

2. f y g son funciones que tienen primeras derivadas parciales continuas para todo (x, y) y además
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{5.75}$$

Bajo estas condiciones, el origen $(0, 0)$ es un punto crítico *aislado* del sistema (5.73) que se conoce como punto crítico **simple**.

▶ *Ejemplo 5.5*

Sea el sistema
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2y + x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 2y + 2y^2. \end{aligned} \tag{5.76}$$
Se ve claramente que es de la forma (5.73) y que satisface la condición (5.74):
$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Además, como $f(x, y) = x^2$ y $g(x, y) = 2y^2$, también se satisface la condición (5.75):
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = 0, \quad \text{para todo } \theta, \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{2r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r} = 0, \quad \text{para todo } \theta, \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio (coordenadas polares) $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. El punto crítico $(0, 0)$ es, por tanto, un *punto crítico simple.*

◀

La condición (5.75) exige que los términos no lineales del sistema (5.73) [es decir, $f(x, y)$ y $g(x, y)$] tiendan a cero más rápidamente que los términos lineales. Por tanto, parece sensato conjeturar que el comportamiento de las trayectorias del sistema (5.73) cerca del punto crítico $(0, 0)$ esté dominado por los términos más relevantes (es decir, por los lineales) y, por tanto, las trayectorias del sistema no lineal sean muy similares a las del sistema resultante tras despreciar los términos no lineales.[11] La figura 5.16 puede servir para aclarar esta idea un poco más. En la figura 5.16(a) se ha representado el campo vectorial de direcciones en las vecindades del origen para el sistema no lineal (5.76) del ejemplo 5.5, mientras que en la figura 5.16(b) se ha representado el campo vectorial de direcciones en las vecindades del origen para el sistema lineal resultante al despreciar los términos no lineales, es decir, el sistema
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x + 2y. \end{aligned} \tag{5.77}$$

Como se puede apreciar [¡y como era de esperar pues los términos no lineales $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son cuadráticos!] los dos campos vectoriales son casi indistinguibles (tanto más cuanto más cerca del origen miremos), por lo que es inmediato concluir que las trayectorias solución de ambos sistemas en las vecindades de $(0, 0)$ serán casi idénticas. Esto implica que tanto para el sistema no lineal

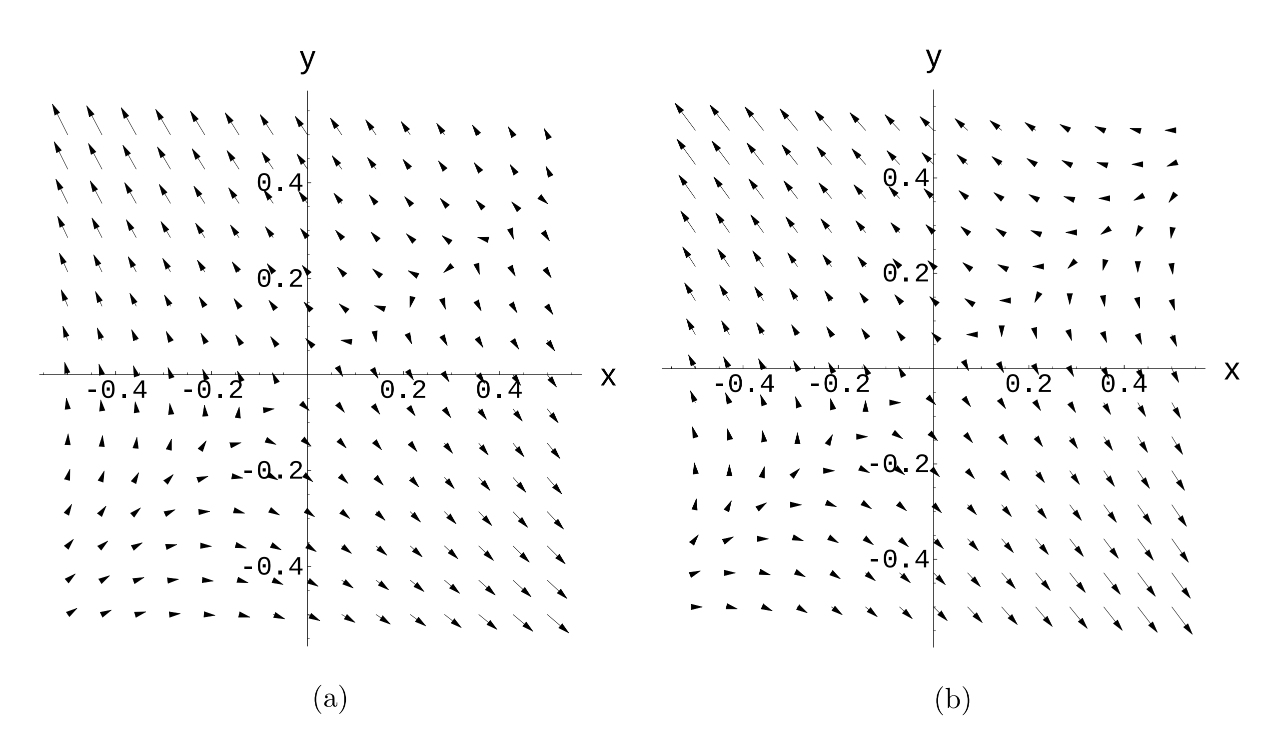


Figura 5.16: (a) Campo vectorial de direcciones del sistema no lineal (5.76). (b) Lo mismo pero para el sistema lineal asociado (5.77).

como para el no lineal el punto crítico $(0,0)$ será del mismo tipo (en este ejemplo, es un punto de silla) y su estabilidad será la misma (en este ejemplo, el punto es inestable).

Al sistema resultante tras despreciar los términos no lineales se le conoce como sistema lineal asociado al sistema no lineal original. Por consiguiente, el sistema lineal asociado al sistema (5.73) es

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y. \end{cases} \tag{5.78}$$

La conjetura que discutimos hace un momento es confirmada por los siguientes teoremas:

Teorema 5.2 (Tipo del punto crítico) *Sea $(0,0)$ un punto crítico simple de un sistema no lineal y sean m_1 y m_2 las dos raíces características de su sistema lineal asociado. Sucede que:*

1. *Si m_1 y m_2 son reales, desiguales y del mismo signo, entonces $(0,0)$ es un nodo para ambos sistemas.*

2. *Si m_1 y m_2 son reales, desiguales y signo contrario, entonces $(0,0)$ es un punto de silla para ambos sistemas.*

3. *Si m_1 y m_2 son reales e iguales y el sistema linealizado no está desacoplado, (es decir no sucede que $a_1 = b_2 \neq 0,\ a_2 = b_1 = 0$) entonces $(0,0)$ es un nodo para ambos sistemas.*

4. *Si m_1 y m_2 son complejas conjugadas con parte real no nula, entonces $(0,0)$ es un punto de espiral para ambos sistemas.*

[11] Esta misma idea fue la que usamos en el ejemplo 5.3 para analizar la estabilidad de las órbitas planetarias circulares.

5. *Si m_1 y m_2 son reales e iguales y el sistema linealizado* <u>*sí*</u> *está desacoplado (es decir, sucede que $a_1 = b_2 \neq 0$, $a_2 = b_1 = 0$), entonces $(0,0)$, aunque es un nodo para el sistema linealizado,* puede *ser nodo o punto espiral para el sistema no lineal.*

6. *Si m_1 y m_2 son imaginarias puras entonces $(0,0)$, aunque es un centro del sistema linealizado,* puede *ser un centro o punto espiral para el sistema no lineal.*

Los casos recogidos en los apartados 5 y 6 se llaman *casos fronterizos.*

Teorema 5.3 (Estabilidad del punto crítico) *Sea $(0,0)$ en punto crítico simple de un sistema no lineal y sean m_1 y m_2 las dos raíces características de su sistema lineal asociado. Sucede que*

1. *Si m_1 y m_2 tienen parte real negativa, entonces $(0,0)$ es un punto crítico asintóticamente estable tanto para el sistema linealizado como para el no lineal.*

2. *Si m_1 y m_2 son imaginarias puras, entonces el punto crítico $(0,0)$ aunque es estable para el sistema linealizado, no es necesariamente estable para el sistema no lineal, pudiendo ser asintóticamente estable, estable o inestable.*

3. *Si alguna de las raíces m_1 y m_2 tiene parte real positiva, entonces $(0,0)$ es un punto crítico inestable tanto para el sistema linealizado como para el sistema no lineal.*

No demostraremos estos teoremas, pero sí los ilustraremos con un par de ejemplos.

► *Ejemplo 5.6*

Consideremos el sistema no lineal siguiente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 4y - x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y + 2x\,y. \end{aligned} \tag{5.79}$$

Este sistema es de la forma (5.73), donde $f(x,y) = -x^2$ y $g(x,y) = 2x\,y$. Es fácil comprobar que se satisfacen las condiciones (5.74) y (5.75), por lo que $(0,0)$ es un punto crítico simple. Esto significa que podemos intentar caracterizarlo (saber su tipo y estabilidad) usando el teorema 5.2. Empezamos construyendo el sistema lineal asociado a nuestro sistema no lineal original:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 4y, \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y. \end{aligned}$$

Vemos que la ecuación característica (5.40) de este sistema es

$$\begin{vmatrix} 1-m & 4 \\ 6 & -1-m \end{vmatrix} = m^2 - 25 = 0,$$

con lo cual las raíces son $m_1 = 5$ y $m_2 = -5$, es decir, reales, distintas y de signo contrario. Entonces el punto crítico $(0,0)$, según el apartado A-3 de la página 289, es un punto de silla. Esto significa, según el teorema 5.2, que el punto crítico $(0,0)$ de sistema no lineal original (5.79) es también un punto de silla. En la figura 5.17 se da el campo vectorial de las direcciones correspondiente a la ecuación (5.79).
Como tarea extra vamos a calcular la ecuación de las trayectorias que siguen las soluciones de (5.79) en el plano de fases. Eliminando dt del sistema original, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x - y + 2xy}{x + 4y - x^2} \tag{5.80}$$

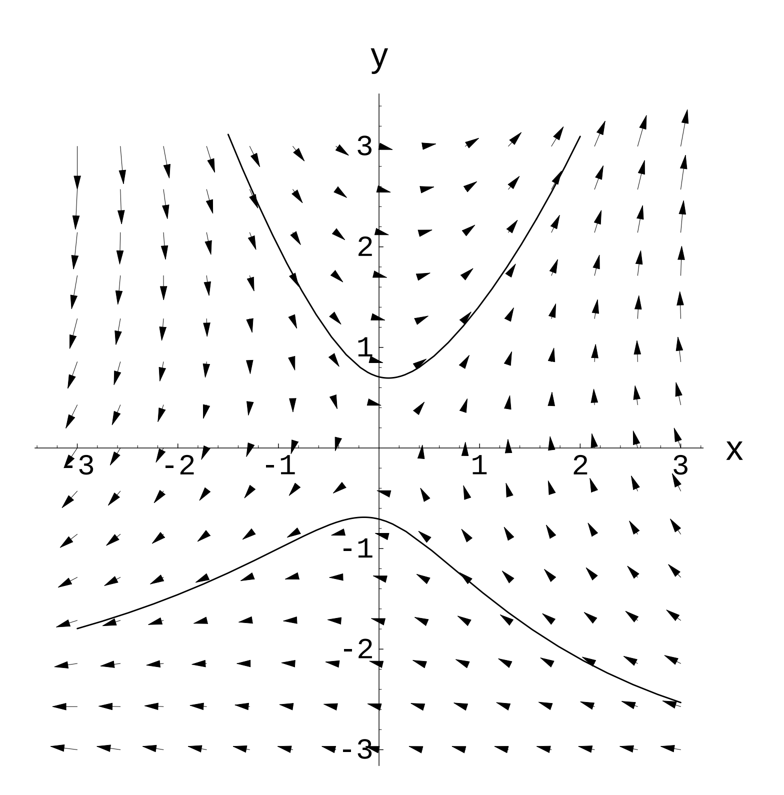


Figura 5.17: Campo vectorial de direcciones del sistema no lineal (5.79) y dos trayectorias solución.

que proporciona la pendiente de las trayectorias en el plano de fases (x, y). La solución de esta ecuación de primer orden es

$$x^2 y + 3x^2 - x\,y - 2y^2 + c = 0,$$

donde c es una constante arbitraria. Esta ecuación describe las trayectorias solución de (5.79) en el plano de fases. Esta ecuación cuadrática resolverse de forma explícita:

$$y(x) = \frac{-x + x^2 \pm \sqrt{8\,c + 25\,x^2 - 2\,x^3 + x^4}}{4}\,. \tag{5.81}$$

En la figura 5.17 mostramos dos trayectorias solución obtenidas ambas tomando $c = 1$ en (5.81), pero en un caso (línea inferior) usando la expresión con el signo positivo delante de la raíz y en el otro (línea superior) tomando el signo negativo.

▷ ***Ejercicio*** *5.6*

1. *Traza, con buen pulso, algunas otras trayectorias del sistema (5.79) sobre la figura 5.17.*
2. *Resuelve el sistema algebraico*

$$0 = x + 4y - x^2,$$
$$0 = 6x - y + 2x\,y,$$

para demostrar que el origen $(0, 0)$ *es el único punto crítico de* (5.79).

◀

▶ *Ejemplo 5.7*

Vamos a determinar el tipo y estabilidad de todos los puntos críticos de este sistema no lineal:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 8x - y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -6y + 6x^2. \end{aligned} \tag{5.82}$$

Las coordenadas (x, y) de los puntos críticos han de satisfacer el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{cases} 8x - y^2 = 0, \\ -6y + 6x^2 = 0. \end{cases} \tag{5.83}$$

Despejando la ordenada y, descubrimos que la abscisa x de los puntos críticos ha de ser solución de la ecuación

$$x\,(2 - x)\,(4 + 2x + x^2) = 0.$$

Esta ecuación posee únicamente dos raíces reales: $x = 0$ y $x = 2$. Las ordenadas y de los puntos críticos se obtienen sustituyendo estas raíces en cualquiera de las ecuaciones del sistema (5.83). De este modo obtenemos los puntos críticos $P_1 = (0, 0)$ y $P_2 = (2, 4)$.

◇ **Análisis del punto crítico** $P_1 = (0, 0)$

Empezamos construyendo el sistema linealizado del sistema original (5.82) en torno al punto $P_1 = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 8x, \\ \frac{dy}{dt} &= -6y. \end{aligned}$$

Es fácil darse cuenta que el sistema (5.82) tiene la forma del sistema (5.73) y que verifica las tres condiciones (véase la página 301) que hacen que $P_1 = (0, 0)$ sea un punto crítico simple. Su ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 8 - m & 0 \\ 0 & -6 - m \end{vmatrix} = m^2 - 2m - 48 = 0,$$

tiene por raíces a $m_1 = 8$ y $m_2 = -6$, que son reales, distintas y de signo contrario, por lo que el punto crítico $P_1 = (0, 0)$ del sistema no lineal (5.82) es, según el teorema 5.2, un *punto de silla* y, por tanto, inestable.

◇ **Análisis del punto crítico** $P_2 = (2, 4)$

Vamos ahora a estudiar el tipo y la estabilidad del punto crítico $P_2 = (2, 4)$. Para ello utilizamos un nuevo sistema de coordenadas (ζ, η) que se relaciona con el anterior mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \zeta &= x - 2, \\ \eta &= y - 4. \end{aligned} \tag{5.84}$$

De este modo, el punto crítico $P_2 = (x = 2, y = 4)$ queda situado en el origen $P_2 = (\zeta = 0, \eta = 0)$ del nuevo sistema de coordenadas. Insertando (5.84) en (5.82), expresamos el sistema no lineal original en términos de las nuevas coordenadas:

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dt} = 8\zeta - 8\eta - \eta^2, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = 24\zeta - 6\eta + 6\zeta^2. \end{cases} \tag{5.85}$$

Este sistema es de la forma (5.73), y es fácil ver también ahora que el punto crítico $(\zeta, \eta) = (0, 0)$ es un punto crítico *simple*. Por ello intentaremos analizaremos su estabilidad a partir del sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dt} &= 8\zeta - 8\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= 24\zeta - 6\eta, \end{aligned} \tag{5.86}$$

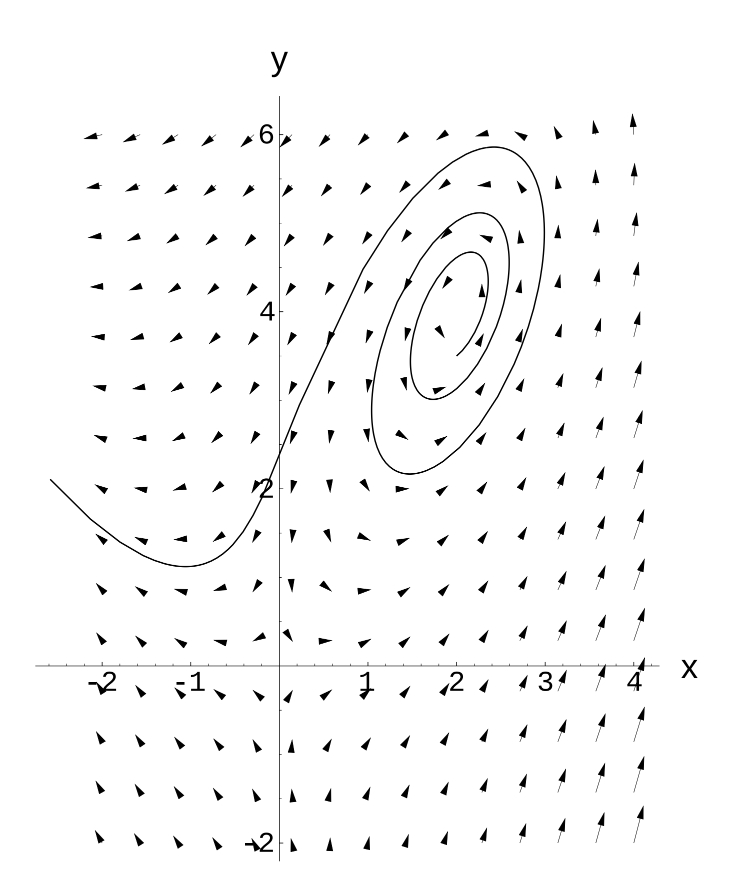


Figura 5.18: Campo vectorial de direcciones del sistema no lineal (5.82) y una trayectoria que comenzó en el punto $(2, 3'5)$.

que es el sistema linealizado asociado al sistema (5.85). La ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} 8-m & -8 \\ 24 & -6-m \end{vmatrix} = m^2 - 2m + 144 = 0.$$

Sus raíces, $m_{1,2} = 1 \pm \sqrt{143}\, i$, son complejas conjugadas con parte real positiva, por lo que, según el teorema 5.2, el punto crítico $P_2 = (\zeta = 0, \eta = 0) = (x = 2, y = 4)$ del sistema no lineal es un *foco (o punto espiral) inestable*. En la figura 5.18 hemos representado el campo vectorial de las direcciones de las trayectorias del sistema (5.82) junto con una trayectoria representativa.

◀

Linearización y Jacobiano

Hemos visto que, en determinadas circunstancias, para analizar la estabilidad de un sistema no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y), \end{cases} \tag{5.87}$$

en torno a un punto crítico (x_0, y_0) es conveniente construir el sistema lineal asociado en torno a este punto, o usando una terminología habitual, que es conveniente *linearizar* el sistema (5.87) en torno al punto crítico (x_0, y_0). En el ejemplo anterior (5.7) hemos visto cómo proceder

para hacer esto. Hay no obstante un procedimiento para linearizar un sistema que a menudo es más conveniente debido a su simplicidad algebraica. Veámoslo. Definamos dos nuevas variables independiente u y v (variables *perturbativas*) así: $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$. Sustituyendo estas expresiones en (5.87) obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x_0 + u) = \dfrac{du}{dt} = F(x_0 + u, y_0 + v), \\ \dfrac{d}{dt}(y_0 + v) = \dfrac{dv}{dt} = G(x_0 + u, y_0 + v), \end{cases} \tag{5.88}$$

o, desarrollando $F(x_0 + u, y_0 + v$ y $G(x_0 + u, y_0 + v)$ en serie de Taylor en torno al punto crítico (x_0, y_0),

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)\, u + F_y(x_0, y_0)\, v + \text{términos de orden } u^2,\ v^2,\ u\,v, \text{ y/o superior}, \\ \dfrac{dv}{dt} = G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)\, u + G_y(x_0, y_0)\, v + \text{términos de orden } u^2,\ v^2,\ u\,v, \text{ y/o superior}, \end{cases} \tag{5.89}$$

donde $F_x = \partial F/\partial x$, $F_y = \partial F/\partial y$, etc. Pero por definición de punto crítico $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ de modo que el sistema anterior se reduce, tras despreciar los términos no lineales, al sistema linearizado que estábamos buscando:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = F_x(x_0, y_0)\, u + F_y(x_0, y_0)\, v\,, \\ \dfrac{dv}{dt} = G_x(x_0, y_0)\, u + G_y(x_0, y_0)\, v\,, \end{cases} \tag{5.90}$$

o, en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} du/dt \\ dv/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{5.91}$$

donde la matriz

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) & F_y(x, y) \\ G_x(x, y) & G_y(x, y) \end{pmatrix} \tag{5.92}$$

se conoce como Jacobiano del sistema (5.87). La ecuación característica del sistema en el punto crítico (x_0, y_0) es simplemente

$$\det[\mathbf{J}(x_0, y_0) - m\mathbf{I}] = 0, \tag{5.93}$$

siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad [es decir, la matriz cuyo elemento (i, j) es $\delta_{i,j}$].

Casos fronterizos

En el apartado anterior (página 304) se dijo que estamos en un caso fronterizo cuando el punto crítico es un nodo radial o un centro. En estos casos no podemos decidir de qué tipo es el punto crítico del sistema no lineal a partir del análisis del sistema linealizado. Veamos un par de ejemplos.

► *Ejemplo 5.8*

El punto crítico $(0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \tag{5.94}$$

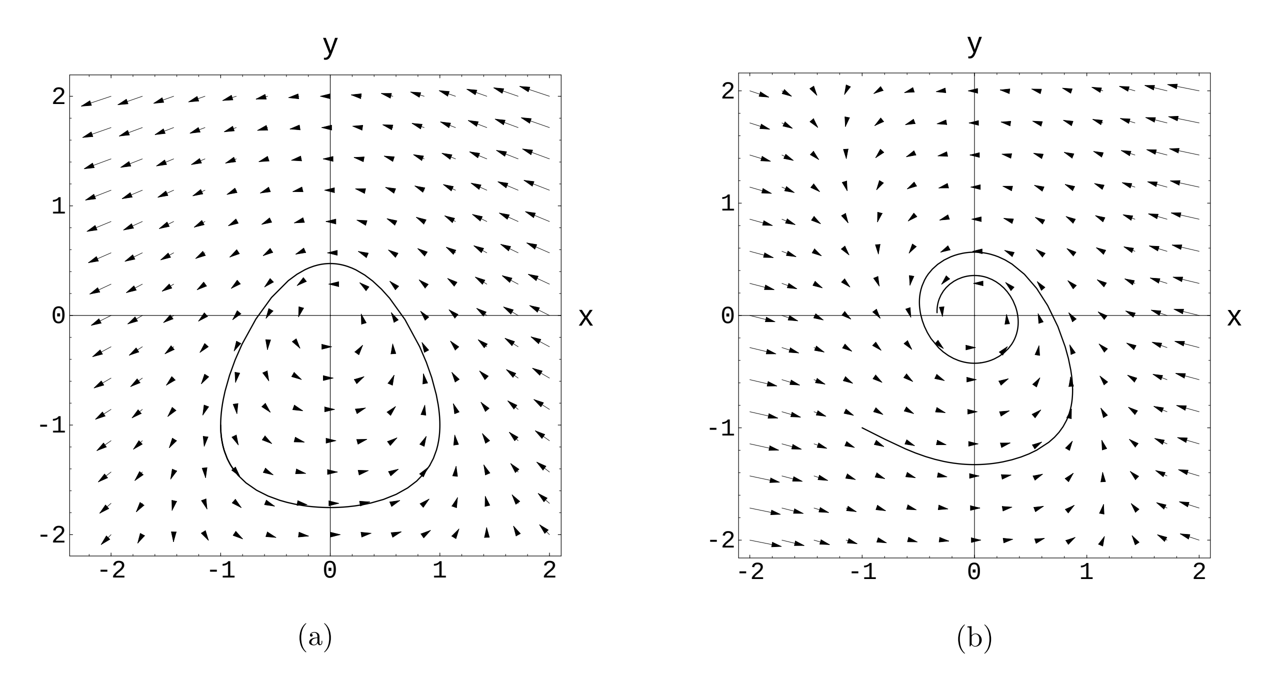


Figura 5.19: (a) Campo vectorial de direcciones del sistema no lineal (5.94) junto con una trayectoria que comenzó en el punto $(-1,-1)$. (b) Lo mismo pero para el sistema (5.95).

es un centro [véase la figura 5.19(a)], mientras que el punto crítico $(0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \tag{5.95}$$

es ahora un foco [véase la figura 5.19(b)]. Sin embargo, el sistema linealizado de ambos sistemas no lineales es el mismo

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \tag{5.96}$$

y su punto crítico $(0,0)$ es un centro.

◀

▶ *Ejemplo 5.9*

El punto crítico $(0,0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x\sqrt{x^2+y^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y\sqrt{x^2+y^2}, \end{cases} \tag{5.97}$$

es un foco estable y, sin embargo, es un centro de su sistema linealizado:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Esto último es fácil de demostrar pues la ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} -m & -1 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = m^2 + 1 = 0,$$

y sus raíces $m_{1,2} = \pm i$ son complejas conjugadas con parte real nula.
Veamos ahora que el origen del sistema no lineal es un foco estable. El sistema no lineal es más fácil de resolver expresándolo en coordenadas polares (r, θ). La relación $r^2 = x^2 + y^2$ implica que

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \tag{5.98}$$

mientras que de $\theta = \arctan(y/x)$ se deduce

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{d(y/x)}{dt} \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,\frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2} \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \tag{5.99}$$

Multiplicando la primera ecuación de (5.97) por x, la segunda por y, y sumando, la ecuación (5.98) se transforma en

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} &= x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} \\ &= x\,\left[-y - x\sqrt{x^2 + y^2}\right] + y\,\left[x - y\sqrt{x^2 + y^2}\right] \\ &= (x^2 + y^2)^{3/2} \\ &= r^3, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{dr}{dt} = r^2\,.$$

Por otro lado, multiplicando la segunda ecuación de (5.97) por x, y la primera por y, y restando, la ecuación (5.99) se reduce a

$$\begin{aligned} r^2\frac{d\theta}{dt} &= x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} \\ &= x\,\left[x - y\sqrt{x^2 + y^2}\right] - y\,\left[-y - x\sqrt{x^2 + y^2}\right] \\ &= x^2 + y^2 \\ &= r^2, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{d\theta}{dt} = 1.$$

Obtenemos de este modo un sistema equivalente al (5.97) con las variables r y θ desacopladas:

$$\frac{dr}{dt} = r^2\,, \tag{5.100a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1\,. \tag{5.100b}$$

La solución es inmediata:

$$r = \frac{1}{t + 1/r_0}\,, \tag{5.101a}$$

$$\theta = t + \theta_0, \tag{5.101b}$$

y por tanto

$$x(t) = \frac{1}{t + 1/r_0} \cos[t + \theta_0] \,, \tag{5.102a}$$

$$y(t) = \frac{1}{t + 1/r_0} \operatorname{sen}[t + \theta_0] \,. \tag{5.102b}$$

Por supuesto, r_0 y θ_0 son constantes determinadas por las condiciones iniciales. La solución anterior [ecuaciones (5.101) o (5.102)] da lugar a trayectorias en el plano de fases que se dirigen en espiral hacia el origen. Por tanto, para el sistema no lineal (5.97), el origen es un foco estable.

◀

Puntos críticos no simples

Para los puntos críticos no simples la casuística es mucho más variada que para los puntos críticos simples, es decir, el comportamiento de las trayectorias en torno a los puntos críticos no simples es muy variado, generalmente complicado, no limitándose las formas de las trayectorias a foco, centro, nodo o punto de silla. Como ejemplo, en las figura 5.20 representamos en torno al punto crítico no simple $(0, 0)$ los campos vectoriales de direcciones de los sistemas

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 - x^2, \end{cases} \tag{5.103}$$

y

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^3 - 2xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x^2y - y^3. \end{cases} \tag{5.104}$$

▷ ***Ejercicio*** *5.7*

Traza algunas trayectorias de las soluciones de los sistemas (5.103) y (5.104) sobre la figura 5.20.

5.4.3. Estabilidad por el método directo de Liapunov

Hemos visto en la sección anterior que si un punto crítico simple de un sistema no lineal resulta ser un centro del sistema linealizado, entonces el teorema 5.3 no proporciona ninguna información sobre la estabilidad del punto crítico del sistema no lineal. Más aun, cuando los puntos críticos no son simples, el teorema 5.3 no sirve para determinar la estabilidad de estos puntos críticos. Afortunadamente, existen otros procedimientos para determinar la estabilidad de un punto crítico aplicables incluso cuando el punto crítico no es simple. En esta sección se discute uno de estos procedimientos: el método directo (o segundo método) de Liapunov.[12]

Sea $C = (x(t), y(t))$ una solución (es decir, una trayectoria en el plano de fases) del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x, y), \end{cases} \tag{5.105}$$

[12] Puedes ver otros métodos en las referencias [Ros81, Sim93] y, más abundantemente, en [Str94].

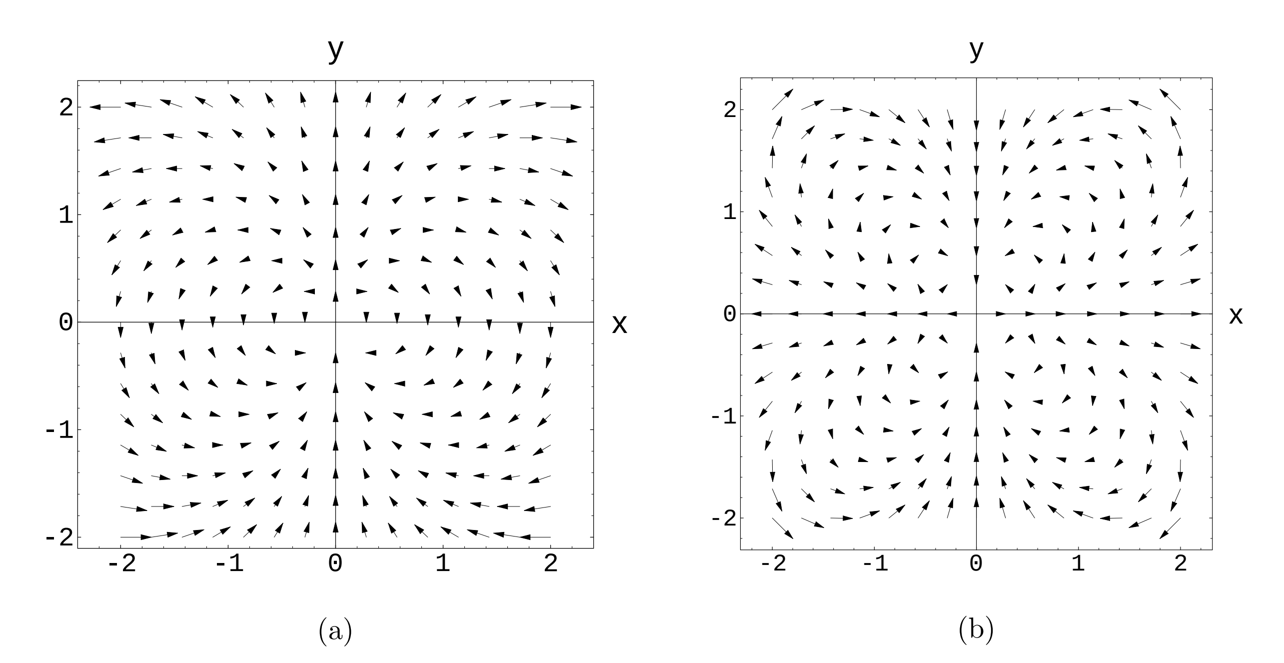


Figura 5.20: (a) Campo vectorial de direcciones del sistema no lineal (5.103). (b) Campo vectorial de direcciones del sistema (5.104).

y sea $E(x,y)$ una función definida en una región que contenga a C. Llamamos *velocidad de cambio* de $E[x(t),y(t)] = E(t)$ a lo largo de la trayectoria C, a la función dE/dt evaluada *sobre* la trayectoria C: $[dE/dt]_C$. Esta función podemos expresarla así:

$$\dot{E}(x,y) \equiv \left[\frac{dE}{dt}\right]_C = \frac{\partial E}{\partial x}\left[\frac{dx}{dt}\right]_C + \frac{\partial E}{\partial y}\left[\frac{dy}{dt}\right]_C$$
$$= \frac{\partial E}{\partial x}F + \frac{\partial E}{\partial y}G. \tag{5.106}$$

A $\dot{E}(x,y)$ también se la llama derivada de $E(x,y)$ con respecto al sistema (5.105).

Función de Liapunov

Supongamos que $E(0,0) = 0$ y sea $\mathcal{R}$ una región que rodea al punto $(0,0)$. Diremos que $E(x,y)$ es:

- *definida positiva* en $\mathcal{R}$ si $E(x,y) > 0$ para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ de $\mathcal{R}$;
- *definida negativa* en $\mathcal{R}$ si $E(x,y) < 0$ para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ de $\mathcal{R}$;
- *semidefinida positiva* en $\mathcal{R}$ si $E(x,y) \geq 0$ para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ de $\mathcal{R}$;
- *semidefinida negativa* en $\mathcal{R}$ si $E(x,y) \leq 0$ para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$ de $\mathcal{R}$.

► *Ejemplo 5.10*

Supongamos que n y m son dos números naturales (el 0 no está incluido). Entonces la función $a\,x^{2\,n}+b\,y^{2\,m}$ es definida positiva si $a,b > 0$, o definida negativa si $a,b < 0$. En cambio, $x^{2\,n}$, $y^{2\,n}$ y $(x-y)^{2n}$ son semidefinidas positivas.

◀

Sea $E(x,y)$ una función continua y con las primeras derivadas parciales $\partial E/\partial x$, $\partial E/\partial y$ continuas en una cierta región $\mathcal{R}$ que rodea al punto $(0,0)$. Decimos que $E(x,y)$ es una *función débil de Liapunov* del sistema (5.105) en $\mathcal{R}$ si, en esta región $\mathcal{R}$, es definida positiva y su velocidad de cambio

$$\dot{E}(x,y) = \frac{\partial E}{\partial x}\,F + \frac{\partial E}{\partial y}\,G,$$

es semidefinida negativa. Si su velocidad de cambio es definida negativa, entonces decimos que $E(x,y)$ es una *función fuerte de Liapunov* del sistema (5.105) en $\mathcal{R}$.

Teorema 5.4 *Si existe una función débil de Liapunov* $E(x,y)$ *para el sistema (5.105) en una región* $\mathcal{R}$ *que rodea al punto crítico* $(0,0)$*, entonces el punto crítico* $(0,0)$ *es, al menos, estable. Si existe una función fuerte de Liapunov* $E(x,y)$ *en una región* $\mathcal{R}$ *que rodea al punto crítico* $(0,0)$*, entonces* $(0,0)$ *es asintóticamente estable.*

Puedes ver la demostración de este teorema en el capítulo 8 de [Sim93]. La idea detrás de la demostración es muy sencilla: si cuando el punto $(x(t),y(t))$ se mueve sobre *cualquier* trayectoria solución de (5.105) sucede que $E(x,y)$ *siempre* disminuye, es claro que al final $(x(t),y(t))$ acabará sobre $(0,0)$, que es el único mínimo de $E(x,y)$ (pues es una función definida positiva); esto significa que el punto $(0,0)$ es hacia donde tienden todas las trayectorias y, por tanto, este punto es (asintóticamente) estable.

El siguiente teorema es un resultado útil a la hora de proponer funciones de Liapunov.

Teorema 5.5 *La función*

$$E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

es definida positiva si, y sólo si,

$$a > 0, \qquad y \qquad b^2 - 4ac < 0,$$

y definida negativa si, y sólo si,

$$a < 0, \qquad y \qquad b^2 - 4ac < 0.$$

Su demostración es elemental.[13]

▶ *Ejemplo 5.11*

El sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -2x\,y &= F(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} &= x^2 - y^3 &= G(x,y), \end{cases}$$

tiene al origen $(0,0)$ como único punto crítico . Para determinar su estabilidad proponemos la función de Liapunov $E(x,y) = x^2 + 2y^2$. Es claro que esta función es definida positiva en todo el plano (x,y).

[13]Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la función $z(x/y) = E(x,y)/y^2 = a(x/y)^2 + b(x/y) + c$ no tiene ninguna raíz real, es decir, $z(x/y)$ no corta al eje $z = 0$, lo que significa que E es bien siempre negativa o bien siempre positiva. Si $a > 0$ es claro que z, y por tanto E, es positiva si $x/y \to \infty$, luego E es siempre positiva para $a > 0$. Este argumento falla si $y = 0$, pero en este caso $E = ax^2$ y de nuevo encontramos que $a > 0$ implica E positiva excepto cuando $x = 0$.

Además, su velocidad de cambio

$$\begin{aligned}\dot{E}(x,y) &= \frac{\partial E}{\partial x}\,F + \frac{\partial E}{\partial y}\,G \\ &= 2x\,(-2x\,y) + 4y\,(x^2 - y^3) \\ &= -4x^2y + 4x^2y - 4y^4 \\ &= -4y^4\end{aligned}$$

es semidefinida negativa para todo (x, y), luego el punto $(0, 0)$ es, al menos, *estable.*

◀

▶ *Ejemplo 5.12*

Sea el oscilador

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2)x = 0$$

o, en forma de sistema diferencial,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y &&= F(x,y), \\ \dot{y} &= -(x^2 + y^2)x &&= G(x,y),\end{aligned} \tag{5.107}$$

Queremos mostrar que la función

$$E(x,y) = \mathrm{e}^{x^2}(x^2 + y^2 - 1) + 1$$

es una función de Liapunov del sistema (5.107). Para empezar, es claro que $E(0, 0) = 0$ y que $E(x, y)$ es definida positiva. Además

$$\begin{aligned}\dot{E}(x,y) &= \frac{\partial E}{\partial x}\,F + \frac{\partial E}{\partial y}\,G \\ &= 2x\,\mathrm{e}^{x^2}(x^2 + y^2)y - 2y\,\mathrm{e}^{x^2}(x^2 + y^2)x \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Por tanto $\dot{E}(x, y)$ es semidefinida negativa y $E(x, y)$ es una función débil de Liapunov. En definitiva, concluimos que el origen es, al menos, estable.
El hecho de que la velocidad de cambio $\dot{E}(x, y)$ sea nula para todo punto (x, y) nos permite además determinar las trayectorias solución $(x(t), y(t))$ del sistema (5.107) puesto que $\dot{E}(x, y) = 0$ implica que estas trayectorias son tales que la función $E(x(t), y(t))$ es constante. Es decir, las trayectorias solución $(x(t), y(t))$ satisfacen la relación

$$\mathrm{e}^{x^2}(x^2 + y^2 - 1) + 1 = c$$

donde c es una constante, o, equivalentemente,

$$y^2 = c\,\mathrm{e}^{-x^2} + 1 - x^2.$$

En la figura 5.21 se ha representado el campo vectorial de las trayectorias del sistema (5.107) y dos trayectorias particulares.

◀

La función de Liapunov generaliza el concepto de energía de un sistema físico. Esto puede apreciarse en los siguientes ejemplos.

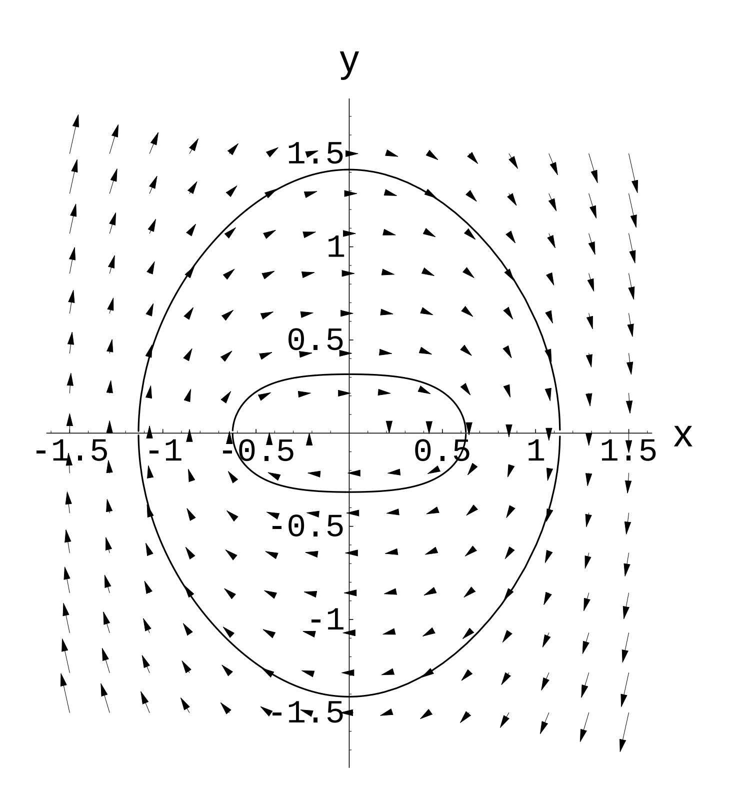


Figura 5.21: Campo vectorial de las trayectorias del sistema (5.107) y dos trayectorias correspondientes a $c = 1$ (curva exterior) y $c = -0'9$ (curva interior).

► *Ejemplo 5.13*

Un oscilador armónico amortiguado (es decir, el movimiento de un oscilador armónico amortiguado) viene descrito por la ecuación diferencial

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + k\,x = 0, \qquad c > 0.$$

Esta ecuación se puede reescribir como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y & = F(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{k}{m}\,x - \dfrac{c}{m}\,y & = G(x,y), \end{cases}$$

que tiene a $(0,0)$ como punto crítico. Vamos a proponer como función de Liapunov a la energía total del oscilador:

$$E(x,y) = \frac{1}{2}\,m\,y^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2,$$

que, evidentemente, es definida positiva. Su velocidad de cambio

$$\begin{aligned} \dot{E}(x,y) &= \frac{\partial E}{\partial x}\,F + \frac{\partial E}{\partial y}\,G = \\ &= k\,x\,y + m\,y\left(-\frac{k}{m}\,x - \frac{c}{m}\,y\right) = \\ &= -c\,y^2 \end{aligned}$$

es *semidefinida* negativa en todo el plano (x,y), lo que implica que la energía total es una función débil de Liapunov en todo el plano. Por consiguiente podemos afirmar que $(0,0)$ es, al menos, *estable*.

Como $(0,0)$ es punto crítico de un oscilador *amortiguado*, sabemos que este punto es *asintóticamente* estable (pues la energía del oscilador decae hasta alcanzar su valor mínimo en $(0,0)$, lugar en donde el oscilador se detiene), pero la función de Liapunov que hemos empleado no sirve para descubrir este hecho.

◀

▶ Ejemplo 5.14

En este ejemplo aplicaremos el método de Liapunov para descubrir que en el campo de fuerzas centrales $F(r) = -kr^n$, donde $n > -3$, las órbitas circulares son estables bajo perturbaciones *radiales* pequeñas. Procediendo como en el ejemplo 5.3, página 283, no es difícil ver que para $F(r) = -kr^n$ se verifica que

$$\mu r^2 \theta = \text{const} \equiv \ell \tag{5.108}$$

y

$$\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^3} = -g(r) \tag{5.109}$$

donde

$$g(r) = \frac{k}{\mu} r^n. \tag{5.110}$$

Es evidente que una órbita circular con un radio R dado por la relación

$$\frac{\ell^2}{\mu^2 R^3} = g(R) \tag{5.111}$$

es una solución posible. Queremos averiguar si esta órbita circular $r = R$ es estable frente a perturbaciones radiales x pequeñas. Hallamos la ecuación de la perturbación x introduciendo $r = R + x$ en (5.109):

$$\ddot{x} - \frac{\ell^2}{\mu^2 (R+x)^3} = -g(R+x). \tag{5.112}$$

Por supuesto, esta ecuación la podemos expresar como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} \equiv F(x, \dot{x}), \tag{5.113a}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{\ell^2}{\mu^2 (R+x)^3} - g(R+x) \equiv G(x, \dot{x}). \tag{5.113b}$$

Para determinar la estabilidad del punto fijo $(x = 0, \dot{x} = 0)$ proponemos a

$$E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu^2 (R+x)^2} + \int_0^x g(R+x) dx - \frac{\ell^2}{2\mu^2 R^2} \tag{5.114}$$

como función de Liapunov. Veamos bajo qué condiciones $E(x, \dot{x})$ es realmente una función de Liapunov. Para empezar, es fácil comprobar que su razón de cambio es semidefinida negativa pues $dE/dt = 0$ para todo x y $\dot{x}$. Además $E(x = 0, \dot{x} = 0) = 0$. Para demostrar que $E(x \neq 0, \dot{x} \neq 0) > 0$ cuando x y $\dot{x}$ son pequeños, desarrollamos esta función en torno del origen:

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2\mu^2 R^2}\left(1 - \frac{2x}{R} + \frac{3x^2}{R^2} + \cdots\right) - \frac{\ell^2}{2\mu^2 R^2} + g(R)\, x + \frac{g'(R)}{2} x^2 + \cdots$$

Usando el resultado de (5.111) se deduce que

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{3\ell^2}{\mu^2 R^4} + g'(R)\right] x^2 + O(x^3)$$

Por tanto $E(x,\dot{x})$ es mayor que cero en las vecindades del punto $(x=0,\dot{x}=0)$ si

$$\frac{3\ell^2}{\mu^2 R^4} + g'(R) > 0.$$

Teniendo en cuenta la relación (5.111), esta condición se reduce a

$$3g(R) > -R\,g'(R),$$

o equivalentemente, tras usar (5.110), a

$$n > -3.$$

En definitiva, hemos encontrado que si $n > -3$ entonces la función $E(x,\dot{x})$ dada por (5.114) es una función débil de Liapunov en las vecindades del origen $(x=0,\dot{x}=0)$. Podemos por tanto asegurar que las órbitas circulares son estables para perturbaciones radiales pequeñas cuando $n > -3$.[14] Debe notarse que la función de Liapunov $E(x,\dot{x})$ que hemos elegido en (5.114) no es más que la *energía total* del oscilador no lineal dado por la ecuación (5.112) cuando el origen de energía se elige de modo que la energía total sea nula en la posición de reposo $(x=0,\dot{x}=0)$.

▷ ***Ejercicio*** *5.8*

Demuestra que $E(x,\dot{x})$ *dada por* (5.114) *es la energía total del oscilador* (5.112).

◀

5.5. Ciclos límite

Hasta ahora sólo hemos obtenido información del comportamiento local de las trayectorias en torno a los puntos críticos de los sistemas no lineales. Pero, aparte de este comportamiento local, en los sistemas no lineales se dan también situaciones interesantes e inesperadas de tipo global en las que aparecen comportamientos que son imposibles en los sistemas lineales. Empezaremos estudiando en esta sección cierto tipo de trayectorias características de los sistemas no lineales que son conocidas como ciclos límite. Más adelante, en la sección 5.7 echaremos un vistazo a un sistema con comportamiento caótico.

Sea un sistema autónomo no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = G(x,y), \end{cases} \tag{5.115}$$

donde F y G y sus primeras derivadas parciales son continuas. Una solución $(x(t),y(t))$ de (5.115) es *periódica* si ninguna de las dos funciones $x(t),y(t)$ es constante, si están ambas definidas para todo t y si existe un número $T>0$ tal que

$$\begin{aligned} x(t+T) &= x(t), \\ y(t+T) &= y(t), \end{aligned} \tag{5.116}$$

para todo t. El valor de T más pequeño para el cual se satisfacen las relaciones (5.116) se conoce como período de la solución. Si $C=(x(t),y(t))$ es una trayectoria cerrada de (5.115) en el

[14] En la sección 8.11 del libro *Dinámica clásica de las partículas y sistemas* por J. B. Marion (Reverté, Barcelona, 1975) se obtiene este mismo resultado mediante un análisis similar al que se utilizó en el ejemplo 5.3 de la página 283.

plano de fases, entonces $(x(t), y(t))$ es una solución periódica. Obviamente también la afirmación contraria es cierta: la trayectoria $C = (x(t), y(t))$ en el plano de fases es cerrada si la solución es periódica.[15]

En un sistema lineal (véase la sección 5.3) todas las trayectorias son o bien cerradas (si las raíces de la ecuación característica son imaginarias puras) o bien ninguna lo es (para m *no* imaginarias puras). Sin embargo, en sistemas no lineales pueden darse trayectorias cerradas *aisladas*, es decir, trayectorias cerradas rodeadas por regiones que no contienen a otras trayectorias cerradas. Estas trayectorias (o las soluciones correspondientes) son conocidas como *ciclos límite*. Cuando todas las trayectorias *vecinas* se acercan al ciclo límite, se dice que el ciclo límite es estable.[16]

La existencia de un ciclo límite estable en un sistema significa que en este se producen oscilaciones automantenidas, es decir, se produce un comportamiento oscilante en ausencia de una fuerza o señal externa. El reloj de péndulo es un sistema bien conocido en el que se da un ciclo límite: si perturbamos su movimiento oscilatorio habitual (lo frenamos un poco o aumentamos la amplitud de oscilación con un golpecito, por ejemplo), sabemos que el péndulo es capaz *por sí solo de restablecer* su movimiento oscilatorio típico. El "movimiento oscilatorio habitual" es lo que llamamos ciclo límite y el movimiento oscilatorio que se aproxima este ciclo límite tras la perturbación es simplemente una trayectoria vecina al ciclo límite. Los ciclos límite son extraordinariamente importantes en muchos sistemas físicos y biológicos (latidos del corazón, ritmos circadianos del sueño, temperatura del cuerpo, dinámica de poblaciones, oscilaciones térmicas en los océanos, ...)

► *Ejemplo 5.15*

El sistema no lineal

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x\,(1 - x^2 - y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\,(1 - x^2 - y^2), \end{cases} \tag{5.117}$$

tiene un ciclo límite. Para encontrarlo es más conveniente expresar (5.117) en coordenadas polares (r, θ) y buscar la solución (es decir, la ecuación de las trayectorias solución) en este tipo de coordenadas. Sabemos [véanse las ecuaciones (5.98) y (5.99)] que

$$r\frac{dr}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \tag{5.118}$$

y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \tag{5.119}$$

Multiplicando la primera ecuación de (5.117) por x, la segunda por y, y sumando las expresiones resultantes, la ecuación (5.118) se transforma en

$$\begin{aligned} r\frac{dr}{dt} &= x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} \\ &= x\,[-y + x\,(1 - r^2)] + y\,[x + y\,(1 - r^2)] \\ &= (x^2 + y^2)\,(1 - r^2) \\ &= r^2\,(1 - r^2). \end{aligned}$$

[15] Estas afirmaciones son bastante evidentes. En todo caso, puede verse su justificación detallada en la sección 13.4 de [Ros81].

[16] La estabilidad de los ciclos límite se describe más cuidadosamente en la página 319.

Ahora, multiplicando la segunda ecuación de (5.117) por x, y la primera por y, y restando, la ecuación (5.119) se reduce a

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \\ &= x \left[x + y\,(1-r^2)\right] - y \left[-y + x\,(1-r^2)\right] \\ &= x^2 + y^2 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Obtenemos así un sistema equivalente al (5.117) con las variables r y θ desacopladas:

$$\frac{dr}{dt} = r\,(1-r^2), \tag{5.120a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1. \tag{5.120b}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r^2}{1-r^2}\right),$$

la solución de (5.120) es simplemente

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + a\ \mathrm{e}^{-2t}}}, \tag{5.121a}$$

$$\theta = t + \theta_0, \tag{5.121b}$$

donde a es un constante arbitraria de integración cuyo valor se determina a partir de las condiciones iniciales:

$$r_0 \equiv r(t=0) = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \Rightarrow a = \frac{1}{r_0^2} - 1.$$

Si $r_0 = 1$, entonces $a = 0$ y la solución es

$$\begin{cases} r = 1, \\ \theta = t + \theta_0, \end{cases}$$

que se corresponde con una trayectoria cerrada y circular de radio 1 que gira en sentido contrario a las agujas del reloj. Si $r_0 > 1$, entonces $a < 0$ y obtenemos que $r > 1$ para $t > 0$ y que $r \to 1$ cuando $t \to \infty$. Si $r_0 < 1$, entonces $a > 0$ y vemos que $r < 1$ para $t > 0$ y que, además, $r \to 1$ cuando $t \to \infty$. Por lo tanto existe una única trayectoria cerrada ($r = 1$) a la que todas las demás trayectorias tienden de forma espiral cuando $t \to \infty$ bien sea por dentro o por fuera. Esta trayectoria es un *ciclo límite.*

◀

Estabilidad de un ciclo límite

Por la propia definición de ciclo límite (recordemos, trayectoria cerrada aislada) las trayectorias en su vecindad solo pueden acercarse o alejarse de él. Este hecho nos conduce de forma natural a la definición de estabilidad de un ciclo límite (véase la figura 5.22):

- Un ciclo límite es estable si está dentro de una región en la que todas las trayectorias se dirigen a él.
- Un ciclo límite es inestable si está dentro de una región en la que todas las trayectorias se alejan de él.
- Un ciclo límite es semiestable si, en sus vecindades, las trayectorias en su interior [exterior] se acercan y las trayectorias en su exterior [interior] se alejan del ciclo límite.

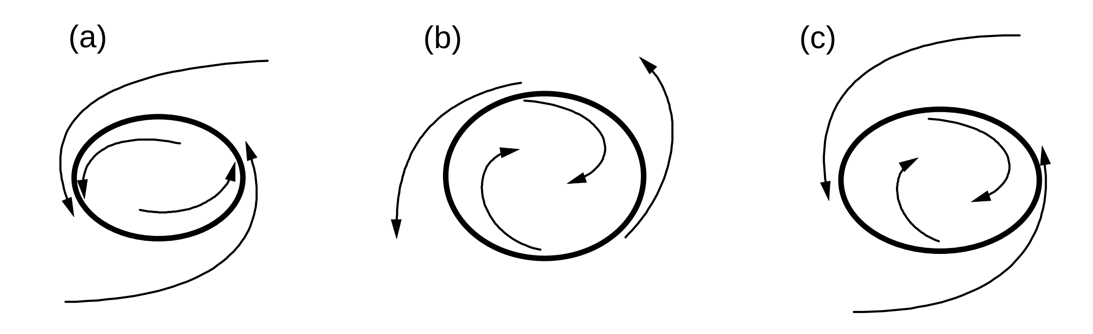


Figura 5.22: Esquema de las órbitas típicas alrededor de un ciclo límite (a) estable, (b) inestable (c) semiestable.

Hay que ser consciente que en muchas ocasiones (sobre todo en ciencias aplicadas) el término ciclo límite es sinónimo de ciclo límite estable.

► *Ejemplo 5.16*

Hemos visto en el ejemplo 5.15 anterior que el sistema no lineal (5.117) posee un ciclo límite con forma de circunferencia de radio unidad. Además, resolvimos de forma exacta las ecuaciones del sistema no lineal y descubrimos que todas las trayectorias solución vienen dadas por la ecuaciones (5.121). De la ecuación (5.121) se deduce fácilmente que el ciclo límite es estable pues todas las trayectorias de sus vecindades (de hecho, todas las trayectorias) tienden a acercarse en forma de espiral al ciclo límite pues $r(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$ para cualquier valor inicial de r.
Es instructivo observar que este resultado se podría haber deducido sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones (5.120). De hecho, un análisis cualitativo de la ecuación (5.120a) hubiera bastado para convencernos de la existencia de un ciclo límite para $r = 1$. En la figura 5.23 se muestra cómo llevar a cabo este análisis. En esta figura se ha dibujado la razón de cambio de la coordenada radial de la trayectoria, $dr/dt = r(1-r^2)$, en función de r. Se ve inmediatamente que $dr/dt = 0$ en $r = 1$, es decir, toda trayectoria con $r = 1$ tiene la propiedad de que su coordenada radial no cambia en el tiempo por lo que siempre vale 1. Pero si la coordenada radial de la trayectoria es mayor que 1, $r > 1$, entonces $dr/dt < 0$, lo que implica que esta coordenada radial disminuye en el tiempo y se acerca al valor de $r = 1$. De igual modo, si $r < 1$, entonces $dr/dt > 0$ y por tanto la coordenad radial tiende a aumentar en el tiempo hacia valores más proximos a 1. En resumen, cualquier trayectoria con un valor inicial $r(0) \neq 0$ tiende a acercarse a la trayectoria con $r = 1$ que, por consiguiente, es un ciclo límite *estable*.

◄

▷ ***Ejercicio*** *5.9*

1. *Supón que la ecuación radial (5.120a) fuera*

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r)(2-r).$$

Determina mediante argumentos cualitativos *el número y estabilidad de los ciclos límite del nuevo sistema.*

2. *Haz lo mismo si*

$$\frac{dr}{dt} = r(1-r)^2.$$

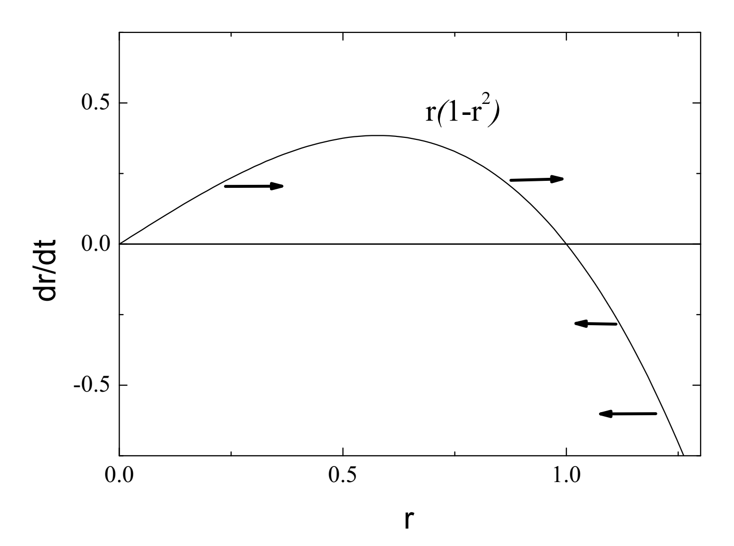


Figura 5.23: Velocidad de cambio dr/dt de la coordenada radial r de las trayectorias solución del sistema no lineal (5.117). Las flechas indican la dirección en la que r cambia.

Existencia de ciclos límite

¿Cómo podemos saber si existe un ciclo límite en el sistema (5.115)? Los siguientes resultados, que no demostraremos[17], nos proporcionan una respuesta en ciertos casos.

Teorema 5.6 *Toda trayectoria cerrada del sistema (5.115) debe rodear a un punto crítico.*

Teorema 5.7 (Teorema de Bedixson) *Si*

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}$$

es siempre positiva o siempre negativa en una cierta región del plano de fases, entonces el sistema (5.115) no tiene trayectorias cerradas en esa región.

Teorema 5.8 (Teorema de Poincaré-Bedixson) *Sea R una región acotada del plano de fases en la que el sistema (5.115) no tiene puntos críticos. Si una trayectoria del sistema (5.115), a partir de un cierto instante, permanece siempre dentro de R, entonces o la trayectoria es cerrada o bien tiende de forma espiral hacia una trayectoria cerrada.*

Podemos entender de un modo intuitivo (aunque hay que admitir que no riguroso) el origen de este teorema: un poco de reflexión nos debe convencer de que no es posible trazar trayectorias en una región *bidimensional* acotada que, sin cortarse entre sí, no se salgan de esta región, salvo si la trayectorias tienden hacia un punto crítico de esta región o tienden en espiral hacia una trayectoria cerrada (ciclo límite).

Teorema 5.9 (Teorema de Liénard) *Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que:*

1. *Ambas son continuas al igual que sus derivadas.*

2. *$f(x)$ es par y $g(x)$ es impar con $g(x) > 0$ para todo $x > 0$.*

3. *La función impar $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ cumple que:*

[17] Pueden consultarse las demostraciones en las referencias [Sim93, Ros81, JS87], por ejemplo.

a) *tiene un cero en* $x = a > 0$,

b) *es negativa para el intervalo* $0 < x < a$,

c) *es positiva y no decreciente para* $x > a$,

d) $F(x) \to \infty$ *cuando* $x \to \infty$.

Entonces la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\,\frac{dx}{dt} + g(x) = 0$$

tiene una única trayectoria cerrada (ciclo límite) que rodea al origen y todas las demás trayectorias tienden a ella en forma de espiral cuando $t \to \infty$.

▶ *Ejemplo 5.17*

Veamos una aplicación del teorema de Liénard. Sea la ecuación de van der Pol

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon\,(x^2 - 1)\,\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \text{con} \quad \epsilon > 0.$$

En este oscilador

$$f(x) = \epsilon\,(x^2 - 1),$$
$$g(x) = x,$$

por lo que las condiciones 1 y 2 del teorema de Liénard se satisfacen claramente. Comprobemos ahora si también se satisface la condición 3. Para ello hemos de calcular $F(x)$:

$$F(x) = \epsilon \int_0^x (x^2 - 1)\,dx = \epsilon\,\frac{x^3}{3} - x = \frac{\epsilon}{3}\,x\,(x^2 - 3).$$

Esta función tiene a $x = \sqrt{3}$ como único cero, es negativa en el intervalo $0 < x < \sqrt{3}$, es positiva para $x > \sqrt{3}$, satisface la condición

$$\frac{dF}{dx} = f(x) = \epsilon\,(x^2 - 1) > 0 \quad \text{si } x > \sqrt{3},$$

y también cumple que $F(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$. Se cumplen así todas las condiciones del teorema de Liénard, por lo que concluimos que la ecuación de van der Pol ha de tener un ciclo límite. En la sección 5.6 estudiaremos un par de métodos que nos permitirán hallar una expresión *aproximada* de este ciclo límite.

◀

5.6. Cálculo de Soluciones Periódicas

En la sección anterior hemos visto varios teoremas que nos permiten decidir sobre la existencias de soluciones periódicas. Pero, ¿cómo hallar estas soluciones periódicas? El procedimiento directo pasaría por encontrar la solución general exacta de nuestro sistema no lineal y estudiar bajo qué condiciones se da una solución periódica. Este modo fue el que empleamos en el ejemplo 5.17. Sin embargo, hallar soluciones periódicas exactas de sistemas no lineales es una tarea muy difícil y generalmente infructuosa (son muy pocos los problemas no lineales con solución exacta conocida). El procedimiento alternativo habitual consiste en hallar soluciones periódicas *aproximadas* que representen de un modo aceptable a la solución exacta desconocida.

Vamos a estudiar a continuación dos métodos —el método de balance armónico y el de Krylov-Bogoliubov— para hallar soluciones periódicas aproximadas de osciladores no lineales cuyas ecuaciones diferenciales las escribiremos así:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -f(x,y). \end{cases} \tag{5.122}$$

El método de Krylov-Bogoliubov sirve además para obtener aproximaciones de soluciones cuasi-periódicas, es decir, soluciones que son *casi* periódicas.

5.6.1. Método de Balance Armónico

Este método, que es muy sencillo, proporciona soluciones aproximadas de muy buena calidad siempre que la solución exacta (que es desconocida) se asemeje a una función armónica cosenoidal (o senoidal). Si la solución desconocida es periódica, puede expresarse como serie de Fourier:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\omega t)\,. \tag{5.123}$$

En el método de balance armónico se propone la serie anterior truncada hasta un número finito de términos como solución aproximada de la ecuación (5.122). En su forma más sencilla, que es la que estudiaremos aquí, se retienen simplemente sus tres primeros armónicos; es decir, se propone una solución aproximada de la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 + A_1 \cos(\omega\, t) + B_1 \operatorname{sen}(\omega\, t) \\ &= c + A\cos(\omega\, t + \varphi). \end{aligned} \tag{5.124}$$

donde $c \equiv A_0$, $A_1 = A\cos\varphi$ y $B_1 = -A\operatorname{sen}\varphi$. Como estamos en principio sólo interesados en describir el ciclo límite, es decir, cómo sólo nos interesa hallar su "forma" y tamaño en el plano de fases, podemos olvidarnos del valor de la fase φ, la cual sólo nos informa del instante en el que la solución $(x, \dot{x})$ pasa por un punto dado del ciclo límite, y escribir

$$x(t) = c + A\cos(\omega\, t). \tag{5.125}$$

Esto es equivalente a escoger como origen de tiempos $t = 0$ el instante en el cual el desplazamiento del oscilador x es máximo, esto es, cuando $x = c + A$.

El método de balance armónico busca una solución aproximada de la ecuación (5.122) con la forma funcional de (5.125). Por supuesto, la tarea consiste en estimar los valores óptimos de c, A y ω que hagan que la solución periódica aproximada propuesta sea una buena representación de la solución periódica exacta desconocida. En el método de balance armónico c, A y ω se determinan exigiendo que la solución aproximada propuesta (5.125) satisfaga la ecuación (5.122) en sus armónicos más grandes. Habitualmente los armónicos más grandes son los de menor orden.

Si proponemos a $x(t) = c + A\cos\omega\, t$, como solución, entonces

$$\frac{dx}{dt} = -\omega\, A\operatorname{sen}\omega\, t, \tag{5.126}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2\, A\cos\omega\, t, \tag{5.127}$$

y la función $f(x,\dot{x})$ se puede expresar en como un desarrollo en serie de Fourier:

$$\begin{aligned} f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) &= f(c + A\cos\omega\, t, -A\,\omega \operatorname{sen}\omega\, t) \\ &= k(c,A,\omega) + g(c,A,\omega)\cos\omega\, t + h(c,A,\omega)\operatorname{sen}\omega\, t + \text{a.o.s.} \end{aligned} \tag{5.128}$$

donde a.o.s. son armónicos de orden superior, es decir, términos proporcionales a $\cos n\,\omega\, t$ y $\operatorname{sen} n\,\omega\, t$ con $n \geq 2$. Las funciones $k(c,A,\omega)$ $g(c,A,\omega)$ y $h(c,A,\omega)$ son los coeficientes de la serie de Fourier de la función $f(x,\dot{x})$:

$$k(c,A,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(c + A\cos\psi, -A\,\omega\operatorname{sen}\psi)\, d\psi, \tag{5.129}$$

$$g(c,A,\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(c + A\cos\psi, -A\,\omega\operatorname{sen}\psi)\, \cos\psi\, d\psi, \tag{5.130}$$

$$h(c,A,\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(c + A\cos\psi, -A\,\omega\operatorname{sen}\psi)\, \operatorname{sen}\psi\, d\psi, \tag{5.131}$$

donde $\psi \equiv \omega\, t$. Sustituyendo (5.126), (5.127) y (5.128) en la ecuación diferencial cuya solución buscamos, es decir, en la ecuación (5.122), obtenemos

$$k(c,A,\omega) + [g(c,A,\omega) - \omega^2 A]\, \cos\omega\, t + h(c,A,\omega)\operatorname{sen}\omega\, t + \text{a.o.s.} = 0. \tag{5.132}$$

Para que al menos los tres primeros armónicos sean nulos debe ocurrir que

$$\begin{cases} k(c,A,\omega) = 0, \\ g(c,A,\omega) - \omega^2 A = 0, \\ h(c,A,\omega) = 0, \end{cases} \tag{5.133}$$

con lo que obtenemos un sistema cuyas soluciones son los valores de c, A y ω buscados.

En la aplicación del método de Balance Armónico, y también en el de Krylov-Bogoliubov, aparecen a menudo integrales entre 0 y 2π de productos de potencias de las funciones seno y coseno. Los siguientes resultados serán por tanto útiles cuando apliquemos estos métodos[18]:

$$\begin{aligned} \langle\cos^{2n}\rangle = \langle\operatorname{sen}^{2n}\rangle &= \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}, \\ \langle\cos^{2n-1}\rangle = \langle\operatorname{sen}^{2n-1}\rangle &= 0, \\ \langle\cos^{2n-1}\operatorname{sen}^{2m-1}\rangle = \langle\cos^{2n}\operatorname{sen}^{2m-1}\rangle &= \langle\cos^{2n-1}\operatorname{sen}^{2m-1}\rangle = 0 \end{aligned} \tag{5.134}$$

donde $n \geq 1$ y $m \geq 1$ son enteros y

$$\langle f\rangle \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)d\phi.$$

A partir de (5.134) se pueden obtener muchos otros resultados. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \langle\cos^2\operatorname{sen}^2\rangle &= \langle\cos^2(1-\cos^2)\rangle = \langle\cos^2\rangle - \langle\cos^4\rangle = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}, \\ \langle\cos^4\operatorname{sen}^2\rangle &= \langle\cos^4(1-\cos^2)\rangle = \langle\cos^4\rangle - \langle\cos^6\rangle = \frac{3}{8} - \frac{5}{16} = \frac{1}{16}. \end{aligned} \tag{5.135}$$

[18] $(2n-1)!! = (2n-1)\times(2n-3)\cdots\times 5\times 3\times 1$. A esta función se la conoce como factorial doble. Su definición para numeros pares es: $(2n)!! = (2n)\times(2n-2)\cdots\times 4\times 2$.

► *Ejemplo 5.18*

En este ejemplo estimaremos el ciclo límite del oscilador de van der Pol

$$\ddot{x} + \epsilon\,(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0, \qquad 0 < \epsilon \ll 1\,, \tag{5.136}$$

mediante el método de balance armónico. Esta ecuacion tiene la forma de la ecuación (5.122) donde $f(x, \dot{x}) = \hat{f}(x, \dot{x}) + x$ y $\hat{f}(x, \dot{x}) = \epsilon\,(x^2 - 1)\dot{x}$. Empezamos sustituyendo $x(t) = c + A\cos(\omega\,t)$ en la ecuación (5.136) y nos quedamos con los dos primeros armónicos:

$$\begin{aligned}
x &= c + A\cos\omega\,t,\\
\dot{x} &= -A\,\omega\operatorname{sen}\omega\,t,\\
\ddot{x} &= -A\,\omega^2\cos\omega\,t,\\
\epsilon\,(x^2 - 1)\dot{x} &= \hat{k}(c, A, \omega) + \hat{g}(c, A, \omega)\cos\omega\,t + \hat{h}(c, A, \omega)\operatorname{sen}\omega\,t + \text{a.o.s.}
\end{aligned}$$

Las funciones $\hat{k}(c, A, \omega)$, $\hat{g}(c, A, \omega)$ y $\hat{h}(c, A, \omega)$ son los tres primeros coeficientes de la serie de Fourier de $\hat{f}(c + A\cos\omega\,t, -A\,\omega\operatorname{sen}\omega\,t)$. El primer coeficiente viene dado por

$$\hat{k}(c, A, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon\,(c^2 + 2cA\cos\omega t + A^2\cos^2\omega\,t - 1)(-\omega A\operatorname{sen}\omega\,t)\,d(\omega\,t) = 0.$$

Como $k(c, A, \omega) = \hat{k}(c, A, \omega) + c$, se tiene que $c = 0$ es la única solución posible de la ecuación $k(c, A, \omega) = 0$. Es decir, la solución aproximada que buscamos tendrá la forma $x(t) = A\cos\omega\,t$. Los otros dos coeficientes de la serie de Fourier vienen entonces dados por

$$\begin{aligned}
\hat{g}(c, A, \omega) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon\,(A^2\cos^2\omega\,t - 1)(-\omega A\operatorname{sen}\omega\,t)\,\cos\omega\,t\,d(\omega\,t)\\
&= -\frac{\epsilon}{\pi}\omega A\left[A^2\int_0^{2\pi}\cos^3\psi\operatorname{sen}\psi\,d\psi - \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\psi\cos\psi\,d\psi\right]\\
&= 0\,,\\
\hat{h}(c, A, \omega) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \epsilon\,(A^2\cos^2\omega\,t - 1)(-\omega A\operatorname{sen}\omega\,t)\,\operatorname{sen}\omega\,t\,d(\omega\,t)\\
&= -\frac{\epsilon}{\pi}\omega A\left[A^2\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\operatorname{sen}^2\psi\,d\psi - \int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\psi\,d\psi\right]\\
&= -\epsilon\,\omega A\left(\frac{A^2}{4} - 1\right)\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación del oscilador de van der Pol, Ec. (5.136), en forma de armónicos se reduce a

$$-\omega^2 A\cos\omega\,t - \epsilon\,\omega A\left(\frac{A^2}{4} - 1\right)\operatorname{sen}\omega\,t + A\cos\omega\,t + \text{a.o.s.} = 0,$$

es decir,

$$A\,(1 - \omega^2)\cos\omega\,t - \epsilon\,\omega A\left(\frac{A^2}{4} - 1\right)\operatorname{sen}\omega\,t + \text{a.o.s.} = 0.$$

Ahora elegimos ω y A de modo que esta ecuación se satisfaga, al menos, en sus primeros armónicos, es decir, los elegimos de modo que los coeficientes del primer armónico cosenoidal y senoidal sean nulos. Esperamos que esto conduzca a una solución aproximada $x(t) = A\cos(\omega t)$ aceptable si los armónicos de orden superior son pequeños. En definitiva, hallamos la amplitud y la frecuencia resolviendo el sistema algebraico

$$\left\{\begin{aligned}
A(1 - \omega^2) &= 0,\\
\epsilon\,\omega A\left(\frac{A^2}{4} - 1\right) &= 0,
\end{aligned}\right.$$

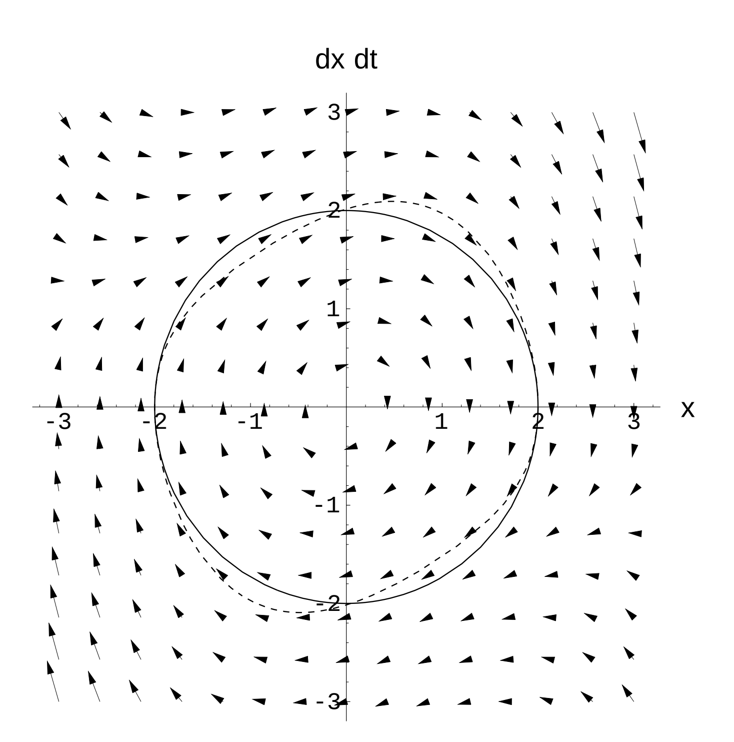


Figura 5.24: Campo vectorial de las trayectorias y ciclo límite numérico (línea punteada) del oscilador de van der Pol para $\epsilon = 0'3$. El ciclo límite calculado mediante el método de balance armónico se ha representado con una línea continua.

cuyas soluciones son $A = \pm 2$ y $\omega = \pm 1$. Luego encontramos que

$$x(t) = 2\cos t, \tag{5.137}$$

es una solución periódica aproximada del oscilador de van der Pol. Los otros valores posibles de A y ω, a saber, $A = -2$ y $\omega = -1$ no conducen a un ciclo límite distinto. En definitiva, el ciclo límite que nos proporciona el método de balance armónico viene dado por ecuación (5.137). Un defecto obvio de este resultado es que no depende de ϵ. En la figura 5.24 se compara este ciclo límite aproximado con el que se obtiene mediante integración numérica cuando $\epsilon = 0'3$. El resultado es relativamente bueno incluso para este valor no demasiado pequeño de ϵ.

◀

Hemos encontrado en el ejemplo 5.18 anterior que la constante c era nula. Podíamos haber previsto este resultado pues c será nula cuando la ecuación del oscilador sea invariante bajo el cambio $x \to -x$. Es evidente que la ecuación (5.136) tiene esta propiedad. Podemos entender esta propiedad del siguiente modo: si la ecuación del oscilador $\ddot{x} = -f(x, \dot{x})$ es invariante bajo el cambio $x \to -x$, entonces $f(x, \dot{x}) = -f(-x, -\dot{x})$, lo que significa que la fuerza (o aceleración $\ddot{x}$) que experimenta el oscilador en el punto $(x, \dot{x})$ es igual y de signo contrario a la que sufre en el punto $(-x, -\dot{x})$. Esto se traduce en que las oscilaciones $x(t)$ deben ser simétricas con respecto $x = 0$, es decir, debe ocurrir que $x(t) = -x(t + T/2)$ siendo T el periodo de las oscilaciones. En este caso, la constante c (constante que podríamos llamar de asimetría) debe ser nula para que la solución propuesta $x(t) = c + A\cos(\omega\, t)$ sea simétrica con respecto a $x = 0$.

En las aplicaciones del método de balance armónico es muy habitual tener que desarrollar las funciones $\operatorname{sen}^n x$ y $\cos^n x$ en serie de Fourier. Para estos casos, los siguientes resultados son muy

útiles:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^{2n} x &= \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} - a_{2n}\cos 2x + \text{a.o.s.},\\
\cos^{2n} x &= \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + a_{2n}\cos 2x + \text{a.o.s.},\\
\operatorname{sen}^{2n-1} x &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1} n!}\operatorname{sen} x - b_{2n-1}\operatorname{sen} 3x + \text{a.o.s.},\\
\cos^{2n-1} x &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1} n!}\cos x + b_{2n-1}\cos 3x + \text{a.o.s.},
\end{aligned} \tag{5.138}$$

donde $n = 1, 2, \dots$ y a y b son constantes cuyo valor no es, usualmente, necesario conocer.[19]

► *Ejemplo 5.19*

Vamos a hallar una solución aproximada mediante el método de balance armónico del oscilador

$$\ddot{x} + c_3\, x^3 = 0. \tag{5.139}$$

Debido a que la fuerza $c_3 x^3$ es simétrica (impar) con respecto a $x = 0$, la solución $x(t)$ ha de simétrica con respecto a $x = 0$: $x(t) = -x(t + T/2)$. Esto nos lleva a proponer directamente como solución aproximada a la expresión

$$x(t) = A\cos\omega t \tag{5.140}$$

sin el término de asimetría dado por la constante c.[20] En tal caso, sustituyendo (5.140) en (5.139) se obtiene

$$-\omega^2 A\cos\omega t + c_3 A^3\cos^3\omega t = 0. \tag{5.141}$$

Pero, por (5.138) sabemos que $\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \text{a.o.s.}$ (o, de forma exacta, $\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta$), de modo que (5.141) se reduce a

$$\left(-\omega^2 + \frac{3}{4}c_3 A^2\right) A\cos\omega t + \text{a.o.s.} = 0 \tag{5.142}$$

lo que implica

$$\omega^2 = \frac{3}{4}c_3 A^2. \tag{5.143}$$

Esto significa que el método de balance armónico predice que las solución de (5.139) es

$$x(t) = A\cos\left(\frac{\sqrt{3c_3}}{2}\, A\, t\right)\,, \tag{5.144}$$

es decir, predice oscilaciones de amplitud A y periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4\pi}{\sqrt{3c_3}\, A} \simeq \frac{7'2552}{\sqrt{c_3}\, A}\,.$$

El oscilador (5.139) es uno de los pocos osciladores no lineales que tiene solución analítica exacta, a saber,

$$x(t) = A\,\mathrm{cn}(\omega t, k^2 = 1/2) \tag{5.145}$$

donde $\omega^2 = c_3 A^2$ y cn es una función elíptica de Jacobi de parámetro $k^2 = 1/2$. El periodo de esta solución es

$$T = \frac{4K(1/2)}{\omega} = \frac{4K(1/2)}{\sqrt{c_3}\, A} \simeq \frac{7'4163}{\sqrt{c_3}\, A}$$

donde $K(1/2) \simeq 1'85407$ es la integral elíptica completa de primera especie con argumento $1/2$. Vemos que el periodo estimado mediante balance armónico difiere del exacto en poco más de un dos por ciento. En la figura 5.25 se comparan la solución exacta y la proporcionada mediante el método de balance armónico. El acuerdo es bueno.

[19] Algunos valores: $a_2 = 1/2$, $a_4 = 1/2$, $a_6 = 15/32$, $b_3 = 1/4$, $b_5 = 5/16$, $b_7 = 21/64$.

[20] En cualquier caso, si hubiéramos tomado $x(t) = c + A\cos(\omega t)$ como solución prueba, nos daríamos cuenta inmediatamente que el método de balance armónico requiere $c = 0$.

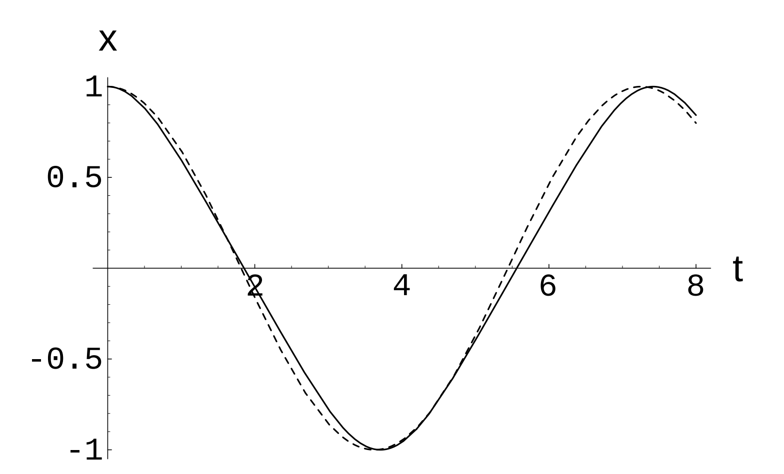


Figura 5.25: Comparación entre la solución aproximada (5.144) (línea discontinua) y la exacta (5.145) (línea continua) del oscilador $\ddot{x} + x^3 = 0$ con condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 0$. Esta condiciones iniciales implican la amplitud $A = 1$.

◀

▷ ***Ejercicio** 5.10*

Halla mediante el método de balance armónico la solución aproximada del oscilador

$$\ddot{x} + 3c^2x^5 = 0.$$

Determina el periodo de oscilación y compáralo con el valor exacto:

$$T = \frac{4\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{7}{6})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\,\frac{1}{cA^2} \simeq \frac{4'8573}{cA^2}.$$

▶ *Ejemplo 5.20*

La ecuación de Rayleigh

$$\ddot{x} - \lambda_1\dot{x} + \lambda_3\dot{x}^3 + \omega_0^2 x = 0, \quad \lambda_1, \lambda_3 > 0\ , \tag{5.146}$$

describe un oscilador lineal con un término que aporta energía a las oscilaciones, $-\lambda_1\dot{x}$, y otro que quita energía $\lambda_3\dot{x}^3$. Por este motivo no es difícil ver que deben existir oscilaciones automantenidas (ciclos límite): si el oscilador esta próximo al reposo y por tanto $\dot{x}$ es cercano a cero, el término que aporta energía es superior al que la extrae pues $|\dot{x}| \gg |\dot{x}^3|$ si $|\dot{x}| \ll 1$; por otro lado, si el oscilador tiene mucha energía de modo que su velocidad es alta, $|\dot{x}| \gg 1$, sucede que el término que quita energía es muy superior al que la añade pues entonces $|\dot{x}| \ll |\dot{x}^3|$. En este ejemplo usaremos el método de balance armónico para estimar este ciclo límite.

Como la ecuación de Rayleigh es invariante bajo el cambio $x \to -x$, el desplazamiento $x(t)$ ha de ser simétrico con respecto al eje $x = 0$ de modo que $c = 0$. Esto nos lleva a proponer directamente la solución aproximada

$$x(t) = A\cos(\omega t). \tag{5.147}$$

Insertando esta expresión en (5.146) y teniendo en cuenta que [véase (5.138)]

$$\operatorname{sen}^3 x = \frac{3}{4}\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3x$$

se obtiene

$$-\omega^2 A\cos\omega t+\lambda_1 A\omega\operatorname{sen}\omega t-\lambda_3\omega^3 A\left(\frac{3}{4}\operatorname{sen}\omega t+\frac{1}{4}\operatorname{sen}3\omega t\right)+\omega_0^2 A\cos\omega t=0 \tag{5.148}$$

es decir

$$-\omega^2 A\cos\omega t+\lambda_1 A\omega\operatorname{sen}\omega t-\frac{3}{4}\lambda_3\omega^3 A^3\operatorname{sen}\omega t+\omega_0^2 A\cos\omega t+\text{a.o.s.}=0. \tag{5.149}$$

Despreciando la contribución de los armónicos de orden superior e igualando los armónicos más bajos se obtiene la frecuencia ω y amplitud A del ciclo límite:

$$\omega^2=\omega_0^2, \tag{5.150}$$

$$A^2=\frac{4\lambda_1}{3\omega_0^2\lambda_3}. \tag{5.151}$$

Un ejemplo curioso de un sistema físico regido esencialmente por un oscilador de Rayleigh es el "oscilador salino": el nivel del agua salada en un vasito con un pequeño agujero en el fondo oscila alrededor de su posición de equilibrio cuando se sumerge en un vaso de agua pura. M. Okamura y K. Yoshikawa (Physical Review E, volumen 61, páginas 2445-2452, año 2000) han demostrado que estas oscilaciones pueden describirse bastante bien mediante una ecuación de Rayleigh. Para el sistema considerado por Okamura y Yoshikawa esta ecuación es

$$\ddot{x}-56\dot{x}+1'2\times10^8\dot{x}^3+7x=0 \tag{5.152}$$

donde las unidades empleadas son las del sistema cegesimal (x en centímetros y t en segundos). Si usamos la relación (5.151), encontramos que la amplitud de oscilación del oscilador salino sería

$$A=\sqrt{\frac{4\times56}{3\times7\times1'2\times10^8}}\simeq3\times10^{-4}\text{cm}=3\mu\text{m}.$$

Esta predicción está en relativo buen acuerdo con la amplitud experimental observada de 25 μm (al menos se predice el orden de magnitud de las oscilaciones). ¿Por qué la predicción no es mejor? Debe observarse que en el oscilador experimental el parámetro $\lambda_3=1'2\times10^8$ es enorme lo que hace que no sea muy afortunado despreciar en nuestras manipulaciones, tal como hemos hecho para deducir (5.151), el a.o.s.

$$\frac{1}{4}\lambda_3\omega^3A^3\operatorname{sen}3\omega t\ .$$

De hecho si tomamos $A=25\mu$m y $\omega^2=7$, este armónico *despreciado* es igual a $8'7\operatorname{sen}3\omega t$. Resulta que la amplitud $8'7$ de este armónico es mucho mayor que la amplitud de cualquier otro armónico retenido en (5.149). En la figura 5.26 se representa la solución de (5.152) en el plano de fases. El ciclo límite es muy diferente de una figura ovalada lo que nos indica que una solución aproximada de la forma $x(t)=A\cos\omega t$ nunca podrá representar adecuadamente el ciclo límite del oscilador (5.152).
En cambio, el ciclo límite de (5.146) con $\lambda_1=\lambda_3=1$ es una figura muy parecida a un óvalo lo que nos anuncia que en este caso la solución (5.151) debe describir adecuadamente el ciclo límite. De hecho, de (5.151) se deduce $A\simeq0'44$ y $\omega=\sqrt{7}$, por lo que, según el método de balance armónico, el ciclo límite viene descrito por

$$x(t)=0'44\cos(\sqrt{7}t), \tag{5.153}$$

$$\dot{x}(t)=0'44\times\sqrt{7}\operatorname{sen}(\sqrt{7}t)=-1'15\operatorname{sen}(\sqrt{7}t), \tag{5.154}$$

es decir, por una elipse en el plano de fases con semieje horizontal igual a $0'44$ y semieje vertical de longitud $1'15$. Esto está en un muy buen acuerdo con el ciclo límite calculado numéricamente que se muestra en la figura 5.27.

◀

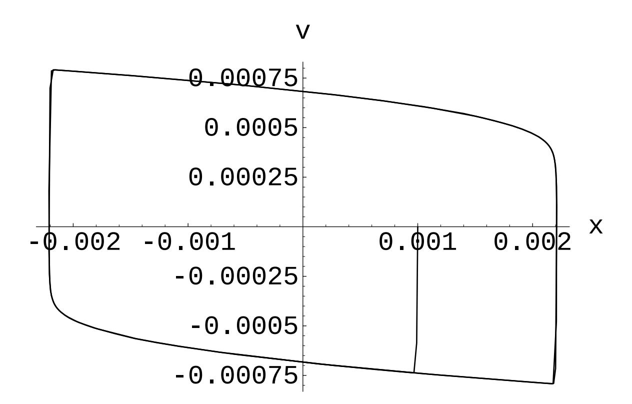


Figura 5.26: Ciclo límite (línea cerrada externa) del oscilador de Rayleigh (5.152) donde $v \equiv \dot{x}$.

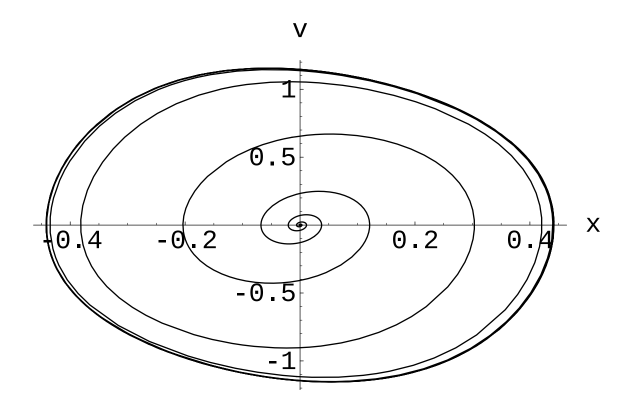


Figura 5.27: Ciclo límite (línea cerrada externa) del oscilador de Rayleigh (5.146) con $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, $\omega_0^2 = 7$ y donde $v \equiv \dot{x}$.

5.6.2. Método de Krylov-Bogoliubov

El método de Krylov-Bogoliubov[21] permite encontrar soluciones aproximads periódicas y/o cuasiperiódicas de osciladores no lineales. Recuérdese que con el método del balance armónico tan sólo se pueden obtener expresiones aproximadas de las soluciones periódicas. El método de Krylov-Bogoliubov se aplica a ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x + \epsilon\, f(x, \frac{dx}{dt}) = 0\ , \qquad 0 < \epsilon \ll 1\,. \tag{5.155}$$

Si $\epsilon = 0$, la solución de (5.155) es

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi)\,, \tag{5.156}$$

y su derivada es

$$\dot{x}(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega\, t + \varphi)\,, \tag{5.157}$$

donde la amplitud A y la fase φ son constantes. Si $0 < \epsilon \ll 1$, es razonable pensar que la solución de (5.155) será formalmente muy parecida a la de (5.156), aunque ya no debemos esperar que

[21] Estos nombres en ocasiones también se escriben como Kryloff-Bogoliuboff.

A y φ sean constantes en el tiempo. Es decir, consideraremos una solución formalmente igual a (5.156), pero de amplitud y fase variable en el tiempo:

$$x(t) = A(t)\cos(\omega\, t + \varphi(t)), \tag{5.158}$$

donde $A(t)$ y $\varphi(t)$ se determinan imponiendo que (5.158) sea solución de (5.155). Pero esta condición no será en general suficiente para determinar unívocamente las funciones $A(t)$ y $\varphi(t)$, y por ello imponemos (arbitrariamente)[22] una condición adicional sobre $A(t)$ y $\varphi(t)$, a saber, la condición de que sean funciones que hagan que se verifique la relación

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A(t)\,\mathrm{sen}(\omega\, t + \varphi(t)). \tag{5.159}$$

En definitiva, $A(t)$ y $\varphi(t)$ han de ser dos funciones que hagan que:

1. $x(t) = A(t)\cos(\omega\, t + \varphi(t))$ sea solución de (5.155).

2. La derivada con respecto al tiempo de la solución propuesta, ecuación (5.158), venga dada por (5.159).

Veamos qué ecuaciones han de satisfacer $A(t)$ y $\varphi(t)$ para que se verifiquen estas dos condiciones. Para ello derivamos la ecuación (5.158) con respecto al tiempo

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A\,\mathrm{sen}\,\psi + \frac{dA}{dt}\cos\psi - \frac{d\varphi}{dt}A\,\mathrm{sen}\,\psi. \tag{5.160}$$

Para abreviar, hemos usado la notación $\psi \equiv \omega\, t + \varphi$. Imponiendo en esta ecuación la condición (5.159) se tiene que

$$\dot{A}\cos\psi - \dot{\varphi}A\,\mathrm{sen}\,\psi = 0. \tag{5.161}$$

Derivando la ecuación (5.159):

$$\ddot{x} = -\omega^2 A\cos\psi - \omega\dot{A}\,\mathrm{sen}\,\psi - \omega A\dot{\varphi}\cos\psi, \tag{5.162}$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación (5.155), obtenemos

$$-\omega^2 A\cos\psi - \omega\dot{A}\,\mathrm{sen}\,\psi - \omega A\dot{\varphi}\cos\psi + \omega^2 A\cos\psi + \epsilon\, f(A\cos\psi, -\omega A\,\mathrm{sen}\,\psi) = 0,$$

es decir,

$$-\omega\dot{A}\,\mathrm{sen}\,\psi - \omega A\dot{\varphi}\cos\psi + \epsilon\, f(A\cos\psi, -\omega A\,\mathrm{sen}\,\psi) = 0. \tag{5.163}$$

En conclusión, $A(t)$ y $\varphi(t)$ son las soluciones del sistema formado por las ecuaciones (5.161) y (5.163), es decir, soluciones del sistema

$$\dot{A}\cos\psi - A\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\psi = 0, \tag{5.164}$$

$$-\omega\dot{A}\,\mathrm{sen}\,\psi - \omega A\dot{\varphi}\cos\psi + \epsilon\, f(A\cos\psi, -\omega A\,\mathrm{sen}\,\psi) = 0. \tag{5.165}$$

Vamos ahora a simplificar estas dos ecuaciones. Multiplicamos la ecuación (5.164) por $\omega\cos\psi$ y le restamos la ecuación (5.165) multiplicada por $\mathrm{sen}\,\psi$ para obtener

$$\omega\dot{A}\cos^2\psi - \omega\dot{\varphi}A\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi + \omega\dot{A}\,\mathrm{sen}^2\psi + \omega A\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi \\ - \epsilon\, f(A\cos\psi, -\omega A\,\mathrm{sen}\,\psi)\,\mathrm{sen}\,\psi = 0, \tag{5.166}$$

[22] Esta condición se justifica (a posteriori) por contribuir a que las ecuaciones diferenciales sobre $A(t)$ y $\varphi(t)$ que se obtienen más adelante [véanse las ecuaciones (5.170)] sean suficientemente simples.

es decir,

$$\omega \dot{A} - \epsilon\, f(A\cos\psi, -\omega A \operatorname{sen}\psi) \operatorname{sen}\psi = 0. \tag{5.167}$$

Ahora multiplicamos la ecuación (5.164) por $-\omega \operatorname{sen}\psi$ y le restamos la ecuación (5.165) multiplicada por $\cos\psi$, quedando

$$\begin{aligned}\omega^2 \dot{A}\cos\psi \operatorname{sen}\psi + \omega\dot{\varphi} A \operatorname{sen}^2\psi - \omega^2 \dot{A}\cos\psi\operatorname{sen}\psi + \omega A\dot{\varphi}\cos^2\psi \\ - \epsilon\, f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\, \cos\psi = 0,\end{aligned} \tag{5.168}$$

o bien,

$$\omega A\dot{\varphi} - \epsilon\, f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi = 0. \tag{5.169}$$

De este modo hemos obtenido un sistema de ecuaciones de primer orden (desacopladas) sobre A y φ formado por (5.167) y (5.169):

$$\begin{cases} \dot{A} = \dfrac{\epsilon}{\omega}\, f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\epsilon}{A\,\omega}\, f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi. \end{cases} \tag{5.170}$$

La resolución exacta de este sistema conduciría a unas funciones $A(t)$ y $\varphi(t)$ tales que, sustituidas en (5.158), nos proporcionarían la solución exacta de la ecuación (5.155). Pero el sistema (5.170) es generalmente muy complicado y no se conoce cómo resolverlo de forma exacta. Así que nos conformaremos con resolverlo de un modo aproximado siguiendo las ideas de Krylov y Bogoliubov. Para empezar, desarrollamos términos de la derecha de (5.170) en serie de Fourier:

$$\begin{cases} \dot{A} = \dfrac{\epsilon}{\omega}K_0(A) + \dfrac{\epsilon}{\omega}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[K_n(A)\cos n\psi + L_n(A)\operatorname{sen} n\psi], \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\epsilon}{A\,\omega}P_0(A) + \dfrac{\epsilon}{A\,\omega}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[P_n(A)\cos n\psi + Q_n(A)\operatorname{sen} n\psi], \end{cases} \tag{5.171}$$

siendo K_0, K_n, L_n, P_0, P_n, y Q_n los correspondientes coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned}
K_0(A) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi\, d\psi, \\
K_n(A) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi\cos n\psi\, d\psi, \\
L_n(A) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen} n\psi\, d\psi, \\
P_0(A) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi\, d\psi, \\
P_n(A) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi\cos n\psi\, d\psi, \\
Q_n(A) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi\operatorname{sen} n\psi\, d\psi.
\end{aligned}$$

En la *primera aproximación* del método de Krylov-Bogoliubov se desprecian los efectos de los armónicos de orden superior que aparecen en (5.171), de modo que nos limitamos a resolver el sistema

$$\begin{cases} \dot{A} = \dfrac{\epsilon}{\omega}\, K_0(A), \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\epsilon}{A\omega}P_0(A), \end{cases} \tag{5.172}$$

es decir,

$$\boxed{\begin{cases} \dot{A} = \dfrac{\epsilon}{2\pi\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi\, d\psi, \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\epsilon}{2\pi A\omega}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi\, d\psi \end{cases} .} \tag{5.173}$$

Este sistema es más fácil de resolver que la ecuación original y que el sistema (5.170). Sin embargo, su solución $A(t)$ y $\varphi(t)$ sustituida en (5.158) conduce a que $x(t) = A(t)\cos(\omega t + \varphi(t))$ sea sólo una solución aproximada. Esta es la solución aproximada que proporciona el método de Krylov-Bogoliubov en su primera aproximación. Pueden construirse aproximaciones de orden superior [Mic81], pero no las estudiaremos aquí.

▶ *Ejemplo 5.21*

Como ejemplo sencillo en donde ilustrar el método de Krylov-Bogoliubov escogemos el oscilador lineal amortiguado, el cual tiene la ventaja de que conocemos su solución exacta y así podemos compararla con la expresión aproximada proporcionada por el método de Krylov-Bogoliubov. La ecuación de este oscilador es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \epsilon\frac{dx}{dt} = 0, \qquad \epsilon > 0.$$

Esta ecuación tiene la forma de (5.155) con $f(x, \dot{x}) = \dot{x}$ y $\omega = 1$. Podemos pues aplicar el método de Krylov-Bogoliulov y, por consiguiente, asumimos que la solución de la ecuación puede expresarse de modo conveniente de la forma (5.158). Para hallar $A(t)$ y $\varphi(t)$ hacemos uso del sistema (5.173) que, en nuestro ejemplo, se reduce a

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{\epsilon}{2\pi\,\omega}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi\, d\psi \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-A\operatorname{sen}\psi)\operatorname{sen}\psi\, d\psi \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi}A\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\psi\, d\psi = \frac{\epsilon\, A}{2}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{\epsilon}{2\pi\, A\,\omega}\int_0^{2\pi} f(A\cos\psi, -\omega A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi\, d\psi \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi\, A}\int_0^{2\pi}(-A\operatorname{sen}\psi)\cos\psi\, d\psi \\ &= \frac{\epsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\psi\cos\psi\, d\psi = 0\ . \end{aligned}$$

Resolviendo estas dos ecuaciones diferenciales, es decir, resolviendo

$$\begin{cases} \dot{A} = -\dfrac{\epsilon\, A}{2}, \\ \dot{\varphi} = 0, \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{cases} A(t) = A(0)\,\mathrm{e}^{-\epsilon t/2}, \\ \varphi(t) = \varphi(0). \end{cases}$$

Por tanto, la solución de Krylov-Bogoliubov es

$$x(t) = A(0)\,\mathrm{e}^{-\epsilon t/2}\cos[t + \varphi(0)].$$

Es instructivo comparar esta solución con la exacta

$$x(t) = A(0)\,\mathrm{e}^{-\epsilon t/2}\cos\left[\sqrt{1-\frac{\epsilon^2}{4}}\,t+\varphi(0)\right].$$

Ambas soluciones son muy parecidas, diferenciándose únicamente en el valor de la frecuencia instantánea: 1 frente a $(1-\epsilon^2/4)^{1/2}$. La diferencia es sólo de orden ϵ^2.

◀

▷ ***Ejercicio*** *5.11*

1. *Demuestra que si en la primera ecuación de* (5.173) *la función f no depende de la velocidad, es decir, si $f(x,\dot{x}) = f(x)$, entonces $K_0(A) = 0$ para todo A y por tanto $\dot{A} = 0$. Esto implica que cualquier amplitud de oscilación es constante en el tiempo, lo cual, por supuesto, no es sorprendente: si f no depende de la velocidad, el oscilador es conservativo, y la energía del oscilador, y por tanto su amplitud, ha de ser constante.*
2. *Demuestra que si f sólo depende de la velocidad, es decir, si $f(x,\dot{x}) = f(\dot{x})$, entonces $P_0(A) = 0$ y la fase de la solución es constante en el tiempo.*

Ciclos límite y su estabilidad según el método de Krylov-Bogoliubov

En un ciclo límite la solución $x(t)$ es periódica. Si escribimos la solución como $x(t) = A(t)\cos(\omega t+\varphi(t))$, es suficiente que $A(t)$ sea igual a una constante, que denotaremos por A_c, para que la solución sea periódica. Si $A(t) = A_c$, entonces $\dot{A} = 0$, es decir,

$$\dot{A} = \frac{\epsilon}{\omega}K_0(A_c) = 0, \tag{5.174}$$

de modo que las raíces de la ecuación $K_0(A) = 0$ son justamente las amplitudes (aproximadas) A_c de los ciclos límite.[23] La fase $\varphi_c(t)$ del ciclo límite con amplitud A_c será la solución de

$$\dot{\varphi}_c = \frac{\epsilon}{\omega\,A_c}P_0(A_c) = \frac{\epsilon}{2\pi\,\omega\,A_c}\int_0^{2\pi} f(A_c\cos\psi, -\omega A_c\,\mathrm{sen}\,\psi)\cos\psi\,d\psi.$$

Como A_c es constante en el tiempo, el miembro derecho de esta ecuación es también constante de modo que la solución es trivial:

$$\varphi_c(t) = \frac{\epsilon\,t}{\omega\,A_c}P_0(A_c) \tag{5.175}$$

En definitiva, el ciclo límite vendría descrito por

$$x_c(t) = A_c\cos\left(\omega\,t+\frac{\epsilon\,t}{\omega\,A_c}P_0(A_c)\right) \tag{5.176}$$

que da lugar a una trayectoria cerrada $(x_c(t),\dot{x}_c(t))$ en el plano de fases.

Es bastante fácil determinar la estabilidad de un ciclo límite mediante el método de Krylov-Bogoliubov: basta con analizar el modo en el que $\dot{A}$ se anula en A_c. Si $\dot{A} < 0$ (es decir, A decrece)

[23] Por supuesto, estamos asumiendo que los ciclos límite existen: acabamos de ver en el ejemplo 5.11 que si $K_0(A) = 0$ para todo A, lo que tenemos son infinitas soluciones periódicas que no están aisladas y que por consiguiente no son ciclos límite.

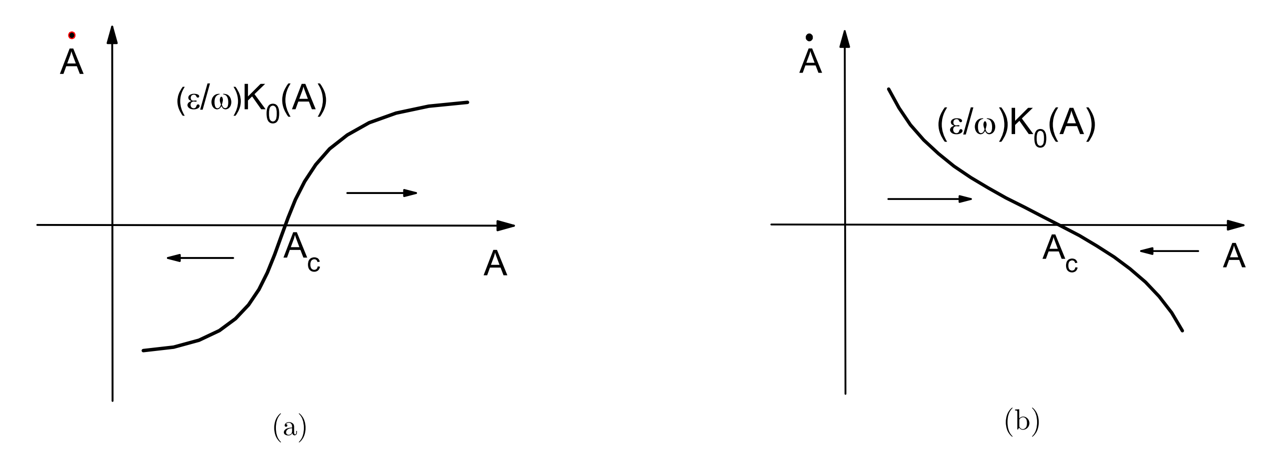


Figura 5.28: Dependencia de la velocidad de cambio de la amplitud, $\dot{A}$, frente a la amplitud A en las vecindades de A_c para un ciclo límite (a) inestable y (b) estable. Las flechas indican la dirección en la que la amplitud A cambia.

en la zona donde $A < A_c$ y $\dot{A} > 0$ (es decir, A crece) en la zona con $A > A_c$, vemos que A se aleja de A_c, es decir, el ciclo límite es inestable:

$$\left.\begin{array}{l} A < A_c \Rightarrow \dot{A} < 0 \Rightarrow A \text{ decrece} \\ A > A_c \Rightarrow \dot{A} > 0 \Rightarrow A \text{ crece} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ciclo límite inestable.} \tag{5.177}$$

Esto es equivalente a decir que

$$\left.\frac{d\dot{A}}{dA}\right|_{A_c} > 0 \tag{5.178}$$

para los ciclos límite inestables (véase la figura 5.28).

Razonando de igual modo, si para $A < A_c$ resulta que $\dot{A} > 0$, y para $A > A_c$ se tiene que $\dot{A} < 0$, entonces las amplitudes tienden a acercarse a A_c, es decir, en este caso el ciclo límite es estable:

$$\left.\begin{array}{l} A < A_c \Rightarrow \dot{A} > 0 \Rightarrow A \text{ crece} \\ A > A_c \Rightarrow \dot{A} < 0 \Rightarrow A \text{ decrece} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ciclo límite estable.} \tag{5.179}$$

Por supuesto, esto es equivalente a decir que

$$\left.\frac{d\dot{A}}{dA}\right|_{A_c} < 0 \tag{5.180}$$

para los ciclos límite estables (véase la figura 5.28).

▷ ***Ejercicio*** *5.12*

Halla las relaciones del tipo de (5.179) y (5.180) para un ciclo límite semiestable.

5.7. Caos y atractores extraños. Ecuaciones de Lorenz

Hemos estudiado hasta ahora sistemas autónomos de tan sólo dos ecuaciones de primer orden. Mucho de lo que hemos visto es también válido para sistemas de más de dos ecuaciones. Sin embargo, el análisis de estos sistemas es más complicado porque:

1. Hay un número mayor de casos posibles. Este número aumenta con el orden del sistema.

2. Es difícil representar (¡e imaginar!) trayectorias en un diagrama de fases de tres o más dimensiones.

3. Para sistemas de orden mayor o igual que tres se producen fenómenos muy complejos y extraños que no se dan en sistemas de segundo orden. Estos fenómenos, que suelen englobarse bajo el término de “caos”, se están estudiando con intensidad desde hace relativamente poco tiempo.[24] Vamos a esbozar en esta sección alguno de estos fenómenos a través del análisis de las famosas ecuaciones de Lorenz.

Ecuaciones de Lorenz

A principios de los años 60, el meteorólogo E. N. Lorenz estaba interesado en descubrir de un modo matemático simple el comportamiento físico de una capa de fluido calentado desde abajo.

Es comportamiento de este sistema nos es familiar a casi todos los que alguna vez (probablemente en la cocina) hemos mirado un fluido (probablemente aceite) mientras se calentaba. Lo que sucede es algo parecido a esto: si la diferencia de temperatura ΔT entre el fondo del fluido y la superficie de éste es pequeña, se produce una conducción de calor de abajo hacia arriba sin movimiento macroscópico apreciable de fluido; si ΔT es moderado, entonces el fluido de abajo sube y desplaza al fluido frío superior, dándose el fenómeno de convección (aparición de rollos convectivos); finalmente, si ΔT es muy grande, el fluido se mueve de modo turbulento.

Lorenz, después de drásticas simplificaciones en las ecuaciones del movimiento del fluido, modeló el comportamiento de esta capa mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma\, x + \sigma\, y, \\ \dfrac{dy}{dt} = r\, x - y - x\, z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -b\, z + x\, y. \end{cases} \tag{5.181}$$

Estas son las famosas *ecuaciones de Lorenz*. Su aspecto no es muy terrible: nótese que el sistema sería lineal con coeficientes constantes si no fuera por la presencia de dos términos no lineales: $x\, z$ en la segunda ecuación y $x\, y$ en la tercera. En todo caso, su aspecto no hace presagiar que sus soluciones puedan tener la riqueza de comportamientos necesaria como para poder describir, aunque sea de modo muy cualitativo, un fenómeno físico tan complicado como el calentamiento desde abajo de una capa de fluido; sistema en el que, como hemos hecho notar anteriormente, el fluido bien permanece inmóvil bajo ciertas condiciones, bien se mueve de forma periódica, o bien se agita de modo turbulento.

Las variables x, y, z del sistema están ligadas con magnitudes físicas: x está relacionada con la velocidad del fluido, y con la diferencia de temperatura en la dirección horizontal, y z con la diferencia de temperatura en la dirección vertical. Los parámetros σ, r y b son reales y positivos.

[24]Es inicio del estudio intensivo sobre sistemas caóticos suele datarse hacia comienzos de los años sesenta, con los primeros trabajos de E. N. Lorenz

Los parámetros σ y b dependen del tipo de fluido (de su conductividad térmica y viscosidad) y del grosor de la capa. Valores razonables de estos dos parámetros para la atmósfera son $r = 10$ y $b = 8/3$. El parámetro r es proporcional a ΔT.[25]

Cálculo de los puntos críticos

Para analizar este sistema (dentro de nuestra posibilidades) y empezamos localizando los puntos críticos. En los puntos críticos se tiene que $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, por lo que del sistema (5.181) se deduce que las coordenadas (x, y, z) de estos puntos críticos deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\sigma\, x + \sigma\, y = 0, \\ r\, x - y - x\, z = 0, \\ -b\, z + x\, y = 0. \end{cases} \tag{5.182}$$

De la primera ecuación de (5.182) es fácil ver que $x = y$. Sustituyendo este resultado en la segunda y tercera ecuación obtenemos

$$\begin{cases} x\,(r - 1 - z) = 0, \\ -b\, z + x^2 = 0, \end{cases} \tag{5.183}$$

Una solución obvia es la trivial $x = y = z = 0$. Las otras las hallamos a partir de la primera ecuación de (5.183) de la cual se deduce que

$$z = r - 1.$$

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación obtenemos

$$x = \pm\sqrt{b\,(r-1)}, \qquad y = \pm\sqrt{b\,(r-1)}.$$

Por consiguiente, si $r > 1$, hay tres puntos críticos:

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0, 0), \\ P_2 &= \left(\sqrt{b\,(r-1)}\,,\ \sqrt{b\,(r-1)}\,,\ r-1\right), \\ P_3 &= \left(-\sqrt{b\,(r-1)}\,,\ -\sqrt{b\,(r-1)}\,,\ r-1\right). \end{aligned} \tag{5.184}$$

Si $r \leq 1$, entonces sólo existe el punto crítico $P_1 = (0, 0, 0)$.

Estabilidad de los puntos críticos

Una vez hallados los puntos críticos, analizaremos su estabilidad para así conocer el comportamiento de las trayectorias solución del sistema en sus vecindades.

- *Punto crítico* $P_1 = (0, 0, 0)$

  Linealizando el sistema (5.181) en torno a este punto, obtenemos

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sigma\, x + \sigma\, y, \\ \dfrac{dy}{dt} = r\, x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = -b\, z, \end{cases} \tag{5.185}$$

[25] El parámetro σ es el número de Prandtl y r es el número de Rayleigh

cuya ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -\sigma - m & \sigma & 0 \\ r & -1-m & 0 \\ 0 & 0 & -b-m \end{vmatrix} = (b+m)\left[m^2 + (\sigma+1)\,m - \sigma\,(r-1)\right] = 0, \tag{5.186}$$

tiene por solución a

$$\begin{aligned} m_1 &= -b, \\ m_2 &= -\frac{1}{2}(\sigma+1) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma\,(r-1)}, \\ m_3 &= -\frac{1}{2}(\sigma+1) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4\sigma\,(r-1)}. \end{aligned}$$

Por tanto, la estabilidad del punto crítico P_1 depende del valor de r. Si $r < 1$, las tres raíces serán negativas (o tendrán parte real negativa) y el punto crítico será estable. Pero si $r > 1$, m_1 y m_2 son negativas y m_3 se vuelve positiva, provocando que el punto crítico P_1 se torne inestable (es un punto de silla). Si ocurriera que $r = 1$, nos encontraríamos en un caso fronterizo con $m_1 = -b$ y $m_2 = m_3 = 0$. En resumen:

$$\begin{array}{lcccl} r < 1 & \Rightarrow & m_1, m_2, m_3 < 0 & \Rightarrow & P_1 \text{ es estable,} \\ r > 1 & \Rightarrow & m_1, m_3 < 0, m_2 > 0 & \Rightarrow & P_1 \text{ es inestable.} \end{array}$$

- *Punto crítico* $P_2 = \left(\sqrt{b\,(r-1)}\,,\ \sqrt{b\,(r-1)}\,,\ r-1\right) \equiv (x_0, y_0, z_0)$

Empezamos linealizando el sistema en torno a P_2. Para ello hacemos un cambio de sistema de referencia en el que trasladamos el origen a P_2:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u\,, \\ y &= y_0 + v\,, \\ z &= z_0 + w\,. \end{aligned}$$

Aplicamos el cambio de referencia a (5.181) y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\sigma\,(x_0 + u) + \sigma\,(y_0 + v) \\ &= -\sigma\,x_0 + \sigma\,y_0 - \sigma\,u + \sigma\,v \\ &= -\sigma\,u + \sigma\,v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= r\,x_0 + r\,u - y_0 - v - (x_0 + u)\,(z_0 + w) \\ &= r\,x_0 - y_0 - x_0\,z_0 + r\,u - v - z_0 u - x_0\,w - u\,w \\ &= (r - z_0)\,u - v - x_0\,w - u\,w, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= -b\,z_0 - b\,w + (x_0 + u)\,(y_0 + v) \\ &= -b\,z_0 + x_0\,y_0 - b\,w + y_0\,u + x_0\,v + u\,v \\ &= y_0\,u + x_0\,v - b\,w + u\,v. \end{aligned}$$

Los términos no lineales ($u\,v$ en la segunda ecuación, y $u\,v$ en la tercera) son cuadráticos por lo que P_2 es un punto crítico simple. Teniendo en cuenta que $r - z_0 = 1$, el sistema linealizado es

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -\sigma\,u + \sigma\,v, \\ \dfrac{dv}{dt} = u - v - x_0\,w, \\ \dfrac{dw}{dt} = y_0\,u + x_0\,v - b\,w, \end{cases} \tag{5.187}$$

siendo su ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -\sigma - m & +\sigma & 0 \\ 1 & -1-m & -x_0 \\ y_0 & x_0 & -b-m \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$m^3 + m^2(\sigma + b + 1) + b\,(\sigma + r)\,m + 2b\,\sigma\,(r-1) = 0. \tag{5.188}$$

Bien mediante un análisis algebraico cuidadoso de esta ecuación (algo que no haremos aquí[26]), o bien mediante la aplicación directa del criterio de Hurwitz (véase la sección 5.3.2, página 297), es posible llegar a la conclusión de que las tres raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa si

$$r < r_c \equiv \frac{\sigma\,(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \tag{5.189}$$

Para $r > r_c$ hay una raíz negativa y otras dos complejas conjugadas con parte real positiva. Esto significa que P_2 es estable si $r < r_c$ e inestable si $r > r_c$.

- *Punto crítico* $P_3 = \left(-\sqrt{b\,(r-1)}\,,\, -\sqrt{b\,(r-1)}\,,\, r-1\right) \equiv (x_0, y_0, z_0)$

Procedemos con este punto de igual modo que con el punto crítico P_2, obteniendo, tras hacer la oportuna traslación del sistema de referencia, el mismo sistema que para el punto P_2, es decir, el sistema (5.187), y, por tanto, la misma ecuación característica (5.188). Por consiguiente, el análisis llevado a cabo para P_2 es igualmente válido para P_3.

En resumen:

$$\begin{aligned} r < r_c \quad &\Rightarrow \quad P_2 \text{ y } P_3 \text{ estables,} \\ r > r_c \quad &\Rightarrow \quad P_2 \text{ y } P_3 \text{ inestables.} \end{aligned}$$

▷ ***Ejercicio*** *5.13*

Demuestra mediante la aplicación del criterio de Hurwitz (véase la sección 5.3.2, página 297) que la ecuación característica (5.188) tiene tres raíces con parte real negativa si $r < r_c$.

¿Hacia dónde van las trayectorias?

Ya que P_1, P_2 y P_3 son inestables para $r > r_c$ (suponiendo que $r_c \geq 1$), podríamos pensar que las trayectorias de la solución en el espacio de fases deben irse a infinito, pero es fácil darse cuenta de que esto no sucede, tal como mostraremos a continuación.

[26]El que tenga curiosidad puede ver este análisis en la referencia [Dra92]

Sea $D(t)$ la distancia de la solución $(x(t), y(t), z(t))$ al punto fijo $(0, 0, r+\sigma)$. Veamos si esta distancia aumenta en el tiempo para valores grandes de (x, y, z). Para ello vamos a calcular la derivada temporal de $D^2(t)/2$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{D^2(t)}{2} &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[x^2+y^2+(z-r-\sigma)^2\right]\\ &= x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+(z-r-\sigma)\frac{dz}{dt}\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (5.181), esta ecuación se reduce a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{D^2(t)}{2} &= -\sigma\,x\,(x-y)+y\,(r\,x-y-x\,z)-(z-r-\sigma)\,b\,z+(z-r-\sigma)\,x\,y\\ &= -\sigma\,x^2-y^2-b\,z^2+b\,(r+\sigma)\,z.\end{aligned}$$

Es obvio que esta cantidad es menor que cero cuando $(x, y, z) \to \infty$. Luego, sorprendentemente, vemos que para valores grandes de (x, y, z) las trayectorias no sólo no tienden al infinito sino que tienden a reducir la distancia $D(t)$, es decir, a acercarse hacia valores más pequeños de (x, y, z). Entonces, ¿hacia dónde van las trayectorias? Podríamos pensar que quizás se dirijan hacia una solución periódica cerrada (ciclo límite o toro atractivo), pero se puede demostrar [Str94] que tal cosa no es posible (de hecho las trayectorias son muy irregulares, véase la figura 5.30). Entonces *¿hacia dónde van las trayectorias?* Puede verse numéricamente que las trayectorias solución tienden en el espacio de fases hacia una figura geométrica con aspecto de mariposa, llamada mariposa de Lorenz (véase la figura 5.29), que es una estructura fractal cuya dimensión no es entera, es decir, no es una línea, no es una superficie, no tiene volumen, su estructura es infinitamente intrincada, es un atractor extraño.

Este comportamiento caótico no se da para cualquier valor de r. Por ejemplo, para $r = 100$ (con $\sigma = 10$ y $b = 8/3$) las soluciones tienden hacia un ciclo límite estable. En general existen intervalos de valores de r en donde las soluciones son caóticas, otros en donde tienden a ciclos límites, otros en donde tienden a puntos fijos estables y otros en donde los atractores extraños y los ciclos límite se alternan de un modo extraordinariamente complicado.[27]

Sensibilidad a las condiciones iniciales

En las ecuaciones de Lorenz condiciones iniciales arbitrariamente próximas dan lugar, si se espera lo suficiente, a soluciones completamente distintas (véase la figura 5.30) que, sin embargo, deambulan trazando las alas de la mariposa por la región acotada que es el atractor extraño (véase la figura 5.31).

► *Ejemplo 5.22*

Una de las características más sorprendentes del comportamiento caótico es que puede surgir en sistemas no lineales con dimensión baja, es decir, con un número pequeño de variables independientes. Se sabe que para que en un sistema autónomo se dé comportamiento caótico el número de variables independientes ha de ser mayor o igual que tres. Las ecuaciones de Lorenz son un ejemplo de sistema caótico con el número mínimo de variables posibles y que además es bastante simple. Una pregunta que podríamos hacernos es si es posible encontrar un sistema caótico aún mas simple que el de Lorenz. Esta pregunta ha sido respondida afirmativamente por J. C. Sprott en su artículo *Some simple chaotic flows*, Physical Review E, **50** (1994) R467.[28] Sprott encontró 19 sistemas caóticos que son más sencillos que el de Lorenz bien porque contienen

[27]Una descripción más detallada puede encontrarse en la sección 9.5 de [Str94].

[28]Puedes encontrar más detalles sobre este trabajo (y descargar el artículo y programas relacionados) en la página web de Sprott cuya dirección se encuentra en `http://www.unex.es/eweb/fisteor/santos/mma`

menos términos (las ecuaciones de Lorenz tienen siete), bien porque el número de términos no lineales es menor (las ecuaciones de Lorenz tienen dos). Uno de estos sistemas caóticos es el siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = yz, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = 1 - xy. \end{cases} \tag{5.190}$$

Sin duda es bien simple: cinco términos, dos de ellos no lineales. En la figura 5.32 se muestra el aspecto del atractor extraño de este sistema.

◀

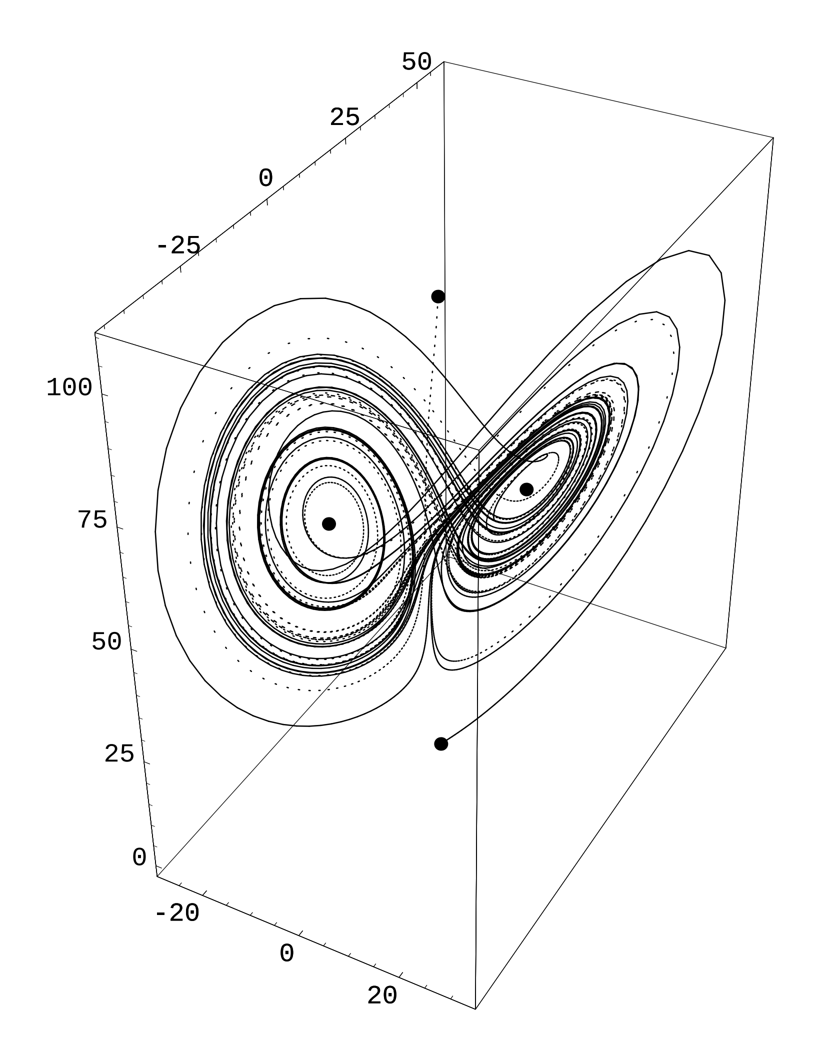


Figura 5.29: Atractor extraño de las ecuaciones de Lorenz llamado mariposa de Lorenz. Se ha representado la solución numérica de las ecuaciones de Lorenz con $\sigma = 10$, $r = 60$ y $b = 8/3$, para los puntos iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 3)$ (línea continua) y $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 100)$ (línea punteada). Para este sistema $r_c = \sigma\,(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1) \approx 24'7 < r$ y los puntos críticos, aparte del origen, son $C_\pm = (\pm\sqrt{b\,(r-1)}, \pm\sqrt{b\,(r-1)}, r-1) \approx (\pm 12'5, \pm 12'5, 59)$, y aparecen en la figura representados por dos puntos en el interior de las alas de la mariposa.

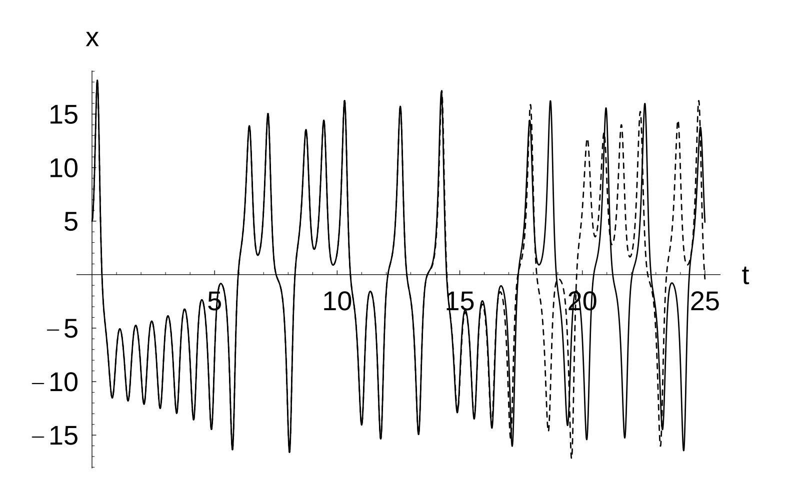


Figura 5.30: x frente a t para dos soluciones de las ecuaciones de Lorenz con condiciones iniciales muy próximas cuando $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$. La línea discontinua es la solución para la condición inicial $(x(0), y(0), z(0)) = (5, 5, 5)$, y la línea continua representa la solución para $(x(0), y(0), z(0)) = (5'0001, 5, 5)$. A partir de aproximadamente $t = 18$ ambas soluciones siguen caminos claramente distintos.

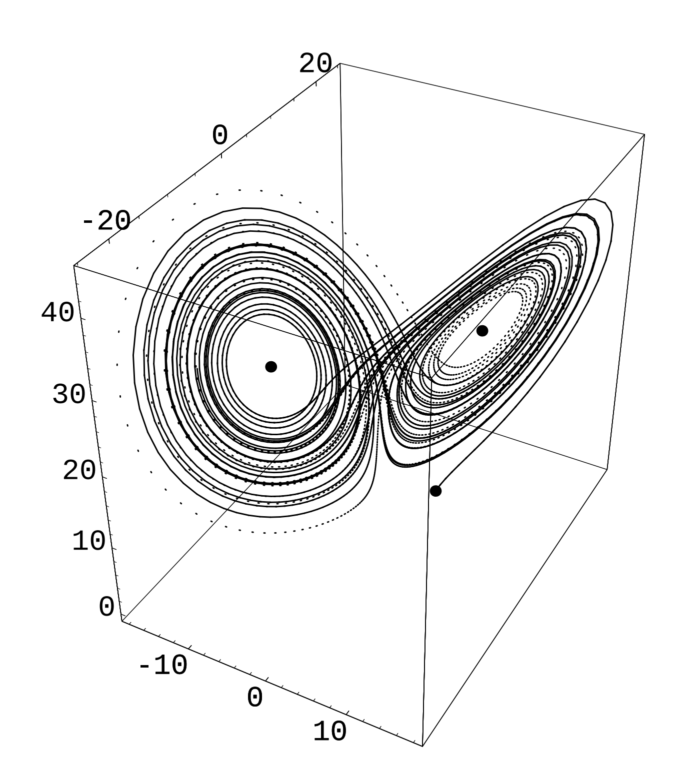


Figura 5.31: Solución numérica de las ecuaciones de Lorenz con $\sigma = 10$, $r = 28$ y $b = 8/3$, para los puntos iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (5, 5, 5)$ (línea continua) y $(x(0), y(0), z(0)) = (5'0001, 5, 5)$ (línea punteada). Para este sistema $r_c = \sigma\,(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1) \approx 24'7 < r$ y los puntos críticos, aparte del origen, son $C_\pm = (\pm\sqrt{b\,(r-1)}, \pm\sqrt{b\,(r-1)}, r-1) \approx (\pm 8'5, \pm 8'5, 27)$, y aparecen en la figura representados por dos puntos en el interior de las alas de la mariposa. Ambas trayectorias siguen inicialmente caminos muy próximos, pero, tras cierto tiempo no muy grande, acaban trazando trayectorias completamente distintas.

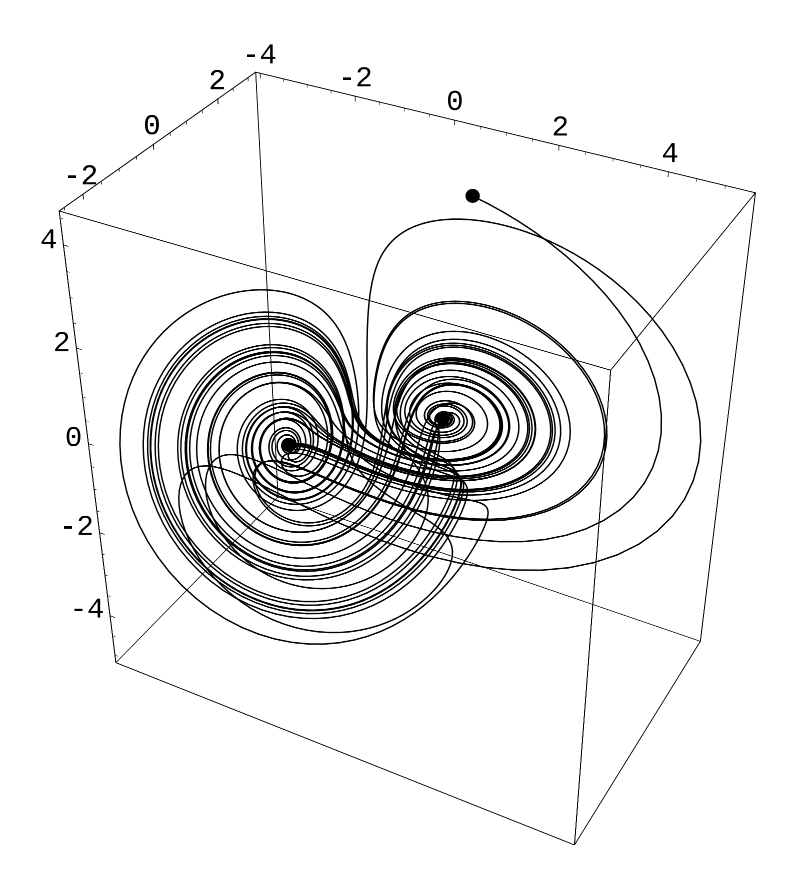


Figura 5.32: Solución numérica del sistema (5.190) para las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 2, 4)$. La solución se ha representado hasta el instante $t = 400$.

5.8. Problemas

5.1. Analiza la estabilidad del punto de reposo del sistema lineal

$$\dot{x} = x + 3y\,,$$
$$\dot{y} = 5x - y.$$

5.2. Analiza la estabilidad del punto de reposo del sistema lineal

$$\dot{x} = 3x + y\,,$$
$$\dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + y,$$

en función de los valores que tome el parámetro real α.

5.3. Clasifica, según el valor de α, el punto de reposo del sistema

$$\dot{x} = -\,3x + \alpha y\,,$$
$$\dot{y} = 2x + y.$$

5.4. Analiza la estabilidad del punto de reposo de este sistema:

$$\dot{x} = -x + z\,,$$
$$\dot{y} = -2y - z\,,$$
$$\dot{z} = y - z\,.$$

5.5. Dibuja el diagrama de fases alrededor del origen de un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden en el que una de sus raíces es nula. Analiza la estabilidad del punto fijo $(0, 0)$.

5.6. Demuestra que el diagrama de fases de todos los sistemas lineales de dos ecuaciones de primer orden con raíz nula doble es equivalente al del sistema

$$\dot{x} = x - sy\,,$$
$$\dot{y} = \frac{1}{s}\,x - y\,,$$

con $s \neq 0$ arbitrario. Comprueba que la solución de este sistema es

$$x(t) = c_1 + (c_1 - c_2 s)t\,,$$
$$y(t) = c_2 + \frac{1}{s}(c_1 - c_2 s)t\,,$$

siendo c_1 y c_2 dos constantes arbitrarias. Dibuja el diagrama de fases y analiza la estabilidad del punto fijo $(0, 0)$.

5.7. En este ejercicio queremos analizar la evolución de los sentimientos amorosos de Romeo y Julieta. Sea $R(t)$ la medida del amor de Romeo por Julieta en el instante t y $J(t)$ el de Julieta por Romeo. Si esta medida es negativa, el sentimiento no es de amor sino de rechazo. Un modelo simple de la evolución de sus amores se basa en la consideración de que su amor crece o disminuye dependiendo sólo de sus sentimientos mutuos. Supongamos que esta dependencia es lineal. Entonces

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = cR + dJ\,.$$

a) Sugiere nombres que describan el carácter de un enamorado, digamos de Romeo, para las distintas combinaciones del signo de a y b.

b) Supón que el amor de Romeo aumenta (disminuye) si Julieta le ama (no le ama) y el de Julieta aumenta (disminuye) si Romeo no le ama (sí le ama). En este caso, las ecuaciones tomarían la forma

$$\frac{dR}{dt} = aJ\,,$$
$$\frac{dJ}{dt} = -bR\,,$$

con $a > 0$ y $b > 0$. Traza el diagrama de fases de la evolución de los amores de Romeo y Julieta para este caso.

c) Supón que el amor de Romeo tiende a disminuir si él ya ama a Julieta y a aumentar si Julieta le ama. Supón que Julieta se comporta exactamente de la misma forma. En este caso, la evolución de sus sentimientos vendría dada por

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ\,,$$
$$\frac{dJ}{dt} = bR + aJ\,,$$

con $a < 0$ y $b > 0$. Demuestra que:

1) Si $a^2 > b^2$, entonces su relación amorosa languidece hasta la indiferencia absoluta.
2) Si $a^2 < b^2$, entonces su relación amorosa puede transformase bien en pasión total o en guerra encarnizada. Determina bajo qué condiciones iniciales se produce una cosa u otra.

d) Supón que la relación amorosa está gobernada por las ecuaciones

$$\frac{dR}{dt} = J,$$
$$\frac{dJ}{dt} = -R + J.$$

Obtén el diagrama de fases de esta relación.

Si te ha interesado este problema, puedes encontrar más detalles en el libro de Strogatz [Str94]. WWW

5.8. Halla el tipo y la estabilidad de los puntos críticos del sistema

$$\dot{x} = x - y,$$
$$\dot{y} = 1 - xy.$$

Dibuja en el plano de fases (x, y) las trayectorias solución en las vecindades de los puntos críticos.

5.9. Sea el sistema no lineal

$$\dot{x} = 6x - y + x^2,$$
$$\dot{y} = \alpha x + 2y + y^2.$$

a) Halla el tipo de punto crítico y la estabilidad del punto $(0, 0)$ en función del valor de α.

b) Dibuja de forma aproximada las trayectorias solución en las vecindades de este punto para $\alpha = -21$ y $\alpha = 0$.

c) Sea $\alpha = 0$. Demuestra que $(x, y) = (-6, 0)$ es un punto crítico simple y determina su tipo y estabilidad.

5.10. Las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = -cy + \beta xy\,.$$

con $a > 0$, $c > 0$, $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ pretenden describir la evolución de la población x de una especie (*presas*) que es cazada por otra especie (*predadores*) cuya población es y.

a) Discute la adecuación del sistema anterior a la descripción del sistema *predador-presa* e interpreta el significado de los coeficientes a, c, α y β.

b) Halla los puntos críticos del sistema y, mediante el análisis del sistema linealizado, discute su tipo y estabilidad. Haz un esquema de las trayectorias del sistema linealizado en las vecindades de los puntos críticos.

c) Demuestra que la ecuación general de las trayectorias del sistema no lineal es

$$c \ln x - \beta x + a \ln y - \alpha y = \text{const}\,.$$

Dibuja estas trayectorias en el espacio de fases para distintas condiciones iniciales.

5.11. Las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon_1 x - \sigma_1 x^2 - \alpha_1 xy\,,$$
$$\frac{dy}{dt} = \epsilon_2 y - \sigma_2 y^2 - \alpha_2 xy\,,$$

con $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, son ecuaciones de tipo Lotka-Volterra que pretenden describir la competición de dos especies (digamos conejos y ovejas), con población x e y, que, en un ecosistema dado, comparten un mismo alimento (hierba) presente en cantidades limitadas. En lo que sigue supón que $\epsilon_1 = 3$, $\epsilon_2 = 2$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$.

a) Discute la adecuación del sistema anterior a la descripción del sistema de dos especies competidoras e interpreta el significado de los coeficientes ϵ_1, ϵ_2, σ_1, σ_2, α_1, α_2.

b) Halla los puntos críticos del sistema y, mediante el análisis del sistema linealizado, discute su tipo y estabilidad. Haz un esquema de las trayectorias del sistema linealizado en las vecindades de los puntos críticos.

c) Haz un esquema de las trayectorias en el espacio de fases.

5.12. Demuestra que la solución nula de la ecuación de van der Pol

$$\ddot{x} + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \qquad |\epsilon| \ll 1\,,$$

es asintóticamente estable cuando $\epsilon < 0$ e inestable cuando $\epsilon > 0$.

5.13. Halla la estabilidad de los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} =& y(x+1)\,,\\ \dot{y} =& x(1+y^3)\,,\end{aligned}$$

y determina sus trayectorias de modo cualitativo.

5.14. Sea el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\,,\\ \dot{y} &= -4x + x^2\,.\end{aligned}$$

a) Halla los puntos críticos. ¿Son puntos críticos simples? Determina su tipo y estabilidad.

b) Halla la ecuación de las trayectorias que pasan por los puntos críticos.

c) Halla de forma aproximada mediante el método de balance armónico las trayectorias del sistema que pasan por las vecindades del origen. Utiliza el resultado obtenido para determinar la estabilidad del origen $(0,0)$.

d) Dibuja un esquema de las trayectorias en el plano $x-y$.

5.15. Demuestra que todas las soluciones de

$$\ddot{x} + |\dot{x}|\dot{x} + x^3 = 0$$

tienden a cero cuando $t \to \infty$.

5.16. Demuestra que el origen es un punto espiral del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x\sqrt{x^2+y^2}\,,\\ \dot{y} &= x - y\sqrt{x^2+y^2}\,,\end{aligned}$$

pero es un centro del sistema linealizado.

5.17. Halla valores de $a > 0$, $b > 0$, $m = 0,1,2\ldots$, $n = 0,1,2\ldots$ de modo que $E(x,y) = ax^{2n} + by^{2m}$ sean funciones de Liapunov para los sistemas

$$(a) \quad \dot{x} = -x - 2y^2\,, \qquad \dot{y} = xy - y^3. \tag{5.191}$$

$$(b) \quad \dot{x} = y - x(x^2+y^2)\,, \qquad \dot{y} = -x - y(x^2+y^2)\,. \tag{5.192}$$

$$(c) \quad \dot{x} = -x + y - xy^2\,, \qquad \dot{y} = -2x - y - x^2y \tag{5.193}$$

5.18. Comprueba que $8x^2 + 11xy + 5y^2$ es función de Liapunov del sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 4y\,,\\ \dot{y} &= -2x - 5y\,.\end{aligned}$$

5.19. Demuestra que el sistema dado en coordenadas polares

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r\,f(r,\theta)\,,\\ \frac{d\theta}{dt} &= g(r,\theta)\,.\end{aligned}$$

se reduce, en coordenadas cartesianas, al sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x\,f(r,\theta) - y\,g(r,\theta), \\ \frac{dy}{dt} &= x\,g(r,\theta) + y\,f(r,\theta). \end{aligned} \tag{5.194}$$

En lo que sigue supón que $g(\theta) = 1$ y que $f(r,\theta) = f(r)$ es una función continua.

a) Si $f(r)$ tiene n ceros, demuestra que el sistema (5.194) tiene un punto fijo y n soluciones periódicas (ciclos límite) de la forma $(x = r_m \cos t, y = r_m \operatorname{sen} t)$, siendo r_m uno de los ceros de $f(r)$. Analiza la estabilidad de cada ciclo límite en función del signo de $f(r)$ entre los ceros.

b) Supón que $f(r)$ es un polinomio (digamos de grado dos) que pasa por $r = 1$ y $r = 2$. Obtén el sistema no lineal dado por (5.194) cuyos ciclos límite son $(\cos t, \operatorname{sen} t)$ y $(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)$.

c) Supongamos que $f(r) = 0$ para todo r. ¿Significa esto que hay un ciclo límite para todo r?

d) ¿Bajo qué condiciones es lineal el sistema (5.194)? Utiliza el sistema equivalente en polares para demostrar que bajo esas condiciones el sistema (5.194) no puede tener ciclos límite?

e) Usando tanto la representación polar como la cartesiana, determina cuándo es estable el punto crítico $(x = 0, y = 0)$.

5.20. Encuentra soluciones aproximadas mediante el método de balance armónico de:

a) $\ddot{x} + x - \frac{1}{6}x^3 = 0$, y compara con la relación frecuencia-amplitud exacta del péndulo:

$$\omega^2 = 1 - \frac{A^2}{8} + \frac{5A^4}{1536} + O(A^6).$$

b) $\ddot{x} + \operatorname{sen}(x) = 0$, y compara con la relación frecuencia-amplitud exacta del péndulo.

c) $\ddot{x} + \operatorname{sgn}(x) = 0$, donde la función signo sgn(x) se define así: $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 1$ si $x > 0$, y $\operatorname{sgn}(x) = 0$ si $x = 0$.

d) $\ddot{x} + \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$.

e) $\ddot{x} - x + \alpha x^3 = 0$ con $0 < \alpha$.

f) $\ddot{x} + x - \alpha x^2 = 0$ con $0 < \alpha$.

5.21. Encuentra soluciones aproximadas del oscilador

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2)x = 0$$

mediante el método del balance armónico. Demuestra que $x(t) = \cos(t)$ es una solución exacta. Este oscilador se estudió en el ejemplo 5.12 de la página 314 y se calcularon las trayectorias solución $(x(t), \dot{x}(t))$ exactas en el plano de fases. A la vista de la figura 5.12, ¿cuándo esperas que el método de balance armónico proporcione mejores (peores) soluciones aproximadas?

5.22. Emplea el método de Krylov-Bogoliubov para hallar soluciones aproximadas de:

a) $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$.

b) $\ddot{x} + x + \epsilon \dot{x}^2 = 0$.

c) $\ddot{x} + x + \epsilon |\dot{x}| \dot{x} = 0$.

d) $\ddot{x} + x + \epsilon \operatorname{sgn}(\dot{x}) = 0$ (oscilador con amortiguamiento de Coulomb).

e) $\ddot{x} + x - \epsilon (1 - x^2) \dot{x} = 0$ (ecuación de van der Pol).

f) $\ddot{x} + x + \epsilon (\dot{x} + \alpha x^3) = 0$.

g) $\ddot{x} + x + \epsilon (\dot{x} + x^n) = 0$, donde n es un número natural $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

Capítulo 6

Ecuaciones integrales lineales

6.1. Introducción

Al comienzo del tema dedicado a las ecuaciones diferenciales no lineales nos preguntábamos si su importancia se correspondía con la atención que le íbamos a dedicar. La respuesta fue un *no* rotundo debido a que las ecuaciones diferenciales no lineales aparecen en la descripción de un gran número de problemas de la Ciencia e Ingeniería. Esto, sin embargo, no es lo que sucede con las ecuaciones integrales. Su presencia en las Ciencias no es tan generalizada y, además, la ecuaciones integrales que aparecen en los problemas físicos pueden en muchos casos reducirse a ecuaciones diferenciales. No obstante, hay muchos problemas importantes en la Ciencia —problema de la dispersión en Mecánica Cuántica, ecuación de evolución de la función de distribución de velocidades o ecuación de Boltzmann, estructura de líquidos— que se expresan de forma natural en términos de ecuaciones integrales (o integrodiferenciales, como es el caso de la ecuación de Boltzmann) y que *no* pueden reducirse a ecuaciones diferenciales (más ejemplos pueden verse en [Jer99]).

Una clase de problemas especialmente importantes en donde surgen ecuaciones integrales son los llamados problemas *inversos* que, de un modo cualitativo, pueden describirse como aquellos en los que se pretende discriminar las causas individuales de un efecto (el cual es conocido) cuando este efecto es el resultado de la superposición (integración) de estas causas. Un ejemplo sería el cálculo de la distribución de carga eléctrica $\rho(\vec{r})$ en una región del espacio Ω a partir del conocimiento del potencial eléctrico $V(\vec{r})$ que produce:

$$V(\vec{r}) = \int_\Omega \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d\vec{r}\,'.$$

Esta es una ecuación integral porque la función incógnita $\rho(\vec{r}\,)$ aparece *integrada.*

6.2. Definiciones y clasificación de las ecuaciones integrales

Una ecuación integral es una ecuación en la que la función incógnita aparece integrada.[1] Una ecuación integral *lineal* con función incógnita $\varphi(x)$ tiene la forma

$$\lambda \int_a^b y\, k(x,y)\, \varphi(y) + g(x) = \circledcirc\, \varphi(x), \tag{6.1}$$

donde:

- $g(x)$ es una función conocida,
- $k(x,y)$ es el *núcleo* o *kernel* de la ecuación integral,
- λ es una constante que a menudo desempeña el papel de autovalor,
- $\circledcirc$ es una constante que introducimos para simplificar la exposición y que puede ser cero o uno.

En lo que sigue, salvo especificaciones más detalladas que hagamos en su momento, supondremos generalmente que el núcleo $k(x,y)$ es una función continua en el cuadrado $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, y que $g(x)$ y $\varphi(x)$ son continuas en el intervalo $a \le x \le b$. El núcleo $k(x,y)$ se dice que es de cuadrado sumable en el *cuadrado* $a \le x \le b$, $a \le y \le b$ si

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2\, dx\, dy = \text{finito}. \tag{6.2}$$

La ecuación integral puede escribirse de un modo más compacto en términos de operadores

$$\lambda\, \widehat{k}\, \varphi + g = \circledcirc\, \varphi, \tag{6.3}$$

donde $\widehat{k}$ es el operador *integral* definido por

$$\widehat{k}\, \varphi = \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y). \tag{6.4}$$

Las ecuaciones integrales se clasifican según los valores que tomen los términos involucrados en (6.1):

- Si $\circledcirc = 0$, la ecuación es de Fredholm de primera especie:

$$\lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y) + g(x) = 0. \tag{6.5}$$

- Si $\circledcirc = 1$, la ecuación es de Fredholm de segunda especie:

$$\lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y) + g(x) = \varphi(x). \tag{6.6}$$

[1] Si en la ecuación también aparece la derivada (de cualquier orden) de la función incognita, entonces la ecuación es integrodiferencial. Estas ecuaciones son generalmente mucho más complicadas que las integrales y no serán estudiadas aquí.

- Si $g(x) = 0$, la ecuación es homogénea:

$$\lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y) = \circledcirc\, \varphi(x). \tag{6.7}$$

  La ecuación es inhomogénea si $g(x) \neq 0$.

- Si $k(x,y) = 0$ para $y > x$, la ecuación es de Volterra:

$$\lambda \int_a^x dy\, k(x,y)\, \varphi(y) + g(x) = \circledcirc\, \varphi(x). \tag{6.8}$$

  Igual que para la ecuación de Fredholm, la ecuación de Volterra es de primera especie si $\circledcirc = 0$, de segunda especie si $\circledcirc = 1$, homogénea si $g(x) = 0$, e inhomogénea si $g(x) \neq 0$.

En resumen:

- La ecuación es de Fredholm si los límites de integración son fijos y es de Volterra si estos límites son variables.
- Si la función incógnita no está fuera de la integral, la ecuación es de primera especie, pero si la función incógnita se encuentra también fuera de la integral, la ecuación es de segunda especie.
- La ecuación es homogénea si $g(x) = 0$, e inhomogénea si $g(x) \neq 0$.

Por ejemplo,

$$\lambda \int_a^x dy\, k(x,y)\, \varphi(y) = g(x) \tag{6.9}$$

es una ecuación inhomogénea de Volterra de primera especie y

$$\lambda \int_a^x dy\, k(x,y)\, \varphi(y) + g(x) = \varphi(x) \tag{6.10}$$

es una ecuación inhomogénea de Volterra de segunda especie.

En este capítulo nos vamos a dedicar en exclusiva al estudio de ecuaciones integrales lineales. Las ecuaciones integrales no lineales son muchísimo más complicadas y generalmente requieren técnicas muy específicas.

▶ *Ejemplo 6.1*

En la teoría de líquidos, la función de distribución radial $\varphi(r)$ es una función esencial porque contiene información sobre la estructura de los líquidos y permite la estimación de diversas magnitudes termodinámicas de los mismos.[2] Algunas de las teorías más fructíferas para determinar la función de distribución radial $\varphi(r)$ conducen a ecuaciones integrales para $\varphi(r)$. Por ejemplo, para un líquido formado por partículas que interaccionan mediante un potencial $u(r)$, la función $\varphi(r)$ vendría descrita en la teoría de Percus-Yevick por la siguiente ecuación integral (ecuación de Ornstein-Zernike):

$$\varphi(r) = 1 + c(r) + \rho \int \left[\varphi(r') - 1\right]\, c\left(|\vec{r} - \vec{r}\,'|\right)\, d^3\vec{r}\,' \tag{6.11}$$

donde (ecuación de cierre de Percus-Yevick)

$$\log \varphi(r) + \frac{u(r)}{kT} = \log[\varphi(r) - c(r)] \tag{6.12}$$

[2] Véase, por ejemplo, el capítulo cuatro del libro *States of matter*, de D. L. Goodstein (Dover, Nueva York, 1985).

y donde ρ es la densidad de las partículas (número de partículas por unidad de volumen), k es la constante de Boltzmann, y T es la temperatura absoluta del líquido. La ecuación de Ornstein-Zernike junto con la ecuación de cierre de Percus-Yevick, constituye una ecuación integral *no lineal* cuya solución analítica sólo es conocida para unos poquísimos casos especialmente simples.

◀

6.3. Equivalencia entre ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales

Ciertas ecuaciones diferenciales pueden expresarse en forma de ecuaciones integrales, y viceversa. Veamos un ejemplo importante.

Sea la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$\varphi''(x) + A(x)\varphi'(x) + B(x)\varphi(x) = G(x). \tag{6.13}$$

Integrando (6.13) entre a y x se obtiene la expresión

$$\varphi'(x) - \varphi'(a) = -\int_a^x dy\, A(y)\varphi'(y) - \int_a^x dy\, B(y)\varphi(y) + \int_a^x dy\, G(y). \tag{6.14}$$

Si ahora integramos por partes la primera integral del miembro derecho,

$$\int_a^x dy\, A(y)\varphi'(y) = A(y)\varphi(y)\Big|_a^x - \int_a^x dy\, A'(y)\varphi(y), \tag{6.15}$$

la ecuación (6.14) se reduce a

$$\varphi'(x) = \varphi'(a) + A(a)\varphi(a) - A(x)\varphi(x) + \int_a^x dy\, \left[A'(y) - B(y)\right]\varphi(y) + \int_a^x dy\, G(y). \tag{6.16}$$

Integrando de nuevo entre a y x obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^x dt\, \varphi'(t) = \varphi(x) - \varphi(a) = \left[\varphi'(a) + A(a)\varphi(a)\right](x-a) - \int_a^x dt\, A(t)\varphi(t)\\ + \int_a^x dt \int_a^t dy\, \left[A'(y) - B(y)\right]\varphi(y) + \int_a^x dt \int_a^t dy\, G(y).\end{aligned} \tag{6.17}$$

Esta ecuación puede simplificarse si usamos la relación

$$\int_a^x dt \int_a^t dy\, \psi(y) = \int_a^x dy\, (x-y)\, \psi(y), \tag{6.18}$$

la cual es fácil de demostrar mediante la regla de Leibniz:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy\, F(x,y) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy\, \frac{\partial F}{\partial x} + F(x,\beta(x))\frac{d\beta}{dx} - F(x,\alpha(x))\frac{d\alpha}{dx}\,. \tag{6.19}$$

Veámoslo. Si derivamos el miembro izquierdo de (6.18) se tiene

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dt \int_a^t dy\, \psi(y) = \int_a^x dy\, \psi(y)\,. \tag{6.20}$$

Si derivamos el miembro derecho de (6.18) obtenemos el mismo resultado:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x dy\, (x-y)\psi(y) = \int_a^x dy\, \psi(y)\,. \tag{6.21}$$

Esto significa que ambos miembros de (6.18) difieren, como mucho, en una constante C, es decir,

$$\int_a^x dt \int_a^x dy\, \psi(x) = \int_a^x dy\, (x-y)\psi(y)dy + C. \tag{6.22}$$

Pero para $x = a$, esta relación se reduce a $0 = 0 + C$, por lo que $C = 0$, lo que implica que la relación (6.18) es cierta. Usando la relación (6.18) en (6.17) se obtiene

$$\begin{aligned}\varphi(x) =&\varphi(a) + \left[\varphi'(a) + A(a)\varphi(a)\right](x-a) - \int_a^x dy\, A(y)\varphi(y)\\ &+ \int_a^x dy\,(x-y)\left[A'(y) - B(y)\right]\varphi(y) + \int_a^x dy\,(x-y)G(y)\,.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Escribiendo

$$\begin{aligned}g(x) &= \left[\varphi'(a) + A(a)\varphi(a)\right](x-a) + \int_a^x dy\,(x-y)G(y),\\ k(x,y) =&(x-y)\left[A'(y) - B(y)\right] - A(y),\end{aligned} \tag{6.24}$$

la ecuación (6.23) se convierte en la ecuación de Volterra de segunda especie

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^x dy\, k(x,y)\varphi(y). \tag{6.25}$$

Se demuestra así que la ecuación diferencial (6.13) y la ecuación integral (6.25) son equivalentes. Debe notarse que, tal como se muestra en las ecuaciones (6.24), las condiciones iniciales de la ecuación diferencial [lo que vale la función incognita y su derivada en $x = a$, es decir $\varphi(a)$ y $\varphi'(a)$] están *incluidas* en el núcleo $k(x,y)$ y en el término inhomogéneo $g(x)$ de la ecuación integral.

► *Ejemplo 6.2*

Queremos hallar la ecuación integral equivalente al oscilador lineal

$$\varphi''(x) + \omega^2\varphi(x) = 0 \tag{6.26}$$

con condiciones iniciales

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0. \tag{6.27}$$

Comparando (6.26) con (6.13) vemos que $A(x) = 0$, $B(x) = \omega^2$ y $G(x) = 0$. Usando (6.24) encontramos $g(x) = 1$ y $k(x,y) = y - x$ de modo que la ecuación integral equivalente al oscilador lineal (6.26) *junto* con la condiciones iniciales (6.27) es

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (y-x)\varphi(y)dy. \tag{6.28}$$

▷ ***Ejercicio*** *6.1*

Demuestra derivando $\varphi(x) = x + \int_0^x (y-x)\varphi(y)dy$ dos veces que esta ecuación integral es equivalente a la ecuación diferencial $\varphi''(x) + \omega^2\varphi(x) = 0$ con las condiciones iniciales $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

◄

► *Ejemplo 6.3*

En este ejemplo queremos hallar la ecuación diferencial equivalente a la ecuación integral de *Fredholm* de segunda especie

$$\varphi(x) = \omega^2 \int_0^1 k(x,y)\varphi(y)dy \tag{6.29}$$

con núcleo

$$k(x,y) = \begin{cases} y(1-x)\,, & y \leq x\,, \\ x(1-y)\,, & y \geq x\,. \end{cases} \tag{6.30}$$

Esta ecuación integral se puede escribir así:

$$\begin{aligned} \varphi(x) =& \omega^2 \int_0^x k(x,y)\varphi(y)dy + \omega^2 \int_x^1 k(x,y)\varphi(y)dy \\ =& \omega^2(1-x) \int_0^x y\,\varphi(y)\,dy + \omega^2 x \int_x^1 (1-y)\,\varphi(y)\,dy\,. \end{aligned} \tag{6.31}$$

Si derivamos una vez la ecuación integral y tenemos en cuenta la regla de Leibniz (6.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \varphi'(x) =& -\omega^2 \int_0^x y\,\varphi(y)\,dy + \omega^2\,(1-x)\,x\varphi(x) + \omega^2 \int_x^1 (1-y)\,\varphi(y)\,dy - \omega^2 x\,(1-x)\,\varphi(x) \\ =& -\omega^2 \int_0^x y\,\varphi(y)\,dy + \omega^2 \int_x^1 (1-y)\,\varphi(y)\,dy. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Esta ecuación no tiene forma de ecuación diferencial (es una ecuación integro-diferencial). Pero si derivamos una vez más ya encontramos una ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \varphi''(x) =& -\omega^2\,x\,\varphi(x) - \omega^2\,(1-x)\,\varphi(x) \\ =& \omega^2\,\varphi(x). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Descubrimos por tanto que la ecuación diferencial equivalente a la ecuación integral (6.31) es el oscilador lineal $\varphi''(x) + \omega^2\varphi(x) = 0$. Además, es fácil ver que si en (6.31) hacemos $x = 0$ se encuentra que $\varphi(0) = 0$. De igual modo, si en (6.31) hacemos $x = 1$, encontramos que $\varphi(1) = 0$. Es decir, la ecuación integral exige que la solución $\varphi(x)$ de su ecuación diferencial equivalente satisfaga las condiciones de contorno $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$. Dicho en otros términos: la ecuación integral de Fredholm (6.31) es equivalente al problema de *condiciones de contorno*

$$\varphi''(x) + \omega^2\varphi(x) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0. \tag{6.34}$$

El núcleo $k(x,y)$ de la ecuación integral es la función de Green del problema de condiciones de contorno (6.34).

▷ ***Ejercicio*** *6.2*

Puesto que (6.29) *equivale a* (6.34), *puedes hallar la solución de la ecuación integral* (6.29) *resolviendo el problema de Sturm-Liouville* (6.34). *¿Qué valores ha de tomar* ω^2 *para que* (6.29) *tenga solución? ¿Cuáles son esta soluciones? (Volveremos a tratar en la sección 6.9 sobre este método de resolución de ecuaciones integrales, es decir, sobre el método consistente en transformar la ecuación integral en una ecuación diferencial equivalente.)*

◄

Lo que hemos visto en esta sección puede resumirse así: las condiciones iniciales o de contorno juegan un papel fundamental en la transformación de una ecuación diferencial en una ecuación integral; si las condiciones son iniciales, la ecuación integral que se obtiene es de Volterra; si las condiciones son de contorno, la ecuación integral resultante es de Fredholm, siendo

su núcleo la función de Green del problema de condiciones de contorno diferencial. Sin embargo, la transformación inversa no es siempre posible: hay ecuaciones integrales sin ecuación diferencial equivalente.

En el resto del capítulo nos dedicaremos a exponer técnicas de resolución relativamente elementales de ecuaciones integrales lineales. Por supuesto, una de ellas consistirá en transformar la ecuación integral en una ecuación diferencial equivalente. Esto se verá específicamente en la sección 6.9, página 382.

6.4. Ecuación de segunda especie con núcleo separable

Se dice que el núcleo es degenerado o separable si es de la forma

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\, \chi_i(y) \tag{6.35}$$

con n finito.

▶ *Ejemplo 6.4*

Los siguientes núcleos son separables:

$$\begin{aligned} k(x, y) &= (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2\,, \\ k(x, y) &= \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^y\,, \\ k(x, y) &= \cos(y - x) = \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x\,. \end{aligned}$$

◀

Las ecuaciones integrales con núcleos degenerados pueden resolverse mediante procedimientos algebraicos muy sencillos. Veamos un ejemplo representativo.

▶ *Ejemplo 6.5*

Queremos hallar la solución de la ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 dy\, (x\, y^2 + x^2 y)\, \varphi(y). \tag{6.36}$$

Comparándola con la ecuación (6.1) encontramos que

$$\begin{aligned} \circledcirc &= 1, \\ g(x) &= x, \\ k(x, y) &= x\, y^2 + x^2 y, \end{aligned}$$

por lo que la ecuación es inhomogénea de Fredholm de segunda especie con núcleo separable.
La ecuación (6.36) podemos escribirla así:

$$\varphi(x) = x + \lambda x \int_0^1 dy\, y^2\, \varphi(y) + \lambda x^2 \int_0^1 dy\, y\, \varphi(y). \tag{6.37}$$

Si definimos

$$c_1 = \int_0^1 dy\, y^2\, \varphi(y), \tag{6.38}$$

$$c_2 = \int_0^1 dy\, y\, \varphi(y), \tag{6.39}$$

la ecuación (6.37) se reduce a

$$\varphi(x) = x + \lambda\, x\, c_1 + \lambda\, x^2 c_2. \tag{6.40}$$

Sabemos pues, a falta de determinar el valor de las constantes c_1 y c_2, cuál es la solución de (6.36). Para hallar el valor de estas constantes sustituimos (6.40) en la ecuaciones que definen su valor, es decir, en (6.38) y en (6.39). Así obtenemos este sistema *algebraico*:

$$\begin{cases} c_1 = \displaystyle\int_0^1 dy\, y^2 (y + \lambda\, c_1 y + \lambda\, c_2 y^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\lambda\, c_1 + \frac{1}{5}\lambda\, c_2, \\ c_2 = \displaystyle\int_0^1 dy\, y\, (y + \lambda\, c_1 y + \lambda\, c_2 y^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda\, c_1 + \frac{1}{4}\lambda\, c_2, \end{cases} \tag{6.41}$$

Resolviendo mediante la regla de Cramer obtenemos

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{5}\lambda \\ \frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{4}\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{4}\lambda & -\frac{1}{5}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & 1 - \frac{1}{4}\lambda \end{vmatrix}} = \frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2}\,,$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{4}\lambda & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3}\lambda & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{4}\lambda & -\frac{1}{5}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & 1 - \frac{1}{4}\lambda \end{vmatrix}} = \frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2}\,.$$

Sustituyendo estos valores en (6.40) obtenemos la solución de la ecuación integral (6.36):

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x + \lambda \frac{60 + \lambda}{240 - 120\lambda - \lambda^2}\, x + \lambda \frac{80}{240 - 120\lambda - \lambda^2}\, x^2 \\ &= \frac{(240 - 60\lambda)\, x - 80\lambda\, x^2}{240 - 120\lambda - \lambda^2}\,. \end{aligned} \tag{6.42}$$

La ecuación integral no homogénea de este ejemplo [ecuación (6.36)] no tendrá solución si los valores de λ son justamente las soluciones de la ecuación $240 - 120\lambda - \lambda^2 = 0$, es decir, si $\lambda = -60 \pm 16\sqrt{15}$.

◀

6.4.1. Ecuación de segunda especie inhomogénea con núcleo degenerado

El procedimiento elemental que hemos empleado en el ejemplo anterior se puede generalizar para que sea aplicable a cualquier núcleo de la forma (6.35). En este caso la ecuación de Fredholm de segunda especie, ecuación (6.1) con $\circledcirc = 1$, se convierte en

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\, \chi_i(y)\, \varphi(y). \tag{6.43}$$

Tal como se hizo en el ejemplo 6.5 anterior, definimos

$$c_i = \int_a^b dy\, \chi_i(y)\, \varphi(y), \tag{6.44}$$

de modo que la ecuación (6.43) se transforma en

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(x). \tag{6.45}$$

Sustituyendo ahora la ecuación (6.45) en (6.44) se tiene que

$$c_i = \int_a^b dy\, \chi_i(y) g(y) + \lambda \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b dy\, \chi_i(y)\, \phi_j(y). \tag{6.46}$$

Este es un sistema algebraico de n ecuaciones y n incógnitas (las incógnitas son las constantes c_i, por supuesto). Una vez resuelto el sistema, las soluciones c_i se sustituyen en (6.45) y obtenemos la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integral (6.43).

Podemos escribir el sistema de ecuaciones (6.46) de un modo más compacto

$$c_i = b_i + \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij}\, c_j \Leftrightarrow b_i = \sum_{j=1}^n (\delta_{ij} - \lambda\, a_{ij})\, c_j, \tag{6.47}$$

donde

$$b_i \equiv \int_a^b dy\, \chi_i(y) g(y),$$
$$a_{ij} \equiv \int_a^b dy\, \chi_i(y)\, \phi_j(y),$$

y δ_{ij} es la delta de Kronecker. La ecuación (6.47) en forma matricial es

$$\bar{c} = \bar{b} + \lambda\, \bar{\bar{a}}\, \bar{c} \Leftrightarrow \bar{b} = [\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{a}}]\, \bar{c}. \tag{6.48}$$

siendo $\bar{\bar{1}}$ la matriz identidad. Por tanto

$$\bar{c} = [\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{a}}]^{-1}\, \bar{b} \tag{6.49}$$

es la solución del sistema, siempre y cuando el determinante de la matriz $\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{a}}$ sea distinto de cero, es decir, siempre y cuando la matriz $\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{a}}$ sea invertible.

6.4.2. Ecuación de segunda especie homogénea con núcleo degenerado: autovalores y autofunciones

Si la ecuación integral de Fredholm es homogénea, es decir, si $g(x) = 0$, el sistema (6.47) o (6.48) correspondiente a esta ecuación integral es también homogéneo:

$$\bar{0} = [\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{a}}]\, \bar{c}. \tag{6.50}$$

En este caso sólo existirá solución $\bar{c}$ distinta de la trivial $c_i = 0$ para todo i si el determinante de los coeficientes del sistema algebraico es nulo, es decir, si

$$\det[\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{a}}] = |\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{a}}| = 0. \tag{6.51}$$

Esta es la ecuación característica del sistema. Las p raíces λ_i de esta ecuación, con $1 \le p \le n$, son los únicos valores que hacen que la ecuación integral tenga solución distinta de la trivial. Estos valores son justamente los autovalores del operador $\widehat{k}$, pues nótese que la ecuación integral de Fredholm[3] homogénea

$$\lambda \int_a^b dy\, k(x, y)\, \varphi(y) = \varphi(x)$$

[3] Las ecuaciones integrales de Volterra no tienen autovalores [Tri85], lo cual está de acuerdo con nuestro comentario de la página 356 acerca de la equivalencia entre las ecuaciones diferenciales con *condiciones iniciales* y las ecuaciones integrales de Volterra.

puede escribirse en términos de operadores [véase la ecuación (6.3)] así

$$\lambda \widehat{k}\, \varphi = \varphi.$$

Diremos entonces que λ_i son los autovalores[4] del kernel $k(x, y)$. La solución, o soluciones, de la ecuación homogénea con $\lambda = \lambda_i$ son las autofunciones $\psi_i(x)$ del núcleo $k(x, y)$.

▶ *Ejemplo 6.6*

Consideraremos la ecuación homogénea del anterior ejemplo 6.5, página 358,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 dy\, (x\, y^2 + x^2 y)\, \varphi(y).$$

La solución ahora es casi igual que la (6.40), excepto por el término no homogéneo que ahora está ausente:

$$\varphi(x) = \lambda\, x\, c_1 + \lambda\, x^2 c_2. \tag{6.52}$$

Por consiguiente las constantes c_1 y c_2 han de satisfacer el sistema [compárese con el sistema (6.41)]

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{4}\lambda\, c_1 + \frac{1}{5}\lambda\, c_2 \\ c_2 = \frac{1}{3}\lambda\, c_1 + \frac{1}{4}\lambda\, c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{4}\lambda\right) c_1 - \frac{1}{5}\lambda\, c_2 = 0\,, \\ -\frac{1}{3}\lambda\, c_1 + \left(1 - \frac{1}{4}\lambda\right) c_2 = 0\,. \end{cases} \tag{6.53}$$

Para que este sistema tenga solución distinta de la trivial $c_1 = c_2 = 0$ es necesario que

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{4}\lambda & -\frac{1}{5}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & 1 - \frac{1}{4}\lambda \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240} = 0. \tag{6.54}$$

Esta es la ecuación característica del sistema. Sus soluciones son $\lambda_{1,2} = -60 \pm 16\sqrt{15}$. Nótese que la ecuación homogénea tiene solución justamente para los valores de λ para los que la ecuación no homogénea (véase el ejemplo 6.5) no tiene solución. Esto es un resultado general que discutiremos en la sección dedicada a los teoremas de la alternativa de Fredholm (sección 6.5, página 361).
Las ecuaciones (6.53) podemos reescribirlas así

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{5}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{4}\lambda\right) c_1\,, \\ c_2 &= \frac{\lambda/3}{1 - \lambda/4}\, c_1\,. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Vemos por (6.52) que las autofunciones toman la forma

$$\psi_i(x) = \lambda_i\, c_1\, x \left(1 + \frac{c_2}{c_1} x\right)\,. \tag{6.56}$$

Usando (6.55) en esta relación encontramos que las autofunciones correspondientes a los autovalores λ_i son

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \lambda_i\, c_1\, x \left[1 + \frac{5}{\lambda_i}\left(1 - \frac{1}{4}\lambda_i\right) x\right] \\ &= \lambda_i\, c_1\, x \left[1 + \frac{\lambda_i/3}{1 - \lambda_i/4} x\right]. \end{aligned}$$

[4]Siendo completamente puristas y coherentes con las definiciones habituales de autovalores que hemos usado en este curso, tendríamos que decir que los autovalores son realmente $1/\lambda_i$, pero, siguiendo cierta tradición de la teoría de ecuaciones integrales —véase [CH62], por ejemplo— llamaremos autovalor simplemente a λ_i.

Dado que dos autofunciones que se diferencian por un factor constante son la *misma* autofunción, podemos escribir la expresión anterior de un modo más compacto suprimiendo la constante c_1:

$$\psi_i(x) = x\left[1 + \frac{5}{\lambda_i}\left(1 - \frac{1}{4}\lambda_i\right)x\right] \tag{6.57}$$

$$= x\left[1 + \frac{\lambda_i/3}{1-\lambda_i/4}x\right]. \tag{6.58}$$

Sustituyendo los valores de λ_1 y λ_2 en (6.55) encontramos que:

- Si $\lambda = \lambda_1 = -60 + 16\sqrt{15}$ entonces

  $$\frac{c_2}{c_1} = \frac{20 - 5\sqrt{15}}{-15 + 4\sqrt{15}}$$

  y de la ecuación (6.57), o de la ecuación (6.58), se deduce que la solución (autofunción) correspondiente es

  $$\psi_1(x) = x\left[1 + \frac{20 - 5\sqrt{15}}{-15 + 4\sqrt{15}}\,x\right]. \tag{6.59}$$

- Si $\lambda = \lambda_2 = -60 - 16\sqrt{15}$ entonces

  $$\frac{c_2}{c_1} = -\frac{20 + 5\sqrt{15}}{15 + 4\sqrt{15}}$$

  y de la ecuación (6.57), o de la ecuación (6.58), se deduce que la solución (autofunción) correspondiente es

  $$\psi_2(x) = x\left[1 - \frac{20 + 5\sqrt{15}}{15 + 4\sqrt{15}}\,x\right]. \tag{6.60}$$

Estas dos funciones $\psi_1(x)$ y $\psi_2(x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Estas son por tanto las autofunciones del operador $\widehat{k}$ correspondiente al núcleo $k(x,y) = x\,y^2 + x^2 y$.

◀

Finalizamos esta sección enunciando dos teoremas importantes acerca de autovalores y autofunciones de las ecuaciones integrales [CH62]:

Teorema 6.1 *El número de autovalores es finito si y sólo si el núcleo es degenerado.*

Teorema 6.2 *El grado de degeneración (o rango) de los autovalores de un núcleo $k(x,y)$ de cuadrado sumable es siempre finito.*

6.5. Teoremas de Fredholm

Observando que cualquier núcleo de comportamiento normal podía escribirse en forma de una serie de núcleos degenerados [Tri85, sección 3.6], Fredholm dedujo un conjunto de teoremas para núcleos *reales*, conocidos como teoremas de la alternativa de Fredholm, que daremos aquí sin demostración. Estos teoremas son válidos bajo condiciones muy generales. Por concretar, siguiendo la referencia [Tri85], supondremos que el núcleo $k(x,y)$ es de cuadrado sumable sobre el cuadrado $a \le x, y \le b$, y que $g(x)$ es de cuadrado sumable en el intervalo $[a,b]$, es decir, supondremos que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2\,dx\,dy = \text{finito}, \tag{6.61}$$

y que $\int_a^b |g(x)|^2 = \text{finito}$.[5]

[5] Estas condiciones se pueden relajar: véase, por ejemplo, la sección 7.7 de “Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations”, R. B. Guenther y J. W. Lee (Dover, Nueva York, 1996).

Teorema 6.3 (Teorema de la alternativa) *Con una excepción, que se discutirá en el teorema 6.5, o bien la ecuación no homogénea*

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y)$$

tiene solución única para **cualquier** $g(x)$*, es decir,* λ *no es un autovalor, o bien la ecuación homogénea*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y)$$

tiene al menos una solución no trivial, es decir, λ *es un autovalor y* $\varphi(x)$ *una autofunción.*

Los ejemplos 6.5 y 6.6 nos pueden servir para ilustrar este teorema. En el ejemplo 6.5 se encontró que la ecuación integral no homogénea

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 dy\, (xy^2 + x^2 y)\varphi(y)$$

tiene solución siempre que $\lambda \neq -60 \pm 16\sqrt{15}$, es decir, siempre que el determinante de los coeficientes del sistema (6.41) sea *distinto* de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{4}\lambda & -\frac{1}{5}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & 1 - \frac{1}{4}\lambda \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240} \neq 0. \tag{6.62}$$

Sin embargo, en el ejemplo 6.6 descubrimos justamente lo contrario: para que la ecuación integral homogénea

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 dy\, (xy^2 + x^2 y)\varphi(y)$$

tenga solución distinta de la trivial $\varphi(x) = 0$ debe ocurrir que el determinante de los coeficientes del sistema (6.41) sea *igual* a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{4}\lambda & -\frac{1}{5}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & 1 - \frac{1}{4}\lambda \end{vmatrix} = 1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{240} = 0. \tag{6.63}$$

Los valores de λ que anulan a esta ecuación, $\lambda = \lambda_1 \equiv -60 + 16\sqrt{15}$ y $\lambda = \lambda_2 \equiv -60 - 16\sqrt{15}$ son los autovalores del núcleo $k(x,y) = xy^2 + x^2 y$. Vemos pues que si $\lambda = \lambda_1$ o $\lambda = \lambda_2$, entonces la ecuación inhomogénea no tiene solución y, en este caso, la ecuación homogénea sí tiene solución distinta de la trivial [de hecho tiene dos soluciones linealmente independientes: véanse las ecuaciones (6.59) y (6.60)]. Si, por el contrario, $\lambda \neq \lambda_1$ y $\lambda \neq \lambda_2$, entonces la ecuación inhomogénea sí tiene solución única [es la solución dada en la ecuación (6.42)] y la ecuación homogénea no tiene solución distinta de la trivial.

Los siguientes teoremas a menudo se consideran parte del llamado teorema de la alternativa de Fredholm.

Teorema 6.4 (Teorema de la alternativa (continuación)) *Si* λ *no es un autovalor entonces* λ *tampoco es autovalor de la ecuación transpuesta, es decir, no existe solución de*

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b dy\, k(y,x)\, \varphi(y).$$

Pero si λ es un autovalor, entonces λ también es autovalor de la ecuación transpuesta, es decir, existe al menos una solución (no trivial) de

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b dy\, k(y,x)\, \varphi(y).$$

El número de autofunciones (degeneradas) correspondientes a este autovalor λ es el mismo para los dos casos.

Teorema 6.5 (Teorema de la alternativa (continuación)) *Si λ es un autovalor, la ecuación no homogénea tiene una solución si, y sólo si, la función $g(x)$ es tal que*

$$\int_a^b dx\, \varphi(x)\, g(x) = 0$$

para toda función $\varphi(x)$ que sea autofunción del operador transpuesto $k(y,x)$ con autovalor λ, es decir, para toda función $\varphi(x)$ que satisfaga la ecuación homogénea transpuesta

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b dy\, k(y,x)\, \varphi(y).$$

Cuando las condiciones de este último teorema se satisfacen, la solución de la ecuación inhomogénea no es única. Esto es fácil de entender. Supongamos por concretar que ecuación homogénea con núcleo $k(x,y)$ tiene r autofunciones $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_r(x)$ con un mismo autovalor $\widetilde{\lambda}$, es decir, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_r(x)$ son las r soluciones linealmente independientes de la ecuación integral homogénea $\varphi(x) = \widetilde{\lambda} \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y)$. La solución general de esta ecuación integral es por tanto

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_n(x)$$

donde c_n son constantes *arbitrarias*. Sea además $\widehat{\varphi}(x)$ una solución cualquiera de la ecuación no homogénea. Entonces es evidente que

$$\varphi(x) = \widehat{\varphi}(x) + \widetilde{\varphi}(x) = \widehat{\varphi}(x) + \sum_{n=1}^{r} c_n \varphi_n(x)$$

es también solución de la ecuación no homogénea. Por supuesto esta solución no es única porque los valores de c_n son arbitrarios.

▶ *Ejemplo 6.7*

Con este ejemplo queremos ilustrar el teorema 6.5. Sea la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 dy\, (x\, y^2 + x^2 y)\, \varphi(y). \tag{6.64}$$

Esta es la ecuación del ejemplo 6.5 si $g(x) = x$ y la del ejemplo 6.6 si $g(x) = 0$. En el presente ejemplo hacemos $\lambda = \lambda_1 \equiv -60 + 16\sqrt{15}$ y $g(x) = 1 + (-4 + 2\sqrt{5/3})x$. Es decir, la ecuación que queremos resolver es

$$\varphi(x) = 1 + (-4 + 2\sqrt{5/3})x + (-60 + 16\sqrt{15}) \int_0^1 dy\, (x\, y^2 + x^2 y)\, \varphi(y). \tag{6.65}$$

Dado que λ es igual a uno de los autovalores de la ecuación homogéna, $\lambda = \lambda_1$, podríamos pensar que, según afirma el teorema 6.3, la ecuación inhomogénea (6.65) no tiene solución. Sin embargo, es fácil ver que

$$\int_0^1 dx\, g(x)\, \psi_1(x) = 0\,, \tag{6.66}$$

donde

$$\psi_1(x) = x\left[1 + \frac{20 - 5\sqrt{15}}{-15 + 4\sqrt{15}}\, x\right]$$

es la única autofunción del kernel transpuesto de $k(x,y) = x\,y^2 + x^2 y$ [nótese que $k(x,y) = k(y,x)$] correspondiente al autovalor λ_1 [véanse las ecuaciones (6.59) y (6.60)]. Según el teorema 6.5 anterior, esto significa que la ecuación (6.65) tendrá soluciones no únicas. En efecto, puede comprobarse por sustitución directa que la función $\widehat{\varphi}(x) = 1 - 3x/2$ es solución de la ecuación (6.65), y como $c\psi_1(x)$ es solución de la ecuación homogénea para cualquier valor de c, tenemos que

$$\varphi(x) = 1 - \frac{3}{2}x + c\, x\left[1 + \frac{20 - 5\sqrt{15}}{-15 + 4\sqrt{15}}\, x\right] \tag{6.67}$$

es también solución de la ecuación inhomogénea (6.65). Por supuesto, dado que el valor de c es arbitrario, esta solución no es única.

▷ ***Ejercicio*** *6.3*

Resuelve la ecuación integral (6.65) mediante la técnica usada en la sección 6.4 dado que su núcleo es degenerado. Comprueba que el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema algebraico que obtienes [sistema que será similar al (6.41)] es nulo y que, sin embargo, el sistema tiene una solución distinta de la trivial, a saber, $c_1 = -1/24$ *y* $c_2 = 0$. *¿Bajo qué circunstancias tiene solución un sistema algebraico no homogéneo cuya matriz de coeficientes tenga determinante nulo? Comprueba que estas condiciones se verifican en tu sistema algebraico.*

◀

6.6. Series de Neumann

Estudiaremos ahora un procedimiento muy simple para resolver ecuaciones integrales lineales de segunda especie no homogéneas. Por concretar, en lo que sigue nos referiremos casi exclusivamente a la ecuación de segunda especie de Fredholm:

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y) \qquad \text{con} \quad g(x) \neq 0, \tag{6.68}$$

pero casi todo lo que digamos será también válido para las ecuaciones de Volterra sin más que cambiar b por x en el límite superior de integración ([KKM82, secciones 3 y 4]; véase también el ejemplo 6.9 de la página 367). El procedimiento comienza con la conjetura de una solución inicial aproximada de (6.68). Por ejemplo, podemos suponer que

$$\varphi(x) \simeq \varphi_0(x) = g(x).$$

Esto equivale a asumir que la integral $\int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y)$ y/o la constante λ son pequeñas. Esta elección no es la única posible: si conociéramos por cualquier motivo una primera aproximación mejor que $\varphi_0(x) = g(x)$, sería aquella la que convendría usar.[6]

[6] Si escogemos $\varphi_0(x) \neq g(x)$, el procedimiento que vamos a exponer se conoce como método de las aproximaciones sucesivas; si escogemos $\varphi_0(x) = g(x)$ (y esta es la opción que estudiaremos) el método se llama método de las series de Neumann.

Intentamos mejorar esta primera aproximación sustituyendo $\varphi_0(x)$ en el miembro derecho de la ecuación original (6.68), obteniendo

$$\begin{aligned}\varphi(x) \simeq \varphi_1(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi_0(y) \\ &= g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, g(y).\end{aligned} \tag{6.69}$$

Sustituyendo a su vez esta primera aproximación en el miembro derecho de la ecuación original (6.68) obtenemos una segunda aproximación

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi_1(y) \\ &= g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y) \left[g(y) + \lambda \int_a^b dy'\, k(y,y')\, g(y') \right] \\ &= g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, g(y) + \lambda^2 \int_a^b dy\, k(x,y) \int_a^b dy'\, k(y,y')\, g(y') \\ &= g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, g(y) + \lambda^2 \int_a^b \int_a^b dy\, dy'\, k(x,y)\, k(y,y')\, g(y').\end{aligned}$$

Es decir, la aproximación de orden $n+1$ se obtiene de la aproximación de orden n a través de la relación de recurrencia

$$\varphi_{n+1}(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y) \varphi_n(x). \tag{6.70}$$

Repitiendo el proceso n veces se obtiene

$$\varphi(x) \simeq \varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m U_m(x), \tag{6.71}$$

donde

$$\begin{aligned} U_0(x) &= g(x), \\ U_1(x) &= \int_a^b k(x,y_1)\, g(y_1)\, dy_1\,, \\ U_2(x) &= \int_a^b \int_a^b k(x,y_1)\, k(y_1,y_2)\, g(y_2)\, dy_2\, dy_1\,, \\ &\;\;\vdots \\ U_n(x) &= \int_a^b \cdots \int_a^b k(x,y_1)\, k(y_1,y_2) \cdots k(y_{n-1},y_n)\, g(y_n)\, dy_n \cdots dy_2\, dy_1\,. \end{aligned} \tag{6.72}$$

Haciendo $n \to \infty$ en (6.71) obtenemos la serie

$$\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m U_m(x) \tag{6.73}$$

que se conoce como *serie de Neumann*.[7] Esperamos que la solución $\varphi(x)$ venga dada por esta serie:

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m U_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m U_m(x), \tag{6.74}$$

es decir, esperamos que la serie de Neumann converja a la solución $\varphi(x)$. Veamos bajo qué condiciones esta serie converge a la solución de la ecuación integral.

[7] En `www` se da un programa *Mathematica* que calcula esta serie.

Convergencia de la serie de Neumann

Los criterios de convergencia para las ecuaciones de Fredholm y de Volterra vienen dados por los siguientes teoremas:

Teorema 6.6 *Supongamos que el núcleo $k(x,y)$ es de cuadrado sumable en el cuadrado $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, es decir, supongamos que*

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 \, dx \, dy = \alpha^2, \tag{6.75}$$

siendo α un valor finito. Entonces [Tri85] la serie de Neumann (6.73) converge hacia la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integral (6.68) siempre que

$$|\lambda| < \frac{1}{\alpha}. \tag{6.76}$$

Puede demostrarse [CH62] que la serie de Neumann converge *uniformemente* en el intervalo $a \le x \le b$ si $|\lambda| < 1/[(b-a)M]$ donde M es una cota superior del valor absoluto de $k(x,y)$ en el cuadrado $a \le x, y \le b$.

Teorema 6.7 *Sea la ecuación de Volterra*

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^x dy \, k(x,y) \, \varphi(y), \tag{6.77}$$

donde $g(x) \ne 0$ es continua para $a \le x \le b$, y donde el núcleo $k(x,y)$ es continuo en el triángulo $a \le x \le b$, $a \le y \le x$. Entonces [Jer99] la serie de Neumann $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m U_m(x)$, con las funciones $U_m(x)$ dadas por las ecuaciones (6.72) en donde cambiamos b por x, converge a la solución $\varphi(x)$ de (6.77).

► *Ejemplo 6.8*

Sea la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (y-x) \, \varphi(y) \, dy. \tag{6.78}$$

Su solución, como se puede comprobar fácilmente por sustitución directa, es

$$\varphi(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} x.$$

Vamos ahora a hallar una solución aproximada haciendo uso de la serie de Neumann:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= x,\\
\varphi_1(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\,y\,dy = x + \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - x\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} = x + \frac{1}{3}\,,\\
\varphi_2(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\left(y+\frac{1}{3}\right)dy = x + \frac{1}{3} - \frac{x}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\,,\\
\varphi_3(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}y\right)dy = \frac{2}{9} + \frac{2}{3}x\,,\\
\varphi_4(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\left(\frac{2}{9}+\frac{2}{3}y\right)dy = \frac{2}{9} + \frac{7}{9}x\,,\\
\varphi_5(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\left(\frac{2}{9}+\frac{7}{9}y\right)dy = \frac{7}{27} + \frac{7}{9}x\,,\\
\varphi_6(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\left(\frac{7}{27}+\frac{7}{9}y\right)dy = \frac{7}{27} + \frac{20}{27}x\,,\\
\varphi_7(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\left(\frac{7}{27}+\frac{20}{27}y\right)dy = \frac{20}{81} + \frac{20}{27}x\,,\\
\varphi_8(x) &= x + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y-x)\left(\frac{20}{81}+\frac{20}{27}y\right)dy = \frac{20}{81} + \frac{61}{81}x = 0'247 + 0'753x\,,\\
\varphi_9(x) &= \cdots
\end{aligned}$$

Vemos que la solución aproximada $\varphi_n(x)$ mejora a medida que n aumenta y que tras ocho iteraciones la aproximación $\varphi_8(x)$ es una muy buena estimación de la solución exacta.

▷ ***Ejercicio** 6.4*

Halla el valor de $1/\alpha$ correspondiente a la ecuación de este ejemplo. ¿Es mayor, igual o menor que $1/2$? ¿Qué significa esto?

◀

▶ *Ejemplo 6.9*

En este ejemplo vamos a resolver la ecuación de Volterra

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(y)\,dy \tag{6.79}$$

mediante el método de la serie de Neumann. Su solución, como se puede comprobar fácilmente por sustitución directa, es $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$. Los primeros términos de la serie son:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= 1,\\
\varphi_1(x) &= 1 + \int_0^x 1\,dy = 1 + x\,,\\
\varphi_2(x) &= 1 + \int_0^x (1+y)\,dy = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,,\\
\varphi_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(1 + y + \frac{y^2}{2}\right)dy = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}\,.
\end{aligned}$$

El término n-ésimo viene dado por

$$\varphi_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

como es fácil de demostrar por inducción (¡hágase!). Pero $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, luego vemos que la serie de Neumann $\varphi_n(x)$ converge a la solución exacta pues $\varphi_n(x) \to \mathrm{e}^x$ cuando $n \to \infty$.

◀

▶ *Ejemplo 6.10*

La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para la dispersión de una partícula de masa m y energía E por parte de un potencial de interacción $V(\vec{r})$ puede escribirse como

$$(\nabla^2 + k^2)\,\psi(\vec{r}) = -4\pi\, U(\vec{r})\,\psi(\vec{r}),$$

donde

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E\,,$$
$$U(\vec{r}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} V(\vec{r})\,.$$

Buscamos una solución que satisfaga la condición de contorno

$$\psi(\vec{r}) \to \mathrm{e}^{i\,\vec{k}_0\cdot\vec{r}} + \rho(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{e}^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r} \qquad \text{cuando} \quad r \to \infty$$

y donde $|\vec{k}_0| = k$. El primer término representa la onda plana incidente y el segundo es la onda esférica dispersada producida por la interacción de la onda plana con el potencial $U(\vec{r})$. Es posible demostrar [Arf85] que la ecuación de Schrödinger y la condición de contorno pueden combinarse en la ecuación integral

$$\psi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{i\,\vec{k}_0\cdot\vec{r}} + \int d^3\vec{r}\,'\,\frac{\mathrm{e}^{i\,k\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,U(\vec{r}\,')\,\psi(\vec{r}\,').$$

La solución de esta ecuación puede expresarse mediante la serie de Neumann. La aproximación de orden cero,

$$\psi(\vec{r}) \simeq \mathrm{e}^{i\,\vec{k}_0\cdot\vec{r}}$$

nos describe simplemente la onda incidente, sin dispersión. La siguiente aproximación proporciona un resultado muy importante conocido como aproximación de Born

$$\psi(\vec{r}) \simeq \mathrm{e}^{i\,\vec{k}_0\cdot\vec{r}} + \int d^3\vec{r}\,'\,\frac{\mathrm{e}^{i\,k\,|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} U(\vec{r}\,')\,\mathrm{e}^{i\,\vec{k}_0\cdot\vec{r}\,'}\,.$$

◀

La serie de Neumann en términos de operadores

En forma de operadores, la ecuación integral de segunda especie que queremos resolver viene dada por

$$\varphi = g + \lambda\,\widehat{k}\,\varphi.$$

Si despejamos f obtenemos

$$\varphi = [1 - \lambda\,\widehat{k}]^{-1} g.$$

Desarrollando *formalmente* $[1-\lambda\,\widehat{k}]^{-1}$ en "potencias" de $\lambda\,\widehat{k}$ se tiene que

$$\varphi = [1-\lambda\,\widehat{k}]^{-1} g = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\,\widehat{k})^n g = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \widehat{k}^n g,$$

que es la serie de Neumann si interpretamos que $\widehat{k}^n$ significa aplicar n veces el operador $\widehat{k}$:

$$\widehat{k}^n g = \int_a^b \cdots \int_a^b k(x,y_1)\,k(y_1,y_2)\cdots k(y_{n-1},y_n)\,g(y_n)\,dy_n \cdots dy_2\,dy_1 = U_n(x).$$

Núcleos iterados

Hemos visto antes que

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U_n(x),$$

con los coeficientes U_n dados por las expresiones (6.72), es la solución en forma de serie de Neumann de la ecuación de Fredholm de segunda especie (6.68). Esta solución puede escribirse así

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= g(x) \\ &\quad + \lambda \int_a^b k(x,y_1)\,g(y_1)\,dy_1 \\ &\quad + \lambda^2 \int_a^b \left[\int_a^b k(x,y_1)\,k(y_1,y_2)\,dy_1\right] g(y_2)\,dy_2 + \cdots \\ &\quad + \lambda^n \int_a^b \left[\int_a^b \cdots \int_a^b k(x,y_1)\,k(y_1,y_2)\cdots k(y_{n-1},y_n)\,dy_1 \cdots\, dy_{n-1}\right] g(y_n)\,dy_n \\ &\quad + \cdots\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= g(x) + \lambda \int_a^b k_1(x,y_1)\,g(y_1)\,dy_1 + \cdots + \lambda^n \int_a^b k_n(x,y_n)\,g(y_n)\,dy_n + \cdots \\ &= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_a^b k_n(x,y) g(y) dy \qquad (6.80)\end{aligned}$$

donde hemos definido

$$k_1(x,y) = k(x,y)\,, \qquad (6.81)$$

$$k_n(x,y) = \int_a^b \cdots \int_a^b k(x,y_1)\,k(y_1,y_2)\cdots k(y_{n-1},y)\,dy_1\,dy_2 \cdots\, dy_{n-1}. \qquad (6.82)$$

A estas funciones $k_n(x,y)$ se les conoce como *núcleos iterados*. Este nombre responde al hecho de que es posible hallar $k_n(x,y)$ en términos de $k_{n-1}(x,y)$. Veámoslo. La definición de $k_n(x,y)$ es

$$k_n(x,y) = \int_a^b k(x,y_1) \left[\int_a^b \cdots \int_a^b k(y_1,y_2)\cdots k(y_{n-1},y)\,dy_2 \cdots dy_{n-1}\right] dy_1.$$

Pero el término entre corchetes es justamente la definición de $k_{n-1}(y_1,y)$, luego se satisface relación de recurrencia

$$k_n(x,y) = \int_a^b k(x,y')\,k_{n-1}(y',y)\,dy'. \qquad (6.83)$$

Núcleo resolvente de la ecuación de Fredholm de segunda especie

Se llama *núcleo resolvente* $R(x, y; \lambda)$ a la función que nos proporciona la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b dy\, k(x, y)\, \varphi(y)$$

mediante la relación

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b dy\, R(x, y; \lambda)\, g(y).$$

Por tanto, encontramos que la función $R(x, y; \lambda)$ definida mediante la serie de núcleos iterados

$$R(x, y; \lambda) = k_1(x, y) + \lambda\, k_2(x, y) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(x, y) \tag{6.84}$$

es el núcleo resolvente de nuestra ecuación integral porque podemos escribir la solución dada por (6.80) como

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(x, y; \lambda)\, g(y)\, dy \tag{6.85}$$

asumiendo que la serie (6.84) que define a $R(x, y; \lambda)$ es uniformemente convergente el el intervalo $[a, b]$ pues, en tal caso, es aceptable intercambiar el orden de la integral y el sumatorio en (6.80). Las condiciones bajo las cuales la serie que define al núcleo resolvente converge uniformemente son las mismas que hacían uniformemente convergente a la serie de Neumann (véase la página 366).

Finalizamos esta sección hallando la ecuación integral que verifica el núcleo resolvente. Para ello multiplicamos $k(x, z)$ por la expresión de $R(z, y; \lambda)$ dada por (6.84) e integramos sobre la variable z entre a y b:

$$\begin{aligned}
\int_a^b dz\, k(x, z)\, R(z, y; \lambda) &= \int_a^b dz k(x, z) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_n(z, y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b k(x, z) k_n(z, y) dz \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} k_{n+1}(x, y) \\
&= k_2(x, y) + \lambda\, k_3(x, y) + \lambda^2 k_4(x, y) + \cdots \\
&= \lambda^{-1} [R(x, y; \lambda) - k(x, y)],
\end{aligned}$$

y por tanto, tenemos que

$$R(x, y; \lambda) = k(x, y) + \lambda \int_a^b k(x, z)\, R(z, y; \lambda)\, dz\,. \tag{6.86}$$

Esta es la ecuación integral que ha de cumplir el núcleo resolvente.

Lo que acabamos de ver también es válido para la ecuación de Volterra de segunda especie sin más que cambiar b por x en el límite superior de integración.

6.7. Series de Fredholm

El método de Fredholm se basa en reemplazar la integral entre a y b por una suma, resolver las ecuaciones algebraicas que resultan y tomar finalmente el límite continuo. Daremos aquí el resultado final (la demostración puede verse en [Tri85, sección 2.5]).

La solución de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y) \tag{6.87}$$

en términos de la serie de Fredholm es

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, R(x,y;\lambda)\, g(y), \tag{6.88}$$

donde $R(x,y;\lambda)$, llamado *núcleo resolvente de Fredholm*, es igual a al cociente de dos series

$$R(x,y;\lambda) = \frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)}, \tag{6.89}$$

donde

$$D(x,y;\lambda) = k(x,y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,y)\lambda^n\,, \tag{6.90}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n\lambda^n\,, \tag{6.91}$$

siendo

$$B_n(x,y) = \int_a^b \cdots \int_a^b dz_1 dz_2 \cdots dz_n \begin{vmatrix} k(x,y) & k(x,z_1) & \cdots & k(x,z_n) \\ k(z_1,y) & k(z_1,z_1) & \cdots & k(z_1,z_n) \\ k(z_2,y) & k(z_2,z_1) & \cdots & k(z_2,z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k(z_n,y) & k(z_n,z_1) & \cdots & k(z_n,z_n) \end{vmatrix} \tag{6.92}$$

y

$$C_n = \int_a^b \cdots \int_a^b dz_1 dz_2 \cdots dz_n \begin{vmatrix} k(z_1,z_1) & k(z_1,z_2) & \cdots & k(z_1,z_n) \\ k(z_2,z_1) & k(z_2,z_2) & \cdots & k(z_2,z_n) \\ k(z_3,z_1) & k(z_3,z_2) & \cdots & k(z_3,z_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k(z_n,z_n) & k(z_n,z_2) & \cdots & k(z_n,z_n) \end{vmatrix}. \tag{6.93}$$

Por ejemplo, los tres primeros términos de estas series son

$$D(x,y;\lambda) = k(x,y) - \lambda \int_a^b dz_1 \begin{vmatrix} k(x,y) & k(x,z_1) \\ k(z_1,y) & k(z_1,z_1) \end{vmatrix} + \\ + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b\!\!\int_a^b dz_1\, dz_2 \begin{vmatrix} k(x,y) & k(x,z_1) & k(x,z_2) \\ k(z_1,y) & k(z_1,z_1) & k(z_1,z_2) \\ k(z_2,y) & k(z_2,z_1) & k(z_2,z_2) \end{vmatrix} + \cdots\,,$$

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b dz_1\, k(z_1,z_1) + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b\!\!\int_a^b dz_1\, dz_2 \begin{vmatrix} k(z_1,z_1) & k(z_1,z_2) \\ k(z_2,z_1) & k(z_2,z_2) \end{vmatrix} + \cdots$$

A menudo es más conveniente evaluar estas series mediante las siguientes relaciones de recurrencia[8] [Tri85, sección 2.5]:

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)ds, \tag{6.94a}$$

$$B_n(x,y) = C_n\, k(x,y) - n\int_a^b k(x,s)B_{n-1}(s,y)ds, \tag{6.94b}$$

donde

$$C_0 = 1, \tag{6.94c}$$

$$B_0(x,y) = k(x,y). \tag{6.94d}$$

▶ *Ejemplo 6.11*

Vamos a hallar la solución de la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_{-1}^{1} (y-x)\,\varphi(y)\,dy \tag{6.95}$$

mediante el procedimiento de las series de Fredholm. Emplearemos las relaciones (6.94) cuya implementación es más sencilla que la de las relaciones (6.92) y (6.93). Teniendo en cuenta que el núcleo es $k(x,y) = -x+y$, encontramos que

$$C_1 = \int_{-1}^{1} B_0(s,s)ds = \int_{-1}^{1} k(s,s)ds = \int_{-1}^{1} 0\; ds = 0$$

y

$$\begin{aligned} B_1(x,y) &= C_1(-x+y) - \int_{-1}^{1} k(x,s)\,B_0(s,y)\,ds \\ &= -\int_{-1}^{1} (-x+s)(-s+y)ds \\ &= \frac{2}{3} + 2xy. \end{aligned}$$

A partir de estos resultados podemos calcular C_2 y $B_2(x,y)$:

$$C_2 = \int_{-1}^{1} B_1(s,s)ds = \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{3} + 2s^2\right) ds = \frac{8}{3}\,,$$

y

$$\begin{aligned} B_2(x,y) &= C_2(-x+y) - 2\int_{-1}^{1} k(x,s)\,B_1(s,y)\,ds \\ &= \frac{8}{3}(-x+y) - 2\int_{-1}^{1} (-x+s)\,\left(\frac{2}{3} + 2sy\right)\,ds = 0. \end{aligned}$$

Como $B_2 = 0$, se deduce inmediatamente que $C_n = 0$ y $B_n(x,y) = 0$ para $n \geq 3$. Por consiguiente las series de $D(\lambda)$ y $D(x,y;\lambda)$ se truncan (se convierten en polinomios en λ):

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n = 1 + \frac{4}{3}\,\lambda^2$$

[8] En `www` se proporciona un programa *Mathematica* que permite calcular las series de Fredholm mediante este procedimiento.

y

$$D(x, y; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, y) \lambda^n = -x + y - \lambda \left(\frac{2}{3} + 2xy \right),$$

de modo que el núcleo resolvente es

$$R(x, y; \lambda) = \frac{-x + y - \lambda\ (2/3 + 2xy)}{1 + 4\,\lambda^2/3}$$

y la solución final es por tanto

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_{-1}^{1} dy\, R(x, y, \lambda) y = \frac{3\,x + 2\,\lambda}{3 + 4\,\lambda^2},$$

que es la solución exacta.
La ecuación integral que hemos estudiado en este ejemplo se reduce, si tomamos $\lambda = 1/2$, a la ecuación integral (6.78) del ejemplo 6.8, página 366, ecuación que resolvimos entonces mediante el método de la serie de Neumann.

◀

La importancia de la solución de Fredholm estriba en que la series $D(x, y; \lambda)$ y $D(\lambda)$ tienen asegurada la convergencia bajo condiciones muy débiles: sólo es preciso que el núcleo $k(x, y)$ sea acotado o de cuadrado sumable en en cuadrado de integración [KKM82, Tri85].

Es posible demostrar que los autovalores de la ecuación homogénea son los ceros de $D(\lambda)$. Como argumento de plausibilidad nótese que cuando $g(x) = 0$ la fórmula de Fredholm nos conduce a $\varphi(x) = 0$, que es la solución trivial salvo si $D(\lambda) = 0$. Un corolario del teorema 6.1, página 361, es que $D(\lambda)$ es un polinomio si el núcleo es degenerado.

Autofunciones en forma de serie de Fredholm

A fin de obtener una expresión para las autofunciones volvamos al caso inhomogéneo y encontremos una identidad para valores arbitrarios de λ sustituyendo la solución de Fredholm (6.88) en la ecuación integral de partida (6.87):

$$\lambda \int_a^b dy\, \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)} g(y) = \lambda \int_a^b dy\, k(x, y)\, g(y) + \lambda^2 \int_a^b dz\, k(x, z) \int_a^b dy \frac{D(z, y; \lambda)}{D(\lambda)} g(y). \tag{6.96}$$

Como $g(y)$ es una función arbitraria, esta igualdad requiere que

$$D(x, y; \lambda) = k(x, y)\, D(\lambda) + \lambda \int_a^b dz\, k(x, z)\, D(z, y; \lambda). \tag{6.97}$$

Nótese que multiplicando esta relación por $\lambda\, g(y)/D(\lambda)$ e integrando entre a y b, se obtiene la relación (6.96). En particular, haciendo $\lambda = \lambda_n$, se tiene que $D(\lambda_n) = 0$, y por tanto

$$D(x, y; \lambda_n) = \lambda_n \int_a^b dz\, k(x, z)\, D(z, y; \lambda_n). \tag{6.98}$$

Esto significa que $D(x, y; \lambda_n)$ es una autofunción correspondiente al autovalor λ_n, independientemente del valor de la variable y. Si λ_n es un autovalor no degenerado sucede que

$$D(x, y; \lambda_n) = F_n(x)\, G_n(y), \tag{6.99}$$

donde $F_n(x)$ es la verdadera autofunción, pues obviamente verifica que

$$F_n(x) = \lambda_n \int_a^b dz\, k(x, z)\, F_n(z).$$

Serie de Neumann y serie de Fredholm

En notación de operadores, la ecuación integral no homogénea se escribe como

$$\varphi = g + \lambda \widehat{k} \varphi,$$

cuya solución formal es

$$\varphi = (1 - \lambda \widehat{k})^{-1} g.$$

El desarrollo en serie de potencias de este operador da precisamente la serie de Neumann

$$\varphi = g + \lambda \widehat{k}\, g + \lambda^2 \widehat{k}^2 g + \lambda^3 \widehat{k}^3 g + \cdots \tag{6.100}$$

Por otra parte, la fórmula de Fredholm puede escribirse como

$$\varphi = [1 + \lambda \widehat{R}(\lambda)]\, g. \tag{6.101}$$

Tenemos así la identidad formal

$$(1 - \lambda \widehat{k})^{-1} = 1 + \lambda \widehat{R}(\lambda). \tag{6.102}$$

6.8. Teoría de Schmidt-Hilbert

En esta sección veremos cómo utilizar los autovalores y autofunciones de la ecuación integral homogénea para hallar la solución del problema no homogéneo de un modo muy similar a como se hacía en la sección 1.7 [véase en particular la ecuación (1.121), página 41] con el problema de Sturm-Liouville inhomogéneo. Empecemos con unas definiciones:

- Diremos que un núcleo $k(x, y)$ es *simétrico* si es igual a su transpuesto:

$$k(x, y) = k(y, x).$$

- Un núcleo $k(x, y)$ será *hermítico* si es igual a su transpuesto conjugado:

$$k(x, y) = [k(y, x)]^*.$$

  Obviamente un núcleo real simétrico es hermítico. Nos restringiremos en lo que sigue a núcleos reales simétricos aunque mucho de lo que digamos será también válido para los núcleos hermíticos.

- Definimos el producto escalar de dos funciones $\varphi(x)$ y $g(x)$ por

$$\langle \varphi | g \rangle = \int_a^b dx\, \varphi^*(x)\, g(x).$$

  Si las funciones son reales (y es lo que supondremos en lo que sigue) esta definición se reduce a

$$\langle \varphi | g \rangle = \int_a^b dx\, \varphi(x)\, g(x).$$

6.8.1. Algunas propiedades de los núcleos reales simétricos

- Todo núcleo simétrico (no nulo) de cuadrado sumable tiene al menos un autovalor.
- Es fácil demostrar que los autovalores de un núcleo real simétrico $k(x, y)$ son reales, es decir, que

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_n \int_a^b dy\, k(x,y)\, \psi_n(y) = \psi_n(x) \\ k(x,y) \quad \text{real y simétrico}\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_n = \lambda_n^*. \tag{6.103}$$

  Este resultado es también válido para los núcleos hermíticos.

- Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales si el núcleo es simétrico y real:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_n \leftrightarrow \psi_n, \quad \lambda_m \leftrightarrow \psi_m \quad \text{con} \quad \lambda_n \neq \lambda_m \\ k(x,y) \text{ real y simétrico}\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \psi_n | \psi_m \rangle = 0. \tag{6.104}$$

  Si un autovalor está degenerado, sus autofunciones se pueden ortogonalizar mediante el método de Gram-Schmidt, de modo que

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \|\psi_n\|^2 \delta_{nm}.$$

  Por supuesto, las afirmaciones (6.103) y (6.104) son igualmente válidas para núcleos hermíticos y pueden demostrarse siguiendo el mismo procedimiento que se empleó en la sección 1.3.3, página 14, para operadores hermíticos genéricos.

  ▷ ***Ejercicio*** *6.5*

  Demuestra los resultados (6.103) *y* (6.104).

- Una propiedad importante de los núcleos reales simétricos es que su espectro de autovalores nunca está vacío [Tri85]:

  Teorema 6.8 *Todo núcleo simétrico de cuadrado sumable tiene al menos un autovalor.*

- En general las autofunciones $\psi_n(x)$ del núcleo real simétrico $k(x, y)$ no constituyen un conjunto completo de funciones, es decir, no podemos expresar cualquier función (bien comportada) como combinación lineal de las autofunciones $\psi_n(x)$. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, estas autofunciones sí constituyen un conjunto completo para cierta clase de funciones $\varphi(x)$. El siguiente teorema nos aclara cuáles son estas condiciones [Tri85, sección 3.10].

  Teorema 6.9 (Teorema de Hilbert-Schmidt) *Si la función $\varphi(x)$ puede escribirse de la forma*

$$\varphi(x) = \int_a^b dy\, k(x,y)\, \phi(y) \tag{6.105}$$

  donde $k(x, y)$ es un núcleo real simétrico de cuadrado sumable en el cuadrado $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, y *la función "semilla" $\phi(y)$ es de cuadrado sumable en el intervalo $a \le y \le b$, entonces la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \quad \textit{con} \quad a_n = \frac{\langle \psi_n | \varphi \rangle}{\|\psi_n\|^2}$$

converge en media cuadrática a $\varphi(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left| \varphi(x) - \sum_{m=1}^{n} a_m \psi_m(x) \right|^2 = 0\,.$$

Como es habitual, esto lo escribiremos simplemente así:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \quad \textit{con} \quad a_n = \frac{\langle \psi_n | \varphi \rangle}{\|\psi_n\|^2}. \tag{6.106}$$

Esta serie es uniforme y absolutamente convergente si la función $A(x)$ definida por

$$\int_a^b k^2(x,y)dy = A^2(x)$$

es acotada en el intervalo $a \le x \le b$.

Desarrollo del núcleo en sus autofunciones

Supongamos que el núcleo $k(x,y)$ puede expresarse como serie de sus autofunciones $\psi_n(y)$:

$$k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \psi_n(y). \tag{6.107}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación integral que satisface $\psi_m(x)$,

$$\psi_m(x) = \lambda_m \int_a^b dy\, k(x,y)\, \psi_m(y), \tag{6.108}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_m(x) &= \lambda_m \int_a^b dy \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \psi_n(y) \psi_m(y) \\
&= \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \int_a^b dy\, \psi_n(y) \psi_m(y) \\
&= \lambda_m\, a_m(x)\, \|\psi_m\|^2,
\end{aligned}$$

es decir,

$$a_m(x) = \frac{\psi_m(x)}{\lambda_m \|\psi_m\|^2}. \tag{6.109}$$

Sustituyendo esta expresión en (6.107) se obtiene

$$k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \frac{\psi_n(x)\, \psi_n(y)}{\|\psi_n\|^2}. \tag{6.110}$$

Esta relación la hemos obtenido tras suponer que $k(x,y)$ puede expresarse en serie de autofunciones. ¿Bajo qué condiciones es cierta esta suposición (y las manipulaciones subsiguientes)? El siguiente teorema nos da una respuesta [Tri85, Jer99]:

Teorema 6.10 (Teorema de Mercer) *Si el núcleo $k(x,y)$ es continuo, simétrico, de cuadrado sumable en el cuadrado $a \le x \le b$, $a \le y \le b$, y tiene sólo autovalores positivos (o como mucho, un número finito de autovalores negativos) entonces la serie de autofunciones de (6.110) es absoluta y uniformemente convergente a $k(x,y)$.*

6.8.2. Resolución de la ecuación no homogénea

Queremos resolver la ecuación integral de Fredholm de segunda especie

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y), \tag{6.111}$$

con *núcleo real y simétrico*. Supongamos que conocemos las soluciones de la ecuación integral homogénea asociada

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b dy\, k(x,y)\, \psi_n(y), \tag{6.112}$$

donde ψ_n es la autofunción correspondiente al autovalor λ_n. Asumiremos en lo que sigue que todas las autofunciones son ortogonales entre sí, es decir, que $\langle \psi_n | \psi_m \rangle = 0$ incluso si ψ_n y ψ_m tienen el mismo autovalor $\lambda_n = \lambda_m$ con $n \neq m$, es decir, incluso si las autofunciones son degeneradas. Por la ecuación (6.111) vemos que $\varphi(x) - g(x)$ es una función generable por el núcleo $k(x,y)$ donde $\varphi(y)$ juega el papel de la función semilla $\phi(y)$ que aparece en la ecuación (6.105). En este caso, el teorema de Hilbert-Schmidt nos asegura[9] que podemos expresar $\varphi(x) - g(x)$ en serie de autofunciones

$$\varphi(x) - g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n(x), \tag{6.113}$$

con

$$d_n = \int_a^b \psi_n(x)\, [\varphi(x) - g(x)]\, dx \tag{6.114}$$

$$= a_n - b_n, \tag{6.115}$$

donde

$$a_n = \int_a^b dx\, \psi_n(x)\, \varphi(x) \tag{6.116}$$

son los coeficientes generalizados de Fourier de la función incógnita, y donde

$$b_n = \int_a^b \psi_n(x)\, g(x)\, dx \tag{6.117}$$

son los coeficientes generalizados de Fourier del término no homogéneo $g(x)$ dado.

Nuestro objetivo es determinar d_n en términos de los coeficientes (conocidos) b_n. Insertando la relación (6.111) en (6.114) encontramos

$$d_n = \int_a^b dx\, \psi_n(x)\, \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y) \tag{6.118}$$

o, equivalentemente, escribiendo $k(y,x)$ en vez de $k(x,y)$ (lo cual es lícito porque el núcleo es simétrico) e intercambiando el orden de integración:

$$d_n = \int_a^b dy\, \varphi(y)\, \lambda \int_a^b dx\, k(y,x) \psi_n(x)\,. \tag{6.119}$$

[9]Como es habitual asumimos que $\varphi(x)$, y $k(x,y)$ satisfacen las condiciones del teorema de Hilbert-Schmidt, a saber, que $\varphi(x)$ es de cuadrado sumable en el intervalo $a \leq x \leq b$ y que el núcleo es de cuadrado sumable en el cuadrado $a \leq x, y \leq b$.

Pero como $\psi_n(x)$ es autofunción del núcleo $k(x,y)$, la última integral se reduce a $\psi_n(y)/\lambda_n$, de modo que

$$d_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} \int_a^b dy\, \psi_n(y)\, \varphi(y) = \frac{\lambda}{\lambda_n} a_n \,. \tag{6.120}$$

Usando este resultado en (6.115) encontramos

$$d_n = \frac{\lambda}{\lambda_n}\, d_n - b_n \tag{6.121}$$

de donde se deduce que

$$d_n = \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda}\, b_n \,. \tag{6.122}$$

Por tanto, la solución buscada $\varphi(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n(x)$ es

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n - \lambda}\, \psi_n(x),$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(x) &= g(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \frac{\langle \psi_n | g \rangle}{\lambda_n - \lambda} \psi_n(x) \\ &= g(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \frac{\int_a^b dy\, \psi_n(y)\, g(y)}{\lambda_n - \lambda}\, \psi_n(x). \end{aligned}} \tag{6.123}$$

Es instructivo comparar esta ecuación con las ecuaciones (1.121) y (1.160) del capítulo 1 (página 41).

Recordemos que el núcleo resolvente $R(x,y;\lambda)$ se definía en la página 370 como aquella función que nos proporciona la solución de la ecuación integral $\varphi(x)$ mediante la relación

$$\varphi(x) = g(x) + \int_a^b dy\, R(x,y;\lambda)\, g(y).$$

Comparando esta expresión con la (6.123) encontramos el desarrollo en serie de autofunciones del núcleo resolvente de un núcleo real simétrico:

$$\boxed{R(x,y;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \frac{\psi_n(x)\, \psi_n(y)}{\lambda_n - \lambda}.} \tag{6.124}$$

6.8.3. Teoremas de Fredholm para núcleos reales y simétricos

Enunciamos los teoremas de Fredholm en la sección 6.5. Ahora vamos a volver de nuevo sobre estos teoremas discutiendo su significado y justificando sus afirmaciones pero restringiéndonos a los casos en los que el núcleo $k(x,y)$ de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y), \tag{6.125}$$

es real y simétrico. Recuérdese que la expresión (6.123) es válida para estos casos.

★ *Ecuación homogénea:* $g(x) = 0$

En este caso la ecuación (6.123) nos dice que, en general, la solución es simplemente la trivial $\varphi(x) = 0$. Sin embargo, si λ es un autovalor del núcleo $k(x, y)$, digamos, $\lambda = \lambda_m$, siendo λ_m uno de los autovalores, entonces en la ecuación (6.123) aparece una indeterminación de tipo 0/0:

$$\varphi(x) = \lambda_m \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \frac{\langle\psi_n|g=0\rangle}{\lambda_n - \lambda_m} \psi_n(x) + \lambda_m \frac{1}{\|\psi_m\|^2} \frac{\langle\psi_m|g=0\rangle}{\lambda_m - \lambda_m} \psi_m(x). \tag{6.126}$$

Por supuesto, todos los términos del sumatorio son nulos. Analicemos el último término de esta expresión para ver si podemos resolver la indeterminación de tipo cero partido por cero. La fórmula anterior, ecuación (6.126), procedía (véase la sección 6.8.2 precedente) de

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n(x), \tag{6.127}$$

donde d_n satisfacía la relación

$$d_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} d_n - b_n \qquad \text{con} \qquad b_n = \frac{\langle\psi_n|g\rangle}{\|\psi_n\|^2}.$$

Si $g(x) = 0$, entonces $b_n = 0$ y la relación anterior se reduce a

$$d_n = \frac{\lambda}{\lambda_n} d_n. \tag{6.128}$$

Si $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n, es decir, si λ *no es un autovalor*, la relación anterior (6.128) sólo puede satisfacerse si $d_n = 0$. Por la relación (6.127), esto significa que la única solución posible es $\varphi(x) = 0$, es decir, encontramos que no existe solución, aparte de la trivial, de la ecuación homogénea si λ no es un autovalor. Esto es precisamente lo que afirmaba el teorema de la alternativa de Fredholm. Pero si $\lambda = \lambda_m$, es decir, si λ es un autovalor, se tiene que

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{\lambda_m}{\lambda_n} d_n \Rightarrow d_n = 0 \quad \text{si } n \neq m \\ d_m &= \frac{\lambda_m}{\lambda_m} a_m \Rightarrow d_m \text{ arbitrario} \Rightarrow \varphi(x) = d_m \psi_m(x). \end{aligned}$$

Esto no es sorprendente, sólo nos dice que la solución de la ecuación integral homogénea existe si λ es igual a un autovalor λ_m, siendo esta solución la autofunción $\psi_m(x)$ correspondiente al autovalor λ_m.

★ *Ecuación no homogénea:* $g(x) \neq 0$

La solución de la ecuación integral (6.125) no homogénea viene también dada ahora por

$$\varphi(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \psi_n(x). \tag{6.129}$$

Pero como $g(x) \neq 0$, entonces, por lo general,

$$b_n = \frac{\langle\psi_n|g\rangle}{\|\psi_n\|^2} \neq 0,$$

por lo que

$$d_n = \frac{\lambda}{\lambda_n - \lambda} b_n \quad \text{para todo } n. \tag{6.130}$$

Esto significa que:

- Si λ no es igual a ningún autovalor ($\lambda \neq \lambda_n$ para todo n), es decir, si la ecuación homogénea no tiene solución, entonces la ecuación integral (6.125) no homogénea sí tiene solución y ésta viene dada por (6.129) con los coeficientes dados por (6.130). Esto es justamente lo que nos decía el teorema de la alternativa de Fredholm.

- Si λ es igual a un autovalor, por ejemplo, si $\lambda = \lambda_m$ se tiene que

$$d_n = \frac{\lambda_m}{\lambda_n - \lambda_m} b_n \qquad \text{para} \quad n \neq m$$

y, por (6.121),

$$d_m = d_m - b_m. \tag{6.131}$$

Ahora bien:

  - Si $b_m \neq 0$, entonces esta última relación, ecuación (6.131), es imposible de satisfacer y la ecuación no homogénea no tiene solución, de acuerdo con el teorema de la alternativa de Fredholm.
  - Pero si $b_m = 0$, la relación (6.131) se verifica trivialmente para *cualquier* valor de d_m, por lo que la solución de la ecuación integral no homogénea es posible incluso aunque λ sea igual a un autovalor; esta solución es

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda_m \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} \frac{1}{\|\psi_n\|^2} \frac{\langle\psi_n|g\rangle}{\lambda_n - \lambda_m} \psi_n(x) + d_m \psi_m(x). \tag{6.132}$$

Como el valor de d_m es arbitrario, la solución (6.132) no es única: existen infinitas soluciones linealmente independientes, una distinta para cada valor arbitrario de d_m que se escoja.

Nótese que $b_m = 0$ equivale a $\langle\psi_m|g\rangle \propto \int_a^b \psi_m(x)\, g(x)\, dx = 0$, por lo que, en definitiva, hemos justificado para el caso especial de núcleos $k(x, y)$ reales simétricos el teorema 6.5; teorema que, recuérdese, nos decía en qué circunstancias el teorema de la alternativa de Fredholm 6.3 podía no verificarse. Debe notarse finalmente que, al ser $k(x, y)$ simétrico, la autofunción $\psi_m(x)$ del núcleo $k(x, y)$ es también autofunción del núcleo transpuesto con el mismo autovalor λ_m:

$$\lambda_m \int_a^b dy\, k(x, y)\, \psi_m = \lambda_m \int_a^b k(y, x)\, \psi_m = \psi_m.$$

▷ ***Ejercicio** 6.6*

Por sencillez de exposición hemos supuesto en toda la discusión anterior que el autovalor $\lambda = \lambda_m$ no estaba degenerado. Si éste no fuera el caso, la modificación que habría que hacer sería mínima. Este ejercicio te propone rehacer toda la discusión anterior suponiendo que el autovalor λ_m está r veces degenerado.

▶ *Ejemplo 6.12*

Sea la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^\pi \operatorname{sen}(x + y)\, \varphi(y)\, dy \tag{6.133}$$

donde [caso (a)] $g(x) = \cos(x)$ y [caso (b)] $g(x) = \cos(2x)$. El núcleo $k(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$ es real y simétrico por lo que podemos utilizar la teoría de Schmidt-Hilbert para encontrar su solución. Empecemos encontrando las autofunciones y autovalores del núcleo $k(x,y) = \operatorname{sen}(x+y)$. Para ello buscamos todas las soluciones no nulas posibles de la ecuación homogénea

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+y)\,\varphi(y)\,dy. \tag{6.134}$$

El núcleo de esta ecuación es separable pues

$$k(x,y) = \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

Por tanto la ecuación (6.134) se convierte en

$$\varphi(x) = \lambda(c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x) \tag{6.135}$$

donde

$$c_1 = \lambda \int_0^\pi \cos y\,(c_1 \operatorname{sen} y + c_2 \cos y)dy = \frac{\lambda\pi}{2} c_2, \tag{6.136}$$

$$c_2 = \lambda \int_0^\pi \operatorname{sen} y\,(c_1 \operatorname{sen} y + c_2 \cos y)dy = \frac{\lambda\pi}{2} c_1. \tag{6.137}$$

Esto implica $c_1 = (\lambda\pi/2)^2 c_1$. Dado que la posible solución $c_1 = 0$ conduce a la solución trivial $\varphi(x) = 0$, debe ocurrir que $\lambda^2 = (2/\pi)^2$, es decir, los autovalores son $\lambda_1 = 2/\pi$ y $\lambda_2 = -2/\pi$. Si $\lambda = \lambda_1$, de la ecuación (6.136) se deduce que $c_1 = c_2$, por lo que, según la relación (6.135), la autofunción correspondiente es

$$\psi_1(x) = \operatorname{sen} x + \cos x. \tag{6.138}$$

De igual modo, si $\lambda = \lambda_2$, de la ecuación (6.136) se deduce que $c_1 = -c_2$, y la ecuación (6.135) conduce a

$$\psi_2(x) = \operatorname{sen} x - \cos x \tag{6.139}$$

como segunda (y última) autofunción. Según la teoría de Schmidt-Hilbert la solución de la ecuación no homogénea, ecuación (6.133), viene dada por la relación (6.123). En nuestro problema, esta ecuación se convierte en

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \left(\frac{1}{\|\psi_1\|^2} \frac{\langle \psi_1 | g \rangle}{\lambda_1 - \lambda} \psi_1(x) + \frac{1}{\|\psi_2\|^2} \frac{\langle \psi_2 | g \rangle}{\lambda_2 - \lambda} \psi_2(x) \right). \tag{6.140}$$

La norma de las dos autofunciones es $\sqrt{\pi}$:

$$\|\psi_1\|^2 = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 dx = \pi,$$

$$\|\psi_2\|^2 = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 dx = \pi.$$

★ *Caso (a):* $g(x) = \cos x$

En este caso

$$\langle \psi_1 | g \rangle = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x + \cos x) \cos x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\langle \psi_2 | g \rangle = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x - \cos x) \cos x\, dx = -\frac{\pi}{2}.$$

La solución (6.140) es por tanto

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{2/\pi - \lambda} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{2/\pi + \lambda} \right). \tag{6.141}$$

Por supuesto, si λ es igual a un autovalor, esto es, si $\lambda = \pm 2/\pi$, en la ecuación (6.141) aparece una división por cero, es decir, la ecuación (6.133) con $g(x) = \cos x$ no tiene solución pues $\langle \psi_1 | g \rangle \neq 0$ y $\langle \psi_2 | g \rangle \neq 0$.

★ *Caso (b):* $g(x) = \cos 2x$
Igual que el el caso (a), la teoría de Schmidt-Hilbert nos dice que la solución de la ecuación no homogénea, ecuación (6.133) con $g(x) = \cos 2x$, viene dada por la relación (6.140), pero ahora se tiene que

$$\langle \psi_1 | g \rangle = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x + \cos x) \cos 2x \, dx = 0,$$
$$\langle \psi_2 | g \rangle = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x - \cos x) \cos 2x \, dx = 0.$$

Luego la solución de la ecuación integral no homogénea

$$\varphi(x) = \cos 2x + \lambda \int_0^\pi \operatorname{sen}(x+y)\, \varphi(y)\, dy$$

es simplemente $\varphi(x) = \cos 2x$ siempre que λ no sea igual a un autovalor, es decir, siempre que $\lambda \neq \pm 2/\pi$. Si λ es un autovalor, la ecuación no homogénea **sí** tiene solución (aunque no única). Veámoslo. Si $\lambda = \lambda_1 = 2/\pi$, las soluciones dadas por la ecuación (6.132) son

$$\varphi(x) = \cos 2x + c_1 \psi_1(x) = \cos 2x + c_1(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

donde c_1 es una constante arbitraria. De igual modo, si $\lambda = \lambda_2 = -2/\pi$, las soluciones dadas por la ecuación (6.132) son

$$\varphi(x) = \cos 2x + c_2 \psi_2(x) = \cos 2x + c_2(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

donde c_2 es una constante arbitraria.

▷ ***Ejercicio*** *6.7*

1. *Comprueba por sustitución directa en las distintas ecuaciones integrales que las soluciones obtenidas son realmente las soluciones de dichas ecuaciones.*
2. *En este ejemplo se ha querido ilustrar los resultados de la secciones 6.5 y 6.8.3 sobre el teorema de la alternativa de Fredholm y hemos dado las soluciones a partir de las expresiones previamente deducidas, ecuaciones (6.123) y (6.132). Por supuesto, no es necesario conocer estas fórmulas para resolver la ecuación integral* (6.133)*. Ésta se puede resolver fácilmente mediante la técnica de la sección 6.4 apropiada para núcleos separables. Es extremadamente conveniente que resuelvas este problema de este modo para los dos casos anteriores con* $g(x) = \cos x$ *y* $g(x) = \cos 2x$ *cuando* $\lambda \neq \pm 2/\pi$, $\lambda = 2/\pi$ *y* $\lambda = -2/\pi$*, e interpretes los resultados en términos del teorema de la alternativa de Fredholm.*

◀

6.9. Técnicas varias de resolución de ecuaciones integrales

6.9.1. Reducción de la ecuación integral a una ecuación diferencial

En ocasiones las ecuaciones integrales pueden convertirse en ecuaciones diferenciales tras sucesivas diferenciaciones en las que se hace uso de la regla de Leibniz (6.19). Vamos a verlo en un ejemplo muy representativo.

► *Ejemplo 6.13*

Sea la ecuación de Volterra

$$\varphi(x) = 2 + x^2 - \cos x + \int_0^x [1 + 2(y - x)]\, \varphi(y)\, dy. \tag{6.142}$$

Diferenciando una vez esta ecuación integral y haciendo uso de (6.19), obtenemos que

$$\varphi'(x) = 2x + \operatorname{sen} x - 2 \int_0^x \varphi(y)\, dy + \varphi(x). \tag{6.143}$$

Derivando una vez más:

$$\varphi''(x) = 2 + \cos x - 2\varphi(x) + \varphi'(x).$$

Hemos así obtenido una ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes constantes cuya solución es

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2} + \mathrm{e}^{x/2} \left[A \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + B \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) \right]. \tag{6.144}$$

Las constantes A y B se hallan exigiendo que $\varphi(x)$ satisfaga condiciones implicadas por la ecuación integral:

1. La ecuación integral (6.142) evaluada en $x = 0$ nos dice que

$$\varphi(0) = 2 - \cos 0 + \int_0^0 [1 + 2(y - x)]\, \varphi(y)\, dy = 1.$$

2. La derivada de la ecuación integral, dada por la ecuación (6.143), evaluada en $x = 0$ conduce a

$$\varphi'(0) = \operatorname{sen} 0 + \varphi(0) - 2 \int_0^0 \varphi(y)\, dy = 1.$$

Sustituyendo la solución obtenida, ecuación (6.144), en estas dos condiciones, determinamos el valor de las constantes A y B:

$$\varphi(0) = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2},$$
$$\varphi'(0) = 1 \Rightarrow B = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Luego la solución de la ecuación integral es

$$\varphi(x) = 1 + \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{2} + \mathrm{e}^{x/2} \left[-\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + \frac{\sqrt{7}}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) \right].$$

◄

En ocasiones, la diferenciación directa de la ecuación integral conduce a ecuaciones diferenciales complicadas, mientras que la ecuación diferencial resultante es más simple si se trabaja con una función auxiliar. Veamos un ejemplo de esto.

► *Ejemplo 6.14*

Sea la ecuación de Volterra

$$\varphi(x) = x + \int_0^x dy\, x\, y\, \varphi(y).$$

Mediante diferenciación directa se obtiene

$$\varphi'(x) = 1 + \int_0^x dy\, y\, \varphi(y) + x^2 \varphi(x).$$

Diferenciando de nuevo encontramos que

$$\varphi''(x) = x\,\varphi(x) + 2x\,\varphi(x) + x^2\varphi'(x).$$

De este modo obtenemos una ecuación diferencial no trivial:

$$\varphi''(x) - x^2\varphi'(x) - 3x\,\varphi(x) = 0,$$

cuya solución parece complicada. Vamos a explorar por tanto otra vía de resolución. Nótese que podemos escribir la ecuación integral del siguiente modo:

$$\varphi(x) = x + x\int_0^x dy\,y\,\varphi(y) = x + x\,F(x) \tag{6.145}$$

donde $F(x)$ es la función auxiliar

$$F(x) = \int_0^x dy\,y\,\varphi(y).$$

Derivando $F(x)$ encontramos que

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\int_0^x dy\,y\,\varphi(y) = x\,\varphi(x).$$

Pero por la ecuación (6.145) se tiene que $x\,\varphi(x) = x^2 + x^2F(x)$, luego encontramos que $F(x)$ es la solución de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\frac{dF}{dx} = x^2 + x^2F(x).$$

La resolución de esta ecuación diferencial es muy simple:

$$\frac{dF}{1+F} = x^2\,dx \Rightarrow \ln(1+F) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow F(x) = -1 + C\;\mathrm{e}^{x^3/3}. \tag{6.146}$$

Sustituyendo esta expresión en (6.145) encontramos que

$$\varphi(x) = C\,x\;\mathrm{e}^{x^3/3}. \tag{6.147}$$

Podemos hallar el coeficiente C de dos modos distintos:

1. Por la definición de $F(x)$ observamos que $F(0) = 0$, por lo que de (6.146) deducimos que $C = 1$. Por lo tanto la solución buscada es
$$\varphi(x) = x\;\mathrm{e}^{x^3/3}.$$
2. También podemos sustituir la solución provisional $\varphi(x)$ dada por (6.147) en la ecuación integral:
$$\begin{aligned}\varphi(x) = C\,x\;\mathrm{e}^{x^3/3} &= x + x\int_0^x dy\,yC\,y\;\mathrm{e}^{y^3/3}\\ &= x + C\,x\int_0^x dy\,y^2\,\mathrm{e}^{y^3/3}\\ &= x + C\,x\,[\mathrm{e}^{x^3/3} - 1]\end{aligned}$$
De este modo obtenemos
$$0 = x - C\,x \Rightarrow C = 1.$$
La solución es por tanto $\varphi(x) = x\;\mathrm{e}^{x^3/3}$.

◀

Hemos visto en los ejemplos anteriores que una ecuación integral de Volterra se transformaba en el problema equivalente de una ecuación diferencial con condiciones iniciales. Ciertas ecuaciones integrales de Fredholm también pueden reducirse a ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno. Esto ya se mostró en el ejemplo 6.3, página 356, y no daremos aquí ningún ejemplo más.

6.9.2. Ecuaciones integrales de convolución

Se llaman así a las ecuaciones integrales en las que el núcleo es sólo función de la diferencia $x-y$. A estos núcleos son llamados núcleos de desplazamiento.

Límites de integración infinitos

Si los límites de integración son infinitos

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dy\, k(x-y)\, \varphi(y), \tag{6.148}$$

podemos intentar resolver esta ecuación aplicando el operador transformada de Fourier. La transformada de Fourier de $\varphi(x)$ la denotaremos por $\widetilde{\varphi}(\omega)$:

$$\mathcal{F}[\varphi] \equiv \widetilde{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \mathrm{e}^{-i\,\omega\, x}\, dx. \tag{6.149}$$

Recordemos que el producto de convolución (de Fourier) $k * \varphi$ de las funciones $k(x)$ y $\varphi(x)$ se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\, k(x-y)\, \varphi(y)$$

y que su transformada de Fourier es igual al producto de las transformadas de Fourier de $k(x)$ y $\varphi(x)$, es decir,

$$\mathcal{F}[k * \varphi] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)\, \varphi(y)\, dy\right] = \mathcal{F}[k]\mathcal{F}[\varphi] = \widetilde{k}(\omega)\, \widetilde{\varphi}(\omega). \tag{6.150}$$

Este resultado se conoce como *teorema de la convolución* (de Fourier). Aplicando el operador transformada de Fourier sobre la ecuación (6.148) y usando el resultado (6.150) anterior obtenemos

$$\widetilde{\varphi}(\omega) = \widetilde{g}(\omega) + \lambda\, \widetilde{k}(\omega)\, \widetilde{\varphi}(\omega),$$

con lo que la solución de la ecuación integral en el espacio de Fourier viene dada por

$$\widetilde{\varphi}(\omega) = \frac{\widetilde{g}(\omega)}{1 - \lambda\, \widetilde{k}(\omega)}. \tag{6.151}$$

Ahora "tan sólo" nos resta hallar la función $\varphi(x)$ calculando la transformada inversa

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widetilde{g}(\omega)}{1 - \lambda\, \widetilde{k}(\omega)}\ \mathrm{e}^{i\,\omega\, x}\, d\omega, \tag{6.152}$$

tarea que no suele ser fácil.

Límites de integración entre 0 y x

Si los límites de integración de la ecuación integral son 0 y x, la ecuación a resolver

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_{0}^{x} dy\, k(x-y)\, \varphi(y), \tag{6.153}$$

es de Volterra y podemos usar el operador transformada de Laplace en su resolución. La transformada de Laplace de $\varphi(x)$ la denotaremos por $\widetilde{\varphi}(s)$:

$$\mathcal{L}[\varphi] \equiv \widetilde{\varphi}(s) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-sx}\ \varphi(x)\, dx.$$

Recordemos ahora que el producto de convolución (de Laplace) $k \bullet \varphi$ de las funciones $k(x)$ y $\varphi(x)$ se define por

$$\int_0^x dy\, k(x-y)\, \varphi(y)$$

y que su transformada de Laplace es el producto de las transformadas de Laplace de $k(x)$ y $\varphi(x)$ (*teorema de la convolución* de Laplace), es decir,

$$\mathcal{L}[k \bullet \varphi] = \mathcal{L}\left[\int_0^x dy\, k(x-y)\, \varphi(y)\right] = \mathcal{L}[k]\, \mathcal{L}[\varphi] = \widetilde{k}(s)\widetilde{\varphi}(s). \tag{6.154}$$

Aplicando el operador transformada de Laplace a la ecuación (6.153) y usando la propiedad (6.154) encontramos que

$$\widetilde{\varphi}(s) = \widetilde{g}(s) + \lambda\, \widetilde{k}(s)\, \widetilde{\varphi}(s),$$

con lo que la solución en el espacio de Laplace vendrá dada por

$$\widetilde{\varphi}(s) = \frac{\widetilde{g}(s)}{1 - \lambda\, \widetilde{k}(s)}. \tag{6.155}$$

► *Ejemplo 6.15*

Sea la ecuación de Volterra

$$\varphi(x) = x - \int_0^x dy\ \mathrm{e}^{x-y}\ \varphi(y)\,.$$

Vemos que el núcleo $k(x,y) = \exp(x-y)$ es un núcleo de desplazamiento, el término no homogéneo es $g(x) = x$, y $\lambda = -1$. Aplicando el operador transformada de Laplace a la ecuación integral anterior y teniendo en cuenta que

$$\widetilde{g}(s) = \mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2},$$
$$\widetilde{k}(s) = \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^x\right] = \frac{1}{s-1}\,,$$

se deduce que

$$\widetilde{\varphi}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\widetilde{\varphi}(s)}{s-1}\,,$$

es decir,

$$\widetilde{\varphi}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\,.$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}\left[\frac{x^n}{n!}\right] = \frac{1}{s^{n+1}}$$

se obtiene que la solución buscada es $\varphi(x) = x - x^2/2$.

◄

► *Ejemplo 6.16*

En una red unidimensional dopada con una densidad ρ de trampas difusivas dispuestas al azar, una partícula (la presa) se mueve siguiendo la trayectoria $x(t)$. Queremos conocer la probabilidad $S(t)$ de supervivencia de la partícula hasta el instante t. Sea $S(t) = \mathrm{e}^{-\mu(t)}$, $\dot{\mu}(t) = d\mu/dt$ y D la constante de difusión de las trampas. Se ha demostrado (véase A. J. Bray, S. N. Majumdar y R. A. Blythe, *Physical*

Review E **67**, 060102 (2003); `http://arxiv.org/abs/cond-mat/0212226`) que $\dot{\mu}(t)$ satisface la ecuación integral homogénea de Volterra de primera especie

$$\rho = \int_0^t d\tau \dot{\mu}(\tau) \frac{\mathrm{e}^{-[x(t)-x(\tau)]^2/[4D(t-\tau)]}}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} . \tag{6.156}$$

Supongamos que la partícula se mueve balísticamente con velocidad c: $x(t) = c\,t$. En este caso la ecuación integral es:

$$\rho = \int_0^t d\tau \dot{\mu}(\tau) \frac{\mathrm{e}^{-c^2(t-\tau)/4D}}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}}$$

cuyo núcleo

$$k(t,\tau) = k(t-\tau) = \frac{\mathrm{e}^{-c^2(t-\tau)/4D}}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}}$$

es un núcleo de desplazamiento. Por tanto la ecuación integral se puede resolver mediante la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[\rho] = \mathcal{L}[\dot{\mu}]\, \mathcal{L}[k(t)] .$$

Pero

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\dot{\mu}(t)] &= s\mathcal{L}[\mu(t)] \equiv s\tilde{\mu}(s) , \\ \mathcal{L}[\rho] &= \frac{\rho}{s} , \\ \mathcal{L}[k(t)] &= \frac{1}{(4D)(\alpha+s)^{1/2}} , \end{aligned}$$

donde $\alpha = c^2/(4D)$. Por tanto

$$\tilde{\mu}(s) = (4D)^{1/2} \rho \, \frac{(\alpha+s)^{1/2}}{s^2} ,$$

que es la solución de la ecuación (6.156) en el espacio de Laplace. Ahora nos enfrentamos al problema de hallar la transformada inversa de Laplace de esta función. Se observa que

$$\frac{(\alpha+s)^{1/2}}{s^2} = \tilde{f}(s)\tilde{g}(s)$$

donde $\tilde{f}(s) = (\alpha+s)^{-1/2}$ y $\tilde{g}(s) = (\alpha/s^2+1/s)$. Aplicando de nuevo el teorema del producto de convolución de las transformadas de Laplace, se deduce que

$$\mu(t) = (4D)^{1/2} \rho \int_0^t g(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

es decir,

$$\mu(t) = \left(\frac{4D}{\pi}\right)^{1/2} \rho \int_0^t [1+\alpha(t-\tau)] \, \frac{\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}{\tau^{1/2}} d\tau .$$

En términos de la función gamma incompleta

$$\gamma(\nu, x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-y}\, y^{\nu-1} dy$$

podemos escribir la función $\mu(t)$ así:

$$\mu(t) = \rho \left(\frac{4D}{\pi\alpha}\right)^{1/2} \left[(1+\alpha t)\gamma(1/2, \alpha t) - \gamma(3/2, \alpha t)\right] .$$

Este resultado es notable porque son muy escasos los problemas de atrapamiento de partículas y trampas difusivas que pueden resolverse de forma exacta. La versión de este problema en un espacio d-dimensional se discute en el artículo *Physical Review E* **68**, 045101 (2003) de S.N. Majumdar y A. J. Bray (puede obtenerse este artículo en la dirección `http://arxiv.org/abs/cond-mat/0305386`).

◀

6.9.3. Desarrollo en serie de funciones ortogonales

Empezaremos esta sección con un ejemplo particular, aunque muy ilustrativo, para acabar con consideraciones de índole más general.

Un ejemplo

Supongamos que queremos resolver la ecuación integral de Fredholm de primera especie

$$g(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(y)}{(1-2x\,y+x^2)^{1/2}}\,dy. \tag{6.157}$$

El núcleo de la ecuación integral, $k(x,y) = (1-2x\,y+x^2)^{-1/2}$, es la función generadora de los polinomios de Legendre, y el intervalo de integración, $[-1,1]$, es el intervalo en el que los polinomios de Legendre son ortogonales.

Empezamos desarrollando el kernel $k(x,y)$ y la función incognita $\varphi(y)$ en serie de polinomios de Legendre :

$$(1-2x\,y+x^2)^{-1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(y)\,x^r, \tag{6.158}$$

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(y). \tag{6.159}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación integral obtenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(y) \sum_{r=0}^{\infty} P_r(y)\,x^r \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} a_n x^r \int_{-1}^{1} P_n(y)\,P_r(y)\,dy. \end{aligned} \tag{6.160}$$

Puesto que los polinomios de Legendre son ortogonales en el intervalo $[-1,1]$,

$$\int_{-1}^{1} P_n(y)\,P_r(y)\,dy = \langle P_n|P_r\rangle = \frac{2}{2n+1}\delta_{nr},$$

la ecuación (6.160) se reduce a

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{2n+1} x^n. \tag{6.161}$$

De aquí podemos obtener los coeficientes a_n tras desarrollar $g(x)$ en serie de Taylor y comparar con la ecuación (6.161):

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n \Rightarrow \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2a_n}{2n+1},$$

de modo que los coeficientes vienen dados por

$$a_n = \frac{2n+1}{2n!} g^{(n)}(0). \tag{6.162}$$

Sustituyendo (6.162) en (6.159) hallamos la solución de la ecuación integral expresada como serie de polinomios de Legendre:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2n!} g^{(n)}(0) P_n(x). \tag{6.163}$$

Desarrollo general

Es cierto que el procedimiento que acabamos de exponer está muy ligado al hecho de que el núcleo $k(x,y)$ es la función generatriz de los polinomios en los que desarrollamos la función incógnita $\varphi(x)$. De todos modos, podemos utilizar la idea de expresar los términos que aparecen en la ecuación integral como series de funciones ortogonales en el intervalo de integración y aplicarla a ecuaciones más generales de la forma

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y). \tag{6.164}$$

Para ello introducimos un conjunto completo ortonormal de funciones $\phi_i(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$,

$$\int_a^b dx\, \phi_i(x)\, \phi_j(x) = \delta_{ij}, \tag{6.165}$$

y desarrollamos $\varphi(x)$, $g(x)$ y $k(x,y)$ en términos de $\phi_i(x)$,

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i\, \phi_i(x), \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i \phi_i(x) \tag{6.166}$$

y

$$k(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(y)\, \phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} \phi_j(y) \right] \phi_i(x),$$

es decir

$$k(x,y) = \sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij} \phi_i(x)\, \phi_j(y). \tag{6.167}$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación integral (6.164) y aprovechando la propiedad de ortonormalidad de $\phi_i(x)$ reducimos la ecuación integral a una ecuación entre series:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \phi_i(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} g_i \phi_i(x) + \lambda \int_a^b dy \sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij} \phi_i(x)\, \phi_j(y) \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \phi_m(y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} g_i \phi_i(x) + \lambda \sum_{i,j=1}^{\infty} k_{ij} \phi_i(x) \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \int_a^b dy\, \phi_j(y) \phi_m(y) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} g_i \phi_i(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} \varphi_j \right] \phi_i(x),
\end{aligned}$$

de la que deducimos que

$$\varphi_i = g_i + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij} \varphi_j\,, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{6.168}$$

Este es un sistema algebraico con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas. Sin embargo, si el conjunto completo $\phi_i(x)$ se ha escogido de modo apropiado, se puede obtener una buena aproximación de $\varphi(x)$ reteniendo un número N finito de términos en las ecuaciones (6.166) y (6.167). En este caso (6.168) se convierte en un sistema finito,

$$\varphi_i \simeq g_i + \lambda \sum_{j=1}^{N} k_{ij} \varphi_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{6.169}$$

fácilmente resoluble... por un ordenador.

6.10. Ecuación de Abel generalizada

La ecuación de Abel generalizada[10]

$$g(x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha} dy, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{6.170}$$

es una ecuación de Volterra inhomogénea de primera especie especialmente útil y famosa. Nótese que esta ecuación tiene la forma de un producto de convolución de Laplace de modo que podemos resolverla mediante la técnica discutida en la sección 6.9.2, página 385. Aplicando el operador transformada de Laplace en (6.170) y teniendo en cuenta que la transformada de Laplace del producto de convolución es igual al producto de las transformadas [teorema de la convolución; véase la ecuación (6.154)], se obtiene que

$$\mathcal{L}[g(x)] = \mathcal{L}[x^{-\alpha}]\mathcal{L}[\varphi(x)]. \tag{6.171}$$

Pero $\mathcal{L}[x^{-\alpha}] = (-\alpha)!/s^{1-\alpha}$, luego

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] = \frac{s^{1-\alpha}}{(-\alpha)!}\mathcal{L}[g(x)]. \tag{6.172}$$

Como $s^{1-\alpha}$ para $0 < \alpha < 1$ no tiene transformada inversa de Laplace dividimos la expresión anterior por s para aprovecharnos de que $s^{-\alpha}$ sí tiene transformada inversa. Es decir,

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}[\varphi(x)] = \frac{s^{-\alpha}}{(-\alpha)!}\mathcal{L}[g(x)] = \frac{1}{(-\alpha)!(\alpha-1)!}\mathcal{L}[x^{\alpha-1}]\mathcal{L}[g(x)]. \tag{6.173}$$

Aplicando de nuevo el teorema de la convolución y teniendo en cuenta que

$$(-\alpha)!\alpha! = \frac{\pi\alpha}{\operatorname{sen}\pi\alpha}$$

se encuentra que

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}[\varphi(x)] = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\mathcal{L}\left[\int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}dy\right]. \tag{6.174}$$

Pero

$$\frac{1}{s}\mathcal{L}[\varphi(x)] = \mathcal{L}\left[\int_0^x \varphi(y)dy\right]$$

y por tanto

$$\int_0^x \varphi(y)dy = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}dy. \tag{6.175}$$

Derivando esta ecuación obtenemos finalmente la solución de la ecuación integral de Abel:[11]

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\,dy. \tag{6.176}$$

Podemos expresar esta solución de un modo un poco más explícito en el que no aparece el operador diferencial mediante el cambio

$$u = g(y)\,, \quad dv = (x-y)^{\alpha-1}dv\,,$$

[10] Si $\alpha = 1/2$, la ecuación se llama, simplemente, ecuación de Abel.

[11] Puede verse un modo diferente de deducir este resultado en la sección 10, página 55 de [KKM82].

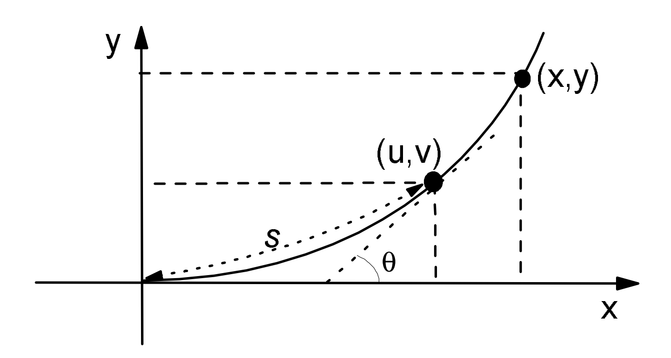


Figura 6.1: Esquema de la curva en el problema mecánico de Abel.

e integrando por partes:

$$\int_0^x \frac{g(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\,dy = -\left.\frac{1}{\alpha}g(y)(x-y)^\alpha\right|_{y=0}^{y=x} + \frac{1}{\alpha}\int_0^x \frac{g'(y)}{(x-y)^{-\alpha}}\,dy$$
$$= \frac{1}{\alpha}g(0)x^\alpha + \frac{1}{\alpha}\int_0^x (x-y)^\alpha g'(y)dy$$

Por tanto la solución (6.176) se reduce a

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sen}\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{g(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{g'(y)}{(x-y)^{1-\alpha}}\,dy\right]. \tag{6.177}$$

▶ *Ejemplo 6.17*

Un ejemplo especialmente famoso y lindo en el que aparece una ecuación integral de Abel es el problema de la tautócrona, el cual es un caso especial del problema mecánico de Abel. Veamos en qué consiste. Supongamos que tenemos un abalorio que, debido a su propio peso, se desliza sin rozamiento por un alambre cuya forma viene descrita por la función $y(x)$ (véase la figura 6.1). Si la cuenta parte de la altura y, sabemos que tardará un tiempo $T(y)$ en descender hasta el origen $(x,y) = (0,0)$. Este tiempo no sólo depende del valor de la altura y sino también de la forma que tenga el alambre, es decir, de la función $y(x)$. Veámoslo explícitamente. Sea (u,v) cualquier punto del alambre situado entre el punto desde el cual parte el abalorio $(u,v) = (x,y)$ y el punto de llegada $(u,v) = (0,0)$. Por el principio de conservación de la energía sabemos que la energía cinética en el punto (u,v) es igual al cambio en la energía potencial:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = mg(y-v)\,. \tag{6.178}$$

En esta ecuación g es la aceleración de la gravedad, m es la masa del abalorio, s es el distancia a lo largo del alambre que separa el origen $(0,0)$ y la posición (u,v) de la cuenta, y, por tanto, ds/dt es la velocidad del abalorio a lo largo del alambre. De (6.178) se deduce que

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}\,. \tag{6.179}$$

La elección del signo negativo de la raíz cuadrada se debe a que la distancia s disminuye cuando t aumenta. El tiempo que tarda la cuenta en descender desde la altura y viene dado por

$$T(y) = \int_{v=y}^{v=0} dt = \int_{v=0}^{v=y} \frac{ds}{\sqrt{2g(y-v)}}\,. \tag{6.180}$$

Pero

$$ds = \frac{ds}{dv}dv \equiv \varphi(v)dv \tag{6.181}$$

por lo que (6.179) se puede escribir así:

$$T(y) = \int_0^y \frac{\varphi(v)}{\sqrt{2g(y-v)}} dv\,. \tag{6.182}$$

Por conveniencia hemos denotado por $\varphi(v)$ a la función que nos da el valor de la derivada de $s(v)$:

$$\varphi(v) = s'(v) = \frac{ds}{dv} = \frac{\sqrt{(dv)^2 + (du)^2}}{dv} = \sqrt{1 + (du/dv)^2}\,. \tag{6.183}$$

Si conocemos la forma $y(x)$ del alambre, la ecuación (6.183) nos permite hallar la función φ pues

$$\varphi(y) = \sqrt{1 + (dx/dy)^2},$$

y entonces, mediante (6.182), calcularíamos el tiempo de descenso. El problema mecánico de Abel es el problema *inverso*: se pide hallar la forma del alambre $y(x)$ que conduce a una determinada dependencia del tiempo de descenso con la altura inicial, es decir, a una determinada función $T(y)$.
Supongamos que estamos interesados en conocer cuál es la forma de la curva $y(x)$ que conduce a que el tiempo de descenso sea el mismo sea cual sea la altura inicial, es decir, la curva para la cual $T(y) = T_0$ donde T_0 es constante. A la curva que posee esta propiedad se la llama tautócrona. En este caso, la solución de (6.182) es, según (6.177),

$$\varphi(y) = \frac{T_0}{\pi}\sqrt{\frac{2g}{y}} = \sqrt{\frac{2a}{y}} \tag{6.184}$$

donde

$$a = \frac{T_0^2 g}{\pi^2}\,. \tag{6.185}$$

Resulta más conveniente expresar la curva $y(x)$ en forma paramétrica

$$x = \psi_1(\theta)\,,$$
$$y = \psi_2(\theta)\,,$$

donde θ es el ángulo que forma la tangente de la curva $y(x)$ con el eje de abcisas (véase la figura 6.1). Nótese que

$$\operatorname{sen}\theta = dv/ds\,,$$

de modo que

$$\varphi(v) = s'(v) = 1/\operatorname{sen}\theta. \tag{6.186}$$

Por tanto

$$y = \varphi^{-1}(1/\operatorname{sen}\theta) \equiv \psi_1(\theta) \tag{6.187}$$

y

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\tan\theta} = \frac{\psi_1'(\theta)}{\tan\theta}\, d\theta \tag{6.188}$$

es decir

$$x = \int \frac{\psi_1'(\theta)}{\tan\theta}\, d\theta = \psi_2(\theta). \tag{6.189}$$

De las ecuaciones (6.184) y (6.186) se deduce que

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{y}{2a}} \tag{6.190}$$

y por tanto

$$y = 2a\operatorname{sen}^2\theta = a(1 - \cos 2\theta)\,. \tag{6.191}$$

Pero $dy = 4a\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta$ y por consiguiente

$$dx = \frac{dy}{\tan\theta} = 4a\cos^2\theta d\theta = 2a(1 + \cos 2\theta)d\theta, \tag{6.192}$$

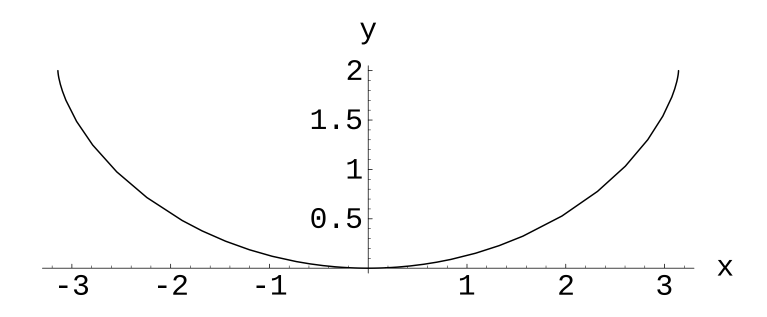


Figura 6.2: Cicloide para $a = 1$ con $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

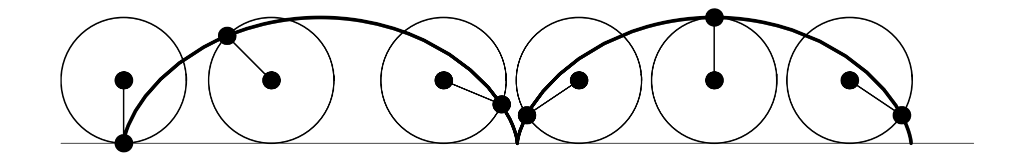


Figura 6.3: Generación de una cicloide por un punto situado sobre una circunferencia que rueda sobre una línea horizontal.

es decir,

$$x = 2a(\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta) + C\,. \tag{6.193}$$

Pero la curva ha de pasar por el origen $(0,0)$, luego, por (6.191), debe ocurrir que $\theta = 0$ (la otra posibilidad, $\theta = \pi$, conduce a la misma curva), por lo que la constante de integración es cero $C = 0$. En definitiva la tautócrona viene dada por

$$x = a(2\theta + \operatorname{sen} 2\theta), \tag{6.194}$$

$$y = a(1 - \cos 2\theta), \tag{6.195}$$

que son justamente las ecuaciones paramétricas de una cicloide[12] (véase la figura 6.2). Esta curva es la generada por un punto situado sobre una circunferencia de radio a que rueda por una línea horizontal (véase la figura 6.3). Como $a = gT_0^2/\pi^2$, el radio de esta circunferencia viene determinado por el tiempo de descenso T_0 escogido.

★ *La tautócrona, el oscilador armónico y potenciales tatutócronos*

La propiedad que exhibe la tautócrona de que el tiempo que tarda el abalorio en llegar al origen es independiente de su posición inicial es completamente similar a la que posee el oscilador armónico consistente en que su periodo es independiente de su amplitud inicial. Esta similitud no es casual. No es difícil ver que en la tautócrona la fuerza ejercida por la gravedad sobre el abalorio en la dirección tangencial al alambre (es decir, la fuerza paralela al alambre) es proporcional a la distancia a lo largo del alambre entre la posición del abalorio y el origen $(0,0)$. Es decir, si nos situamos sobre el alambre, la fuerza que experimenta el abalorio (y, por tanto su movimiento correspondiente) a lo largo del alambre es ¡idéntica a la de un oscilador lineal!

Comprobemos que para la tautócrona la fuerza $f(y)$ a lo largo del alambre es proprocional a la distancia $s(y)$ entre el punto (x,y) y el origen $(0,0)$. Por un lado $f(y) = mg\operatorname{sen}\theta \propto \sqrt{y}$, donde hemos hecho uso de

[12] Fue Huygens quien primero descubrió que la cicloide es tautócrona. Publicó este resultado en *Horologium oscillatorium* (1673). La cicloide es también braquistócrona, es decir, es la forma que ha de tener el alambre que une dos puntos para que el tiempo que tarda una cuenta de pasar de uno a otro sea mínimo. Se recomienda leer/disfrutar la sección de [Sim93] dedicada al problema de la braquistócrona.

la relación (6.190). Además

$$s(y) = \int_0^y s'(v)dv = \int_0^y \frac{dv}{\operatorname{sen}\theta} = \int_0^y \sqrt{\frac{2a}{v}}dv \propto \sqrt{y}$$

Por tanto descubrimos que, tal como anunciamos, $f(s) \propto s$, lo que es característico de un oscilador lineal (armónico).

Lo que acabamos de discutir sugiere un modo muy sencillo de construir “potenciales tautócronos” para una curva dada, es decir, potenciales que hagan que el abalorio que se desliza por la curva llegue al origen en un tiempo que sea independiente de su posición de partida. Veámoslo. Sea una curva cualquiera $y(x)$, con su correspondiente función distancia a lo largo de la curva $s(x, y) = s(x(y), y) = s(y)$. El potencial tautócrono es simplemente $V(s) \propto s^2$, es decir, $V(y) = V(s(y)) = s^2(y)$. Por ejemplo, ¿cuál es el potencial tautócrono correspondiente a una línea recta? En este caso $y \propto x$ y, obviamente, $s \propto x \propto y$, por lo que este potencial es[13] $V(y) \propto y^2$. Esta idea de resolver el problema en sentido opuesto al habitual (es decir, la idea de hallar el potencial tautócrono correspondiente a una curva dada) fue sugerida y desarrollada por E. Flores y T. J. Osler en el artículo *The Tautochrone Under Arbitrary Potentials Using Fractional Derivatives* [Am. J. Phys., 67 (1999) págs. 718-722]. En este artículo puedes encontrar más ejemplos de potenciales tautócronos de curvas $y(x)$ sencillas.

Vamos a terminar dando una expresión que permite calcular la curva tautócrona $x(y)$ correspondiente a un potencial $V(y)$ dado. Sabemos que sobre la tautócrona se verifica

$$V(s) = \frac{\pi^2}{8T^2}s^2 \tag{6.196}$$

pues para este potencial la solución del oscilador lineal

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{dV}{ds} = -\frac{\pi^2}{4T^2}s \equiv \omega^2 s$$

tiene por solución a

$$s = s(0)\cos(\omega t) = s(0)\cos\left(\frac{\pi}{2T}t\right)$$

cuyo periodo es $\tau = 2\pi/\omega = 4T$. Por tanto, tal como debe ser, T no es más que la cuarta parte del periodo, es decir, el tiempo que tarda el abalorio en pasar por el origen $s = 0$ desde su posición de partida $s(0)$. Si ahora derivamos (6.196) con respecto a y se obtiene

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{2}T}{\pi\sqrt{V(y)}}\frac{dV}{dy}.$$

Insertando $ds/dy = \sqrt{1 + (dx/dy)^2}$ en esta expresión se encuentra:

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{2T^2}{\pi^2}\frac{V'(y)}{V(y)}$$

donde $V'(y) \equiv dV/dy$. Es decir

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2T^2}{\pi^2}\frac{V'(y)}{V(y)} - 1}$$

y, por tanto,

$$x(y) = \int_0^y \sqrt{\frac{2T^2}{\pi^2}\frac{V'(z)}{V(z)} - 1}\, dz.$$

◀

[13]De forma más precisa: si la curva es $y = x/a$, entonces el potencial tautócrono es $\pi^2(1 + a^2)y^2/(8T^2)$.

6.11. Resolución numérica

En principio, es relativamente sencillo resolver ecuaciones integrales numéricamente mediante un ordenador, aunque pueden presentarse casos difíciles que no trataremos aquí (véase, por ejemplo, [PFT93, capítulo 18]). Para entender el procedimiento básico hemos de recordar primero cómo se calcula numéricamente una integral. Esto se discutió con detalle en la sección 4.3.2 (página 214 y siguientes). Vimos entonces que la integración numérica consiste en reemplazar la integral por una suma, ponderada por los pesos W_i, de la función a integrar $\varphi(x)$ evaluada en ciertos puntos x_i del intervalo de integración convenientemente escogidos:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} W_i \varphi(x_i). \tag{6.197}$$

Los valores de x_i y W_i son característicos de cada método de integración.

Ecuación de Fredholm de segunda especie no homogénea

Introducimos la relación (6.197) en la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\,\varphi(y),$$

es decir, hacemos la aproximación

$$\int_a^b dy\, k(x,y)\,\varphi(y) \simeq \sum_{j=0}^{n} W_j\, k(x,y_j)\,\varphi(y_j)$$

de modo que la ecuación integral en el punto x_i

$$\varphi(x_i) = g(x_i) + \lambda \int_a^b dy\, k(x_i,y)\,\varphi(y), \tag{6.198}$$

se *aproxima* por

$$\varphi(x_i) = g(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^{n} W_j\, k(x_i,y_j)\,\varphi(y_j), \tag{6.199}$$

con $i = 0, 2, 3, \ldots, n$. Escogiendo $x_i = y_i$, la ecuación (6.199) anterior se reduce al sistema algebraico

$$\varphi(x_i) = g(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^{n} W_j\, k(x_i,x_j)\,\varphi(x_j), \quad i = 0, 2, 3, \ldots, n \tag{6.200}$$

que es un sistema lineal de $n+1$ ecuaciones y $n+1$ incógnitas, $\varphi(x_i)$, que podemos resolver por los procedimientos usuales.

Es cómodo usar notación matricial y escribir $\Phi_i = \varphi(x_i)$, $G_i = g(x_i)$ y $M_{ij} = W_j\, k(x_i,y_j)$. De este modo la ecuación (6.199) se reduce a

$$\Phi_i = G_i + \lambda \sum_{j=0}^{n} M_{ij}\Phi_j \Longleftrightarrow \bar{\Phi} = \bar{G} + \lambda\, \bar{\bar{M}}\, \bar{\Phi}\,, \tag{6.201}$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\bar{\Phi} = (\bar{\bar{1}} - \lambda\, \bar{\bar{M}})^{-1} \bar{G}\,. \tag{6.202}$$

Es relativamente fácil invertir matrices numéricamente mediante un ordenador. La precisión de la solución obtenida puede comprobarse incrementando el número de puntos x_i de integración y viendo si la solución no cambia "apreciablemente" (dentro de lo que estemos dispuestos a tolerar) con respecto a la solución anterior.

★ *Observaciones*

En la práctica podemos encontrarnos que la matriz $\bar{\bar{1}} - \lambda\,\bar{\bar{M}}$ no es adecuada con respecto a la inversión [PFT93]. Esto se debe a que, al invertir la matriz, pequeños errores numéricos pueden multiplicarse por factores muy grandes, de modo que todas o casi todas las cifras significativas del cómputo numérico de la matriz inversa de $\bar{\bar{1}} - \lambda\,\bar{\bar{M}}$ pueden perderse dando lugar a que el uso de (6.202) nos lleve a resultados incorrectos para $\bar{\Phi}$. Cuando esto sucede se dice que el problema está "mal condicionado". Esto no debería extrañarnos completamente pues la integración es esencialmente una operación de suavizado, de modo que la función

$$g(x) + \lambda \int_a^b dy\, k(x,y)\, \varphi(y)$$

es poco sensible a variaciones locales de $\varphi(x)$. Es de esperar, por consiguiente, que $\varphi(x)$ sea muy sensible a pequeños cambios de $g(x)$, de modo que pequeños errores en $g(x)$ y/o en $\bar{\bar{1}} - \lambda\,\bar{\bar{M}}$ se magnifican, y la precisión desaparece (puede verse una discusión más detallada de estas cuestiones en [Jer99, sección 5.4.2]).

Estos problemas son especialmente habituales en las ecuaciones integrales de Fredholm de primera especie. En este caso la ecuación (6.201) se convierte en $0 = \lambda\bar{\bar{M}}\bar{\Phi}$, cuya solución es

$$\bar{\Phi} = -\frac{1}{\lambda}\, \bar{\bar{M}}^{-1}\, \bar{G}$$

Esta solución numérica está muy bien... siempre que $\bar{\bar{M}}$ sea invertible lo cual "is as often the exception as the rule"[14] [PFT93].

Ecuación homogénea de Fredholm de segunda especie: autovalores y autofunciones

La ecuación integral de Fredholm homogénea discretizada viene dada por

$$\Phi_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} M_{ij}\Phi_j,$$

o, en notación matricial,

$$\bar{\Phi} = \lambda\,\bar{\bar{M}}\,\bar{\Phi} \Longrightarrow [\bar{\bar{1}} - \lambda\,\bar{\bar{M}}]\,\bar{\Phi} = 0\,. \tag{6.203}$$

Los autovalores son lo valores de λ para los cuales este sistema tiene solución no nula, es decir, los valores de λ que son solución de la ecuación característica

$$\mathrm{Det}(\bar{\bar{1}} - \lambda\,\bar{\bar{M}}) = 0.$$

Es muy fácil hallar mediante un ordenador las raíces de esta ecuación. De hecho, el cálculo numérico de los autovectores $\bar{\Phi}$ y autovalores λ del sistema algebraico (6.203) es una tarea corriente en computación científica existiendo excelentes programas para ello.

[14] "es tan a menudo la excepción como la regla"

▷ ***Ejercicio*** *6.8*

Nada hemos dicho de cómo calcular numéricamente soluciones aproximadas de ecuaciones de Volterra. Sucede que, de hecho, es en principio más fácil resolver numéricamente las ecuaciones de Volterra que las ecuaciones de Fredholm. La ecuación de Volterra en el punto x_i *viene dada por*

$$\varphi(x_i) = g(x_i) + \lambda \int_a^{x_i} dy\, k(x_i, y)\, \varphi(y)\,. \tag{6.204}$$

En este ejercicio se pide razonar como en las ecuaciones (6.198), (6.199) *y* (6.200) *para demostrar que* (6.204) *se puede aproximar por*

$$\varphi(x_i) \simeq g(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^{i} W_j\, k(x_i, x_j)\, \varphi(x_j) \tag{6.205}$$

con $i = 0, 2, 3, \ldots, n$ *[por supuesto,* $\varphi(x_0) = g(x_0)$ *si* $x_0 = a$*]. Observa que este es un sistema triangular que se resuelve trivialmente por sustitución directa:* $\varphi(x_1)$ *se obtiene a partir de* $\varphi(x_0)$*;* $\varphi(x_2)$ *se obtiene a partir de* $\varphi(x_0)$ *y* $\varphi(x_1)$*, etc.*

6.12. Problemas

6.1. Resuelve las ecuaciones integrales siguientes:

$$\begin{aligned} a) \qquad \varphi(x) &= \mathrm{e}^x + \lambda \int_0^1 dy\, 2\, \mathrm{e}^{x+y}\, \varphi(y), \\ b) \qquad \varphi(x) &= \mathrm{e}^{-x} - 2 \int_0^1 dy\, x\, \mathrm{e}^y\, \varphi(y), \\ c) \qquad \varphi(x) &= \mathrm{e}^x + \lambda \int_0^1 dy\, x\, y\, \varphi(y)\,. \end{aligned}$$

6.2. Halla los valores propios y las funciones propias de las ecuaciones integrales:

$$\begin{aligned} a) \qquad \varphi(x) &= \lambda \int_0^\pi dy\, \mathrm{sen}(x-y)\varphi(y), \\ b) \qquad \varphi(x) &= \lambda \int_0^\pi dy\, \left(\cos^2 x \cos 2y + \cos 3x \cos^3 y\right) \varphi(y). \end{aligned}$$

6.3. *a*) Encuentra los autovalores y las autofunciones de la ecuación integral:

$$\varphi(x) = \lambda\, x \int_{-1}^1 dy\, y\, (x-y)^2 \varphi(y)\ .$$

b) Dada la siguiente ecuación integral no homogénea:

$$\varphi(x) = g(x) - \frac{5}{4}\, x \int_{-1}^1 dy\, y\, (x-y)^2 \varphi(y)\ ,$$

halla su solución utilizando el apartado anterior, o explica su ausencia, si (i) $g(x) = x^2$ y (ii) $g(x) = x$.

6.4. Resuelve el problema de autovalores de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 dy\ \mathrm{e}^{x-y}\ \varphi(y)$$

con $g(x) = 0$. Halla la solución de la ecuación si $g(x) = \mathrm{e}^x$.

6.5. Halla los autovalores y autofunciones de la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\pi dy\ k(x,y)\, \varphi(y)$$

donde

$$k(x,y) = \begin{cases} \cos(x)\, \mathrm{sen}(y), & 0 \le x \le y, \\ \cos(y)\, \mathrm{sen}(x), & y \le x \le \pi. \end{cases}$$

6.6. Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 dy\, (x+y)\, y\, \varphi(y)$$

obteniendo los términos hasta orden λ^2 mediante los métodos de (a) Neumann y (b) Fredholm. Finalmente, resuelve la ecuación integral de forma exacta.

6.7. Halla, mediante los determinantes de Fredholm, el núcleo resolvente de $k(x,y) = x\,\mathrm{e}^y$.

6.8. Sea la ecuación integral de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 dy\, k(x,y)\,\varphi(y) = 0$$

con núcleo

$$k(x,y) = \begin{cases} (1-x)y & 0 \le y \le x \le 1\,, \\ x(1-y) & 0 \le x \le y \le 1\,. \end{cases}$$

a) Halla los autovalores y las autofunciones del problema homogéneo correspondiente.

b) Determina la solución del problema inhomogéneo si $\lambda = 1$ y $\varphi(x) = x$.

6.9. Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) = 1 - \int_0^\pi k(x,y)\,\varphi(y)\,dy$$

donde

$$k(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x)\cos(y), & x \le y\,, \\ \operatorname{sen}(y)\cos(x), & y \le x\,. \end{cases}$$

6.10. Resuelve la ecuación integral

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi dy \cos(x+y)\,\varphi(y) = \cos 3x$$

para todos los posibles valores de λ. Interpreta los resultados mediante el teorema de la alternativa de Fredholm.

6.11. Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones integrales:

$$a) \qquad \varphi(x) = \mathrm{e}^{x^2} + \int_0^x dy\ \mathrm{e}^{x^2-y^2}\ \varphi(y)\,,$$

$$b) \qquad \varphi(x) = \operatorname{sen} x + 2\int_0^x dy\ \cos(x-y)\,\varphi(y)\,.$$

6.12. Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_{-1}^1 x(x-y)\varphi(y)dy\,.$$

6.13. Halla todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = x^3 - x + \lambda \int_{-1}^1 dy\ \left(x^2 - 2xy\right)\ \varphi(y)\,.$$

6.14. Encuentra todas las soluciones posibles de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 \operatorname{sen}(\ln x)\,\varphi(y)\,dy$$

cuando (a) $g(x) = 0$, (b) $g(x) = 2x$, y (c) $g(x) = x - 1/2$. Explica los resultados teniendo en cuenta el teorema de la alternativa de Fredholm.
Nota: $\int_0^1 \operatorname{sen}(\ln x)dx = -1/2$.

6.15. Encuentra las soluciones (si existen) de la ecuación integral

$$\varphi(x) = g(x) + \lambda \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x+y)\, \varphi(y)\, dy.$$

con

a) $g(x) = 0$ (problema de autofunciones y autovalores).

b) $\lambda = 1$ y $g(x) = x$,

c) $\lambda = 1/\pi$ y $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$,

d) $\lambda = 1/\pi$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

6.16. Halla la solución de la ecuación integral

$$\int_0^x \cos(x-y)\, \varphi(y)\, dy = x$$

mediante el método de la transformada de Laplace.

6.17. Halla en la forma de desarrollo en autofunciones la solución de la ecuación integral

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 dy\, K(x,y)\, \varphi(y) = x,$$

donde

$$K(x,y) = \begin{cases} x(y-1), & 0 \le x \le y\,, \\ y(x-1), & y \le x \le 1\,. \end{cases}$$

6.18. Sea una partícula de masa m con energía total E sometida a un potencial $V(x)$ y que se mueve de forma periódica entre los puntos x_1 y x_2 [por tanto $V(x_1) = V(x_2) = E$].[15] Demuestra que el periodo de oscilación $T(E)$ viene dado por

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}\,.$$

Supongamos que el potencial es simétrico $V(x) = V(-x)$ y que tomamos como origen de energía el mínimo de $V(x)$, es decir, tomamos $V(0) = 0$. Demuestra que en este caso

$$\tau(E) \equiv \frac{T(E)}{\sqrt{2m}} = \int_0^E \frac{(dx/dV)dV\,.}{\sqrt{E-V}}$$

Queremos ahora resolver el problema *inverso* consistente en deducir la forma del potencial $V(x)$ si conocemos el periodo de oscilación en función de la energía, $T(E)$. Esto equivale a resolver la ecuación integral de Abel anterior. Demuestra que la solución de esta ecuación integral es

$$x(V) = \frac{1}{\pi} \int_0^V \frac{\tau(E)}{\sqrt{V-E}}\, dE\,.$$

El potencial buscado se halla invirtiendo $x(V)$. Por ejemplo, demuestra que si el periodo no depende de la energía total, $T(E) = T_0 = \text{const}$, entonces $x(V) \sim V^{1/2}$, lo que implica $V(x) \sim x^2$. Por último, demuestra que el potencial $V(x)$ es proporcional a x^4 si $T(E) \sim E^{-1/4}$.

[15] Puedes ver más detalles sobre este problema en el artículo de A. H . Carter *A class of inverse problems in physics* (Am. J. Phys. **68** (8) 698, Agosto 2000).

Capítulo 7

Desarrollo asintótico de integrales

7.1. Introducción

En ocasiones, las soluciones matemáticas de ciertos problemas no pueden darse en forma cerrada mediante funciones elementales y hay que dejarlas expresadas en términos de relaciones que involucran a integrales. En estos casos se dice que la solución se ha dado mediante una representación integral. Esto es bastante habitual cuando se resuelven ecuaciones diferenciales mediante transformadas integrales. Además, muchas funciones especiales tienen representación integral y muchas de sus propiedades se deducen directamente a través de esta representación. En este tema vamos a discutir algunos procedimientos para hallar *aproximaciones* analíticas de estas integrales.

Para motivar el tema damos a continuación un par de ejemplos de problemas cuya solución final viene dada en términos de integrales que no pueden ser expresadas mediante funciones elementales.

▶ *Ejemplo 7.1*

Queremos hallar la solución de la ecuación diferencial de primer orden

$$y' + y = \frac{1}{x}. \tag{7.1}$$

Para ello multiplicamos por el factor integrante e^x:

$$\mathrm{e}^x\, y' + \mathrm{e}^x\, y = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^x\, y) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

Integrando esta expresión entre un valor dado x_0 fijo y x se obtiene

$$\mathrm{e}^x\, y(x) - \mathrm{e}^{x_0}\, y(x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt \quad \Rightarrow \quad y(x) = \mathrm{e}^{x_0 - x}\, y(x_0) + \mathrm{e}^{-x} \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt.$$

Ésta es por tanto la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial (7.1) cuyo valor en x_0 es $y(x_0)$. Resulta que esta solución *no* puede expresarse en términos de funciones elementales. De hecho

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt = \mathrm{Ei}(x) - \mathrm{Ei}(x_0)$$

donde $\mathrm{Ei}(x)$ es una función especial definida mediante la *integral* [AS72, capítulo 5]:

$$\mathrm{Ei}(x) = \mathrm{VP} \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{t}}{t}\, dt = -\mathrm{VP} \int_{-x}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\, dt, \qquad x > 0.$$

El símbolo VP significa valor principal de Cauchy.[1]

◀

▶ Ejemplo 7.2

Queremos resolver el llamado problema del atrapamiento ("trapping problem") en una dimensión. Veamos en qué consiste. Sea una línea en la que se sitúan trampas al azar con concentración λ (es decir, en promedio, λ trampas por unidad de longitud). Nos preguntamos cuál será la probabilidad de supervivencia $S(t)$ (probabilidad de no haber sido atrapada hasta el instante t) de una partícula que se coloca al azar sobre la línea y que se difunde libremente hasta que se encuentra con una de las trampas. Para responder a esta pregunta empezamos calculando la probabilidad $p(x,t)dx$ de encontrar la partícula entre x y $x+dx$ en el instante t cuando la partícula parte inicialmente (en $t=0$) de la posición $0 < x_0 < L$ y hay dos trampas situadas en 0 y L. La distribución de probabilidad $p(x,t)$ es simplemente la solución de la ecuación de difusión

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\, \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

junto con las condiciones de contorno $p(0,t) = p(L,t) = 0$ y la condición inicial $p(x,0) = \delta(x - x_0)$. La solución de este problema es fácil de hallar mediante separación de variables:

$$p(x,t;x_0) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2} Dt\right).$$

La probabilidad de supervivencia de una partícula que cae al azar sobre cualquier posición de este intervalo $[0,L]$ es por tanto

$$S_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^L p(x,t;x_0)\, dx\, dx_0 = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\; \mathrm{e}^{-(2n+1)^2\pi^2 Dt/L^2}.$$

Pero si las trampas se disponen al azar, el tamaño de la región libre de trampas en la que cae la partícula puede ser cualquiera (desde cero hasta infinito). La probabilidad $\eta(L)dL$ de que la partícula se sitúe sobre un intervalo de tamaño comprendido entre L y $L+dL$ es[2] $\eta(L)dL = \lambda^2 L\, \mathrm{e}^{-\lambda L}\, dL$. Por tanto, la probabilidad de supervivencia que buscamos es

$$S(t) = \langle S_L(t) \rangle = \int_0^{\infty} \lambda^2 L\, \mathrm{e}^{-\lambda L}\, S_L(t) dL$$

es decir

$$S(t) = \frac{8\lambda^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \int_0^{\infty} L\, \mathrm{e}^{-(2n+1)^2\pi^2 Dt/L^2}\, \mathrm{e}^{-\lambda L}\, dL.$$

Vemos que el cálculo de $S(t)$ requiere evaluar integrales de la forma

$$I = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\beta/L^2 - \lambda L}\, dL.$$

Estas integrales no tienen solución conocida y para su estimación ha de recurrirse a técnicas de desarrollo asintótico de integrales tales como las que se discutirán en este capítulo. Por ejemplo, para $\beta \gg 1$ esta

---

[1] $\mathrm{VP} \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt = \lim_{\delta\to 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt + \int_{\delta}^{x} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt \right\}$ con $\delta > 0$.

[2] Véase la sección 5.7.a de G. H. Weiss, *Aspects and applications of the random walk* (North-Holland, Amsterdam, 1994).

integral puede estimarse mediante la técnica de la integral de Laplace con máximo no fijo que se discute en la sección 7.9.3 de la página 437. El resultado es

$$I \sim \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(L_m)|}}\, \mathrm{e}^{\lambda f(L_m)}$$

donde $L_m = (2\beta/\lambda)^{1/3}$ y $f(L) = -\beta/L^2 - \lambda L$. Como $f(L_m) = -3(\lambda/2)^{2/3}\beta^{1/3}$ y $\beta \propto t$ se obtiene la expresión asintótica

$$\ln S(t) \sim t^{1/3} \quad \text{para} \quad t \to \infty.$$

Este resultado es el caso particular para medio unidimensional ($d = 1$) de la llamada aproximación de Donsker y Varadham:

$$\ln S(t) \sim t^{d/(d+1)} \quad \text{para} \quad t \to \infty,$$

donde d es la dimensión del medio que se dopa con trampas al azar. El significado matemático exacto del símbolo $\sim$) se discute en la sección 7.3, página 407.

◀

En este tema estudiaremos varios métodos para calcular expresiones aproximadas de integrales. Se verá que en muchas ocasiones estas expresiones toman la forma de serie asintótica. Antes de discutir cómo hallar estas aproximaciones, se dará una pequeña introducción a las series asintóticas. Pero antes repasaremos algunos resultados sobre series "corrientes", series no asintóticas.

7.2. Resultados útiles sobre series

Empecemos recordando las definiciones de convergencia y convergencia uniforme.

- Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge a $u(x)$ y se escribe así

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \to u(x) \tag{7.2}$$

  o bien, de forma más simple, así

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x), \tag{7.3}$$

  si para todo $\epsilon > 0$ existe un número m (que dependerá del valor de ϵ y de x) tal que

$$\left| u(x) - \sum_{n=1}^{m} u_n(x) \right| < \epsilon.$$

- Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformemente a $u(x)$ en el intervalo X, y lo denotaremos así

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \underset{X}{\rightrightarrows} u(x)\,, \tag{7.4}$$

  si para todo $\epsilon > 0$ existe un número m_ϵ (que depende de ϵ pero *no* de x) tal que

$$\left| u(x) - \sum_{n=1}^{m_\epsilon} u_n(x) \right| < \epsilon \quad \forall x \in X.$$

  No obstante, habitualmente escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$ sin más especificaciones incluso cuando la convergencia de la serie sea uniformemente convergente. Sólo nos preocuparemos de estos "matices" cuando sea estrictamente necesario.

A continuación enunciamos sin demostración unos cuantos resultados útiles sobre series numéricas y de funciones.

Teorema 7.1 *La serie*[3] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *converge si* $\alpha>1$ *y diverge si* $\alpha\le 1$.

Teorema 7.2 (Criterio de D'Alembert) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *con* $a_n>0$ *converge si*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$$

y diverge si

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1.$$

Teorema 7.3 (de Weierstrass) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ *converge uniformemente a* $u(x)$ *sobre* $x\in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}u(x),$$

si $|u_n(x)|\le M_n$ *y la serie numérica* $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ *converge.*

Esto es también conocido como teorema M de Weierstrass, o test M de Weierstrass.

Sea $r_n(x)$, o resto n-ésimo, la función definida por $r_n(x)=u(x)-\sum_{m=1}^{n}u_m(x)$ y sea $\sup_{x\in X}|r_n(x)|$ el valor superior (el más grande) de $|r_n(x)|$ cuando x recorre todos los valores del intervalo X. El siguiente teorema lo formularemos en términos de estas definiciones.

Teorema 7.4 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ *converge uniformemente a* $u(x)$ *sobre* $x\in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}u(x),$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}|r_n(x)|=0.$$

Teorema 7.5 (Integración término a término de laserie) *Sea* $u_n(x)$ *un conjunto de funciones continuas en el intervalo* $X=[a,b]$, *que cumplen que* $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\underset{X}{\rightrightarrows}u(x)$, *entonces se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt\underset{X}{\rightrightarrows}\int_c^x u(t)\,dt\quad\forall c,x\in X=[a,b].$$

El resultado del teorema anterior se suele escribir simplemente así:

$$\int_c^x u(t)\,dt=\int_c^x\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt,\quad\forall c,x\in[a,b]$$

es decir, una serie uniformemente convergente se puede integrar término a término (podemos intercambiar la posición de la integral y el sumatorio) dentro de su intervalo de convergencia uniforme.

[3]Esta serie, cuando $\mathrm{Re}(\alpha)>1$, es la función zeta de Riemann [AS72]: $\zeta(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\alpha}$. Esta función tiene la fantástica y sugerente propiedad de que $\zeta(\alpha)=\prod_p(1-p^{-\alpha})^{-1}$ donde el producto se efectúa sobre todos los números primos p (!!!). A la serie $\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ se la conoce como serie armónica.

Teorema 7.6 (Convergencia uniforme de una serie de potencias) *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una serie de potencias convergente para* $|x| \leq R$ *(R es llamado radio de convergencia de la serie). Entonces sucede que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightrightarrows f(x) \quad \textit{para } |x| \leq r < R.$$

Teorema 7.7 (Criterio de D'Alembert) *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *una serie de potencias para la que el límite* $\lim_{n\to\infty} a_n/a_{n+1}$ *existe. Entonces el radio de convergencia de la serie anterior viene dado por*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

7.3. Comparación de funciones. Símbolos $O, o, \sim$

A menudo es conveniente expresar cual es la magnitud relativa de una función frente a otra en las vecindades de algún punto. Esto se hace mediante los símbolos O y o, a veces conocidos como símbolos de Landau.

- Escribiremos

$$f(x) = O(g(x)) \text{ para } x \to x_0 \tag{7.5}$$

si se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \text{ con } 0 < |A| < \infty. \tag{7.6}$$

En este caso diremos que la función $f(x)$ es de *orden* $g(x)$ cuando x se acerca a x_0, o bien que $f(x)$ y $g(x)$ son *comparables* en x_0.

▶ *Ejemplo 7.3*

Veamos unos cuantos ejemplos:

- $\cos x = O(1)$ para $x \to 0$ pues

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

- $\cos x - 1 = O(x^2)$ para $x \to 0$ pues

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

- $\operatorname{senh} x = O(\mathrm{e}^x)$ para $x \to \infty$ pues

$$\operatorname{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{2}.$$

◀

- Escribiremos

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{para} \quad x \to x_0 \tag{7.7}$$

si se verifica que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{7.8}$$

En estos casos diremos que la función $f(x)$ es de *orden menor* que $g(x)$ cuando x se acerca a x_0, o bien que $g(x)$ es una función *dominante* sobre $f(x)$ en x_0, o bien que $f(x)$ es *subdominante* con respecto a $g(x)$ en x_0.

▶ *Ejemplo 7.4*

He aquí un par de ejemplos del uso de esta notación:

- $\cos x = o(1/x) = o(1/x^2) = o(\mathrm{e}^{1/x})$ para $x \to 0$.
- $\operatorname{sen} x = o(1)$ para $x \to 0$.

◀

Otra notación también empleada (aunque no se usará en este libro) para expresar que dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ se relacionan como en la ecuación (7.8) es $f(x) \ll g(x)$ para $x \to x_0$. Esta notación es formalmente idéntica a la que en ocasiones hemos empleado para indicar (de forma cualitativa y poco rigurosa) que una cantidad a es mucho más pequeña que otra b, $a \ll b$, de modo que b/a sería un número (en valor absoluto) muy "grande".

- Escribiremos

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{para} \quad x \to x_0 \quad \text{si} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{7.9}$$

En este caso decimos que $f(x)$ tiende asintóticamente a $g(x)$ cuando x tiende x_0. La afirmación $f(x) \sim g(x)$ para $x \to x_0$ es más precisa (da más información) que $f(x) = O(g(x))$ para $x \to x_0$ pues, aunque ambas expresiones nos informan de que la siguiente relación se satisface

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

la expresión $f(x) \sim g(x)$ para $x \to x_0$ nos dice de que la constante A vale 1, mientras que $f(x) = O(g(x))$ no nos dice nada sobre el valor que toma A.

▶ *Ejemplo 7.5*

Veamos unos cuantos ejemplos del uso de esta notación:

- $x^{1/2} \sim 2$ para $x \to 4$.
- $\mathrm{e}^x + x \sim \mathrm{e}^x$ para $x \to \infty$.
- La expresión $x^2 \sim x$ para $x \to 0$ es falsa pues $\lim_{x\to 0} x^2/x = 0$.
- La expresión $x^2 \sim 0$ para $x \to 0$ es falsa pues $\lim_{x\to 0} x^3/0$ no existe.

◀

7.4. Series asintóticas

7.4.1. Definición de serie asintótica

Llamaremos diferencia N-ésima (o resto N-ésimo) entre la función $f(x)$ y la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ a la función $r_N(x)$ definida por

$$r_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\,(x-x_0)^n. \tag{7.10}$$

Serie convergente. La definición de serie convergente puede reescribirse en términos de la función diferencia $r_N(x)$ de la siguiente manera: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ converge a $f(x)$ si

$$r_N(x) \to 0 \text{ para } N \to \infty \text{ y un } x \text{ fijo.}$$

En este caso escribimos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

y por tanto

$$r_N(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Serie asintótica. Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ converge asintóticamente (o es asintótica) a $f(x)$ para $x \to x_0$, y lo denotaremos así:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n \quad \text{para } x \to x_0, \tag{7.11}$$

si se verifica que

$$r_N(x) = o[(x-x_0)^N] \text{ para } x \to x_0 \text{ y un } N \text{ fijo.}$$

Es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ es asintótica a $f(x)$ en x_0 si la diferencia $r_N(x)$ va a cero más rápido que $(x-x_0)^N$ cuando $x \to x_0$. En muchas ocasiones escribiremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\,(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^N]. \tag{7.12}$$

Punto x_0 en el infinito. Decimos que $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ para $x \to \infty$ si $r_N(x) = o[x^{-N}]$ para $x \to \infty$ y N fijo. En ocasiones escribiremos

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n\,x^{-n} + o(x^{-N}). \tag{7.13}$$

Esta definición es la misma que para x_0 finito si expresamos $f(x)$ en serie de potencias de $y = 1/x$ en torno a $y = 0$.

Lema 7.1 (Definición alternativa de serie de potencias asintótica) *La serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$$

es asintótica a f(x) cuando $x \to x_0$ si y sólo si $r_N(x) = O[(x-x_0)^{N+1}]$ para $x \to x_0$.

Demostración.

- *Condición suficiente.* Si asumimos que $r_N(x) = O[(x-x_0)^{N+1}]$ entonces debe ocurrir que $r_N(x) = o[(x-x_0)^N]$ pues $O[(x-x_0)^{N+1}] = o[(x-x_0)^N]$.
- *Condición necesaria.* Si asumimos que $\sum_{n=0}^{N+1} a_n(x-x_0)^n$ tiende asintóticamente hacia $f(x)$ para $x \to x_0$, entonces, por definición de serie asintótica, $f(x) - \sum_{n=0}^{N+1} a_n(x-x_0)^n = o[(x-x_0)^{N+1}]$ para $x \to x_0$. Pero, dado que
$$\sum_{n=0}^{N+1} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n + a_{N+1}(x-x_0)^{N+1},$$
se tiene que
$$\begin{aligned} r_N(x) &= f(x) - \sum_{n=0}^{N+1} a_n(x-x_0)^n \\ &= a_{N+1}(x-x_0)^{N+1} + o[(x-x_0)^{N+1}] \\ &= O[(x-x_0)^{N+1}]. \end{aligned}$$

Nótese que hemos supuesto que $a_{N+1} \neq 0$.

7.4.2. Ejemplo de serie asintótica

Queremos conocer cómo se comporta la integral (o función) de Stieljes definida por
$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+x\,t}\,dt \tag{7.14}$$
para valores de x positivos y pequeños.

Vamos a proceder sin preocuparnos, de momento, por justificar los pasos que iremos dando. Empezamos desarrollando $(1+x\,t)^{-1}$ en serie de Taylor en torno a $t=0$,
$$(1+x\,t)^{-1} = 1 - x\,t + (x\,t)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n t^n. \tag{7.15}$$
Esta serie converge para $t < 1/x$, pero no para $t \geq 1/x$. Por tanto, la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,\mathrm{e}^{-t}\,t^n$$
no es uniformemente convergente en el intervalo $[0,\infty]$ de t, para un x dado distinto de cero. Luego la integración término a término no tiene ninguna garantía. No obstante, olvidémosnos de este hecho, hagámoslo y estudiemos la serie resultante:
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,n!\,x^n. \tag{7.16}$$
Esta serie es divergente para cualquier $x \neq 0$ pues su radio de convergencia es nulo:
$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\text{-simo coeficiente}}{(n+1)\text{-ésimo coeficiente}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}(n+1)!}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.17}$$

luego

$$f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, n! \, x^n \tag{7.18}$$

donde el símbolo $\neq$ lo usamos para indicar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \, n! \, x^n$ no converge a $f(x)$ (de hecho, la serie es, simplemente, no convergente). No obstante vamos a demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \, n! \, x^n$ es asintótica a (7.14) cuando $x \to 0^+$, es decir, que

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, n! \, x^n \quad \text{para} \quad x \to 0^+. \tag{7.19}$$

Motivados por la relación $1/(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, escribimos el integrando de (7.14) como suma de dos términos:

$$\frac{1}{1+x\,t} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \, n! \, x^n + \widehat{r}_N(t) = S_N(t) + \widehat{r}_N(t).$$

Pero $S_N(t)$ es la suma de una serie geométrica finita de razón $-x\,t$, luego

$$S_N(t) = \frac{1-(-x\,t)^{N+1}}{1-(-x\,t)}.$$

Entonces

$$\widehat{r}_N(t) = \frac{1}{1+x\,t} - \frac{1-(-x\,t)^{N+1}}{1-(-x\,t)} = \frac{(-x\,t)^{N+1}}{1+x\,t}.$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+x\,t}\, dt \\ &= \int_0^{\infty} S_N(t)\, dt + \int_0^{\infty} \widehat{r}_N(t)\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{N} (-1)\, x^n \int_0^{\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-t} \, dt + \int_0^{\infty} \frac{(-x\,t)^{N+1}}{1+x\,t}\, \mathrm{e}^{-t} \, dt \\ &= \sum_{n=0}^{N} (-1)\, n! \, x^n + r_N(x), \end{aligned} \tag{7.20}$$

donde

$$r_N(x) = (-x)^{N+1} \int_0^{\infty} \frac{t^{N+1}\, \mathrm{e}^{-t}}{1+x\,t}\, dt.$$

Ya vimos antes mediante el criterio de D'Alembert que la serie $\sum(-1)^n n! \, x^n$ no es convergente. Esto podemos comprobarlo de nuevo en términos de $r_N(x)$ pues $r_N(x) \to \infty$ para $N \to \infty$ con $x \neq 0$ fijado. En cambio la serie $\sum(-1)^n n! \, x^n$ sí es asintótica a $f(x)$ cuando $x \to 0^+$, dado que al ser x y t positivos se verifica que

$$\frac{1}{1+x\,t} < 1,$$

por lo que

$$|r_N(x)| < x^{N+1} \int_0^{\infty} t^{N+1} \, \mathrm{e}^{-t} \, dt = x^{N+1}(N+1)!$$

Por lo tanto $r_N(x) = O(x^{N+1}) = o(x^N)$ cuando $x \to 0^+$, es decir, $r_N(x)$ va a cero más rápidamente que x^N cuando $x \to 0$. Pero esta es precisamente la condición que nos define una serie asintótica a una función y por tanto podemos escribir

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+x\,t}\,dt \sim \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, n!\, x^n, \quad x \to 0^+,$$

o bien,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+x\,t}\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, n!\, x^n + o(x^N), \quad x \to 0^+ \\ &= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\, n!\, x^n + O(x^{N+1}), \quad x \to 0^+. \end{aligned}$$

7.4.3. Aproximaciones numéricas mediante series asintóticas. Regla del truncamiento óptimo

La utilidad de las series asintóticas se basa en el hecho de que el error cometido truncando la serie es del orden del primer término no considerado:

$$r_N(x) = o\left[(x-x_0)^N\right] = O\left[(x-x_0)^{N+1}\right] \qquad \text{para } x \to x_0 \text{ y } N \text{ fijo}, \tag{7.21}$$

por lo que el error tiende rápidamente a cero cuando $x \to x_0$. En las aplicaciones prácticas usualmente se toma un valor de x cercano a x_0 y se intenta reducir el error considerando más términos en la serie. Pero como la serie es divergente,[4] a partir de cierto número de términos el error que se comete al añadir más términos aumenta en vez de disminuir. Este comportamiento típico se muestra en la figura 7.1.

Hemos visto que $r_N(x) = O\left[a_{N+1}(x-x_0)^{N+1}\right]$ para $x \to x_0$, esto es, el primer término despreciado $a_{N+1}(x-x_0)^{N+1}$ es una medida del error cometido al truncar con N términos cuando $x \to x_0$. Si x es próximo a x_0, pero con un valor fijo, el primer término despreciado es sólo una estimación del error. Esto nos sugiere una regla simple para obtener buenos resultados numéricos a partir de series asintóticas:

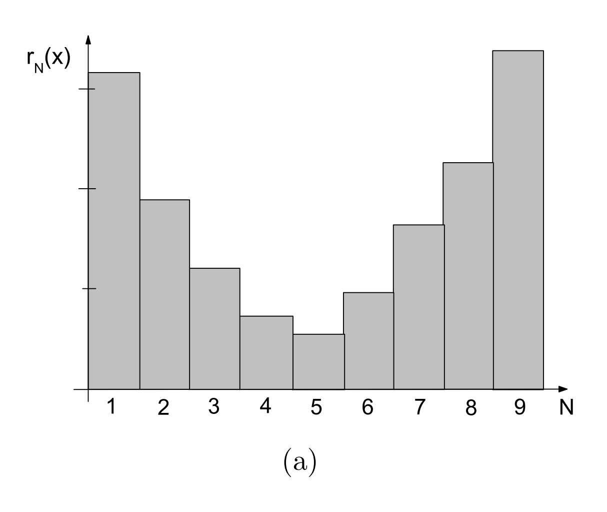
1. Examinamos los términos de la serie, que típicamente se comportan como mostramos en la figura 7.1.

2. Localizamos el término más pequeño.

3. Sumamos todos los términos anteriores a éste (no incluyéndolo).

Esta suma finita de términos *normalmente* proporciona la mejor estimación de la función porque el siguiente término no incluido en la suma, el cual nos proporciona una estimación del error, es el más pequeño de la serie. Esta regla se conoce como regla del truncamiento óptimo.

[4] Estamos considerando el peor de los casos posibles asumiendo que la serie asintótica a una función no es convergente. Si fuera convergente, todo es mucho más fácil: para mejorar la aproximación sólo hay que añadir más términos a la serie; eso es todo.



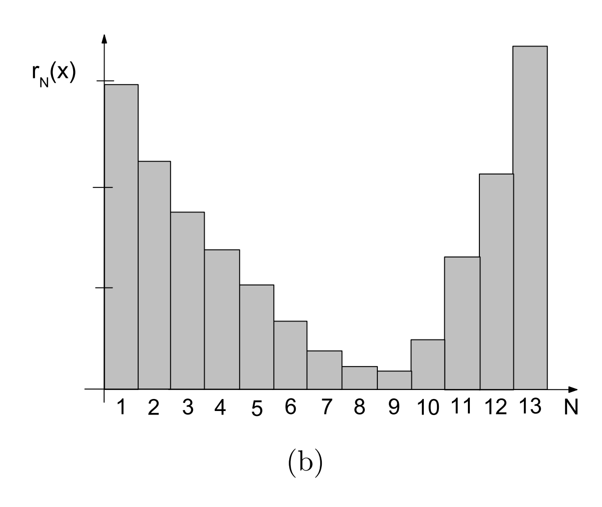


Figura 7.1: Comportamiento típico del error de truncamiento $r_N(x)$ de una serie asintótica para (a) un valor de x cercano a x_0, y para (b) un valor de x *aún más* cercano a x_0.

▶ *Ejemplo 7.6*

Vamos a comprobar las afirmaciones anteriores acerca de la regla del truncamiento óptimo usando como ejemplo la serie asintótica a la función de Stieljes para $x \to 0^+$ que encontramos en la sección 7.4.2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+x\,t}\,dt \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,n!\,x^n, \quad x \to 0^+. \end{aligned}$$

En la figura 7.2 mostramos los valores de $r_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,n!\,x^n$ y del término n-ésimo de la serie, $s_n(x) \equiv (-1)^n\,n!\,x^n$, para varios valores de N, n y x. Nótese que el mínimo del valor absoluto de $r_N(x)$ coincide con el mínimo del valor absoluto de los términos $s_n(x)$.

◀

7.5. Desarrollo del integrando

En esta y siguientes secciones vamos a estudiar varios métodos para obtener aproximaciones, generalmente asintóticas, de integrales. Empezaremos en esta sección presentando el método más sencillo —método en el que simplemente se desarrolla el integrando en serie de potencias y se integra a continuación término a término.

Ilustraremos la técnica mediante un par de ejemplos

▶ *Ejemplo 7.7*

Queremos calcular

$$I(x) = \int_0^1 \mathrm{sen}(x\,t^2)\,dt \tag{7.22}$$

para valores pequeños de x.

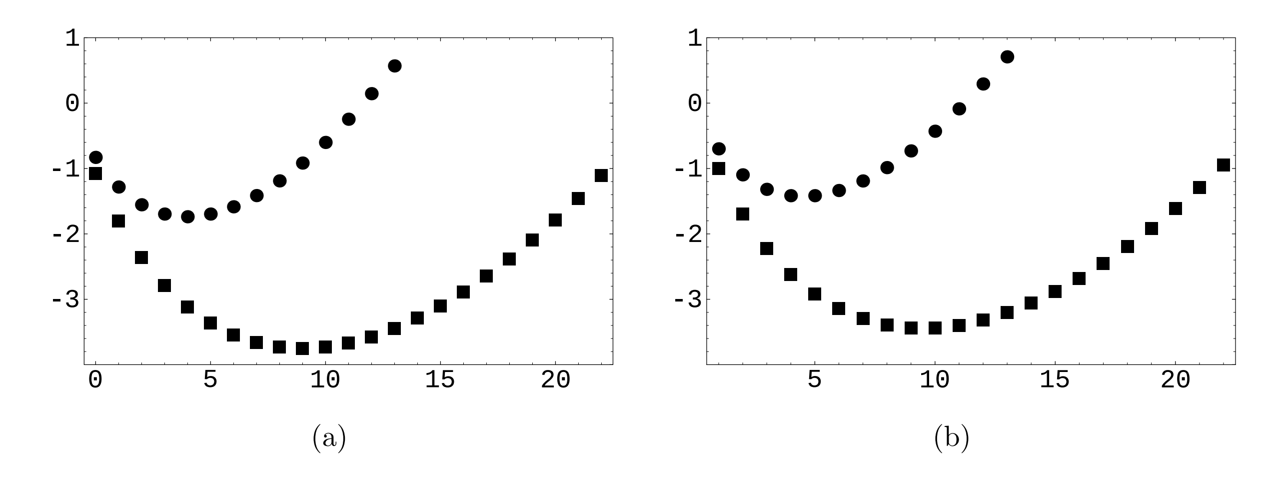


Figura 7.2: (a) $\log_{10}|r_N(x)|$ frente a N para $x = 0'1$ (cuadrados) y $x = 0'2$ (círculos). (b) Logaritmo decimal del valor absoluto del término n-ésimo, $\log_{10}|s_n(x)| = \log_{10}(n!\, x^n)$ frente a n para $x = 0'1$ (cuadrados) y $x = 0'2$ (círculos).

Recordando que el desarrollo de Taylor de la función seno viene dado por

$$\operatorname{sen} y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} y^{2n-1},$$

podemos escribir el integrando de (7.22) así

$$\operatorname{sen}(x\, t^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (x\, t^2)^{2n-1}.$$

Esta serie converge para todo x y para todo t, pues por el criterio de D'Alembert,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}/(2n-1)!}{(-1)^{n+2}/(2n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty} |-(2n+1)\, 2n| = \infty,$$

luego para cualquier intervalo *finito* la serie de Taylor anterior es uniformemente convergente (ver teorema 7.6 en la página 407), por lo que la integración término a término es válida:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} t^{4n-2}\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1} \int_0^1 t^{4n-2}\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} \frac{1}{4n-1}\, x^{2n-1} \\ &= \frac{x}{3} - \frac{x^3}{42} + \frac{x^5}{1320} + O(x^7). \end{aligned} \tag{7.23}$$

La serie (7.23) anterior es uniformemente convergente para todo x finito dado que es convergente con radio

de convergencia infinito:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!\,(4n+3)}{(-1)^{n+2}(2n-1)!\,(4n-1)}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(2n+1)\,(2n)\,(4n+3)}{4n-1}\right| \\ &= \infty. \end{aligned}$$

◄

► *Ejemplo 7.8*

Ahora vamos a calcular

$$\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\;dt \tag{7.24}$$

para x pequeño ($x \to 0$).
Esta función es, salvo constante de normalización, la función de error complementaria,

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,I(x).$$

Visto el éxito que tuvimos en el ejemplo anterior, podríamos intentar sin más reflexión seguir el mismo procedimiento que empleamos allí. Es decir, como una primera idea, podemos intentar desarrollar el integrando en serie de Taylor e integrar término a término:

$$\begin{aligned} I(x) = \int_x^\infty dt \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} &\overset{?}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_x^\infty t^{2n}\,dt \\ = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\;\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_x^\infty &= \infty. \end{aligned}$$

Es obvio que algo ha ido mal. El signo de interrogación sobre el símbolo de igualdad nos está indicando en dónde nacen los problemas: no es lícito integrar término a término la serie $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n t^{2n}/n!$ La razón es que, aunque esta serie tiene radio de convergencia infinito,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)!}{(-1)^{n+1}n!}\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

la convergencia uniforme se da sólo para $|x| \le r < R = \infty$, es decir, *la serie es uniformemente convergente sólo sobre un intervalo finito*, y como *intervalo de integración es infinito*, resulta que la integración término a término de la serie no es válida. Como el problema está pues en que el intervalo de integración es infinito, podemos esquivar esta dificultad descomponiendo la integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\;dt - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\;dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\;dt. \end{aligned} \tag{7.25}$$

De este modo el intervalo de integración de la nueva integral ya es finito. El desarrollo en serie de Taylor

es uniformemente convergente en este intervalo por lo que la integración término a término es posible,

$$
\begin{aligned}
I(x) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\, dt \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)\, n!}\, x^{2n+1} \qquad (7.26) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - x + \frac{1}{3}\, x^3 - \frac{1}{10}\, x^5 + \frac{1}{42}\, x^7 + O(x^9)\,.
\end{aligned}
$$

◀

7.6. Integración por partes

Al igual que en la sección anterior, explicaremos en qué consiste esta técnica aplicándola a varios ejemplos.

▶ *Ejemplo 7.9*

Queremos calcular el valor de la integral

$$
I(x) = \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt \qquad (7.27)
$$

para x grandes, es decir, para $x \to \infty$. Esta integral es la función gamma incompleta[5] $\Gamma(-1, x)$.

Como sabemos, en la integración por partes se usa la relación

$$
\int_{t_1}^{t_2} u\, dv = uv\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} v\, du. \qquad (7.28)
$$

En nuestro caso tenemos que

$$
\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\, dt = u\, dv.
$$

Las funciones u y dv se deben escoger de modo que:

1. La expresión dv sea integrable, es decir, debemos ser capaces de hallar v a partir de dv.
2. Los sucesivos términos en el desarrollo de $I(x)$ sean decrecientes cuando x se acerca al valor límite (en nuestro caso, cuando $x \to \infty$).[6]

Ilustraremos estas afirmaciones probando con dos elecciones —una buena y otra mala— de u y dv. Empezaremos por la errónea,

Elección errónea:

$$
\left.
\begin{aligned}
u &= \mathrm{e}^{-t} \\
dv &= \frac{dt}{t^2}
\end{aligned}
\right\} \quad \Rightarrow \quad
\left\{
\begin{aligned}
du &= -\,\mathrm{e}^{-t}\, dt\,, \\
v &= -\frac{1}{t}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

[5]Esta función se define por $\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt$. Cuando $x = 0$ la función es simplemente la función gamma: $\Gamma(a, 0) = \Gamma(a)$

[6]Si esto no sucediera, ¿serviría para algo nuestro desarrollo?

Se tiene entonces que

$$\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,dt = -\,\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{t}\bigg|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt\,. \tag{7.29}$$

Continuamos el procedimiento y escribimos

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& \mathrm{e}^{-t} \\ dv &=& \dfrac{dt}{t} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} du &=& -\,\mathrm{e}^{-t}\,dt\,, \\ v &=& \ln t\,. \end{array}\right.$$

y sustituimos,

$$I(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \mathrm{e}^{-t}\ln t\bigg|_x^\infty - \int_x^\infty \ln t\,\mathrm{e}^{-t}\;dt$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \mathrm{e}^{-x}\ln x - \int_x^\infty \ln t\,\mathrm{e}^{-t}\;dt\,. \tag{7.30}$$

Vemos que el segundo término es mucho mayor que el primero. Esto lo podíamos haber previsto pues al hacer la integral por partes obtuvimos en (7.29) una integral entre x e ∞ similar a la que define a $I(x)$ pero con un integrando mayor que el de $I(x)$, pues $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \gg \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ para $t \geq x \gg 1$. En (7.30) sucede lo mismo: la integral última debe dar una contribución mayor que los términos anteriores porque su integrando es mucho mayor que los integrandos anteriores ya que $\mathrm{e}^{-t}\ln t \gg \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ para $t \geq x \gg 1$. En definitiva, las elecciones realizadas no son adecuadas porque la integral restante del miembro derecho —integral que llamaremos integral *remanente*— contribuye a $I(x)$ en mayor medida que los términos anteriores explícitamente calculados.

Elección acertada:

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& \dfrac{1}{t^2} \\ dv &=& \mathrm{e}^{-t}\;dt \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} du &=& -\dfrac{2}{t^3}\,dt\,, \\ v &=& -\,\mathrm{e}^{-t}\;. \end{array}\right.$$

Con esta elección se tiene que

$$I(x) = -\,\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{t^2}\bigg|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{2\,\mathrm{e}^{-t}}{t^3}\,dt$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - 2\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^3}\,dt.$$

Esta elección conduce a una integral remanente con un integrando *menor* que el de la integral de partida pues $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^3} \ll \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}$ para $t \geq x \gg 1$. Esto es una buena señal. Continuemos con el procedimiento e integremos la integral remanente por partes escogiendo

$$\left.\begin{array}{rl} u &= \dfrac{1}{t^3} \\ dv &= \mathrm{e}^{-t}\;dt \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rl} du &= -\dfrac{3}{t^4}\,dt\,, \\ v &= -\,\mathrm{e}^{-t}\;. \end{array}\right.$$

Esto significa que

$$\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^3}\,dt = -\,\mathrm{e}^{-t}\,\frac{1}{t^3}\bigg|_x^\infty - 3\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^4}\,dt$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3} - 3\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^4}\,dt\,.$$

De este modo tenemos que $I(x)$ será

$$I(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - 2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3} + 6\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^4}\,dt.$$

Continuando con el procedimiento obtendríamos

$$I(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - 2!\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^3} + 3!\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^4} - 4!\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!\,\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+1}} + (-1)^n(n+1)!\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,dt\,. \qquad (7.31)$$

Pero $t^{n+2} \geq x^{n+2}$ para $x \leq t < \infty$, por lo que

$$\frac{1}{t^{n+2}} \leq \frac{1}{x^{n+2}} \Rightarrow \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,dt < \frac{1}{x^{n+2}}\int_x^\infty \mathrm{e}^{-t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}}\,.$$

Por tanto (7.31) queda

$$I(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}} + \mathrm{e}^{-x}\,O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right) \qquad (7.32)$$

es decir,

$$I(x) \sim \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}, \quad x \to \infty\,.$$

Podemos comprobar que la serie $\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}$, que como acabamos de ver es asintótica a $\mathrm{e}^x\,I(x)$ para $x \to \infty$, no es en cambio convergente dado que su radio de convergencia es nulo:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Sin embargo, para un N fijo, el resto $r_N(x)$ puede hacerse arbitrariamente pequeño sin más que aumentar el valor de x.
En la figura 7.3 hemos representado el cociente $I(x)/S_N(x)$ donde

$$S_N(x) = \mathrm{e}^{-x}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}$$

es la serie truncada (hasta el término N) asintótica a $I(x)$ para $x \to \infty$ que dimos en la ecuación (7.32). Nótese que para valores no muy grandes de x la serie truncada puede conducir a peores resultados cuando se retienen más términos.

◀

► *Ejemplo 7.10*

Queremos calcular

$$I(x) = \int_0^x t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

para x grandes, es decir, para $x \to \infty$.

Usaremos integración por partes, pero hemos de hacerlo con cuidado porque una integración por partes aplicada directamente a $I(x)$ conduce a una expresión indeterminada:

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& t^{-1/2} \\ dv &=& \mathrm{e}^{-t}\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du &=& -\dfrac{1}{2}t^{-3/2}\,dt\,, \\ v &=& -\mathrm{e}^{-t}\,. \end{array}\right.$$

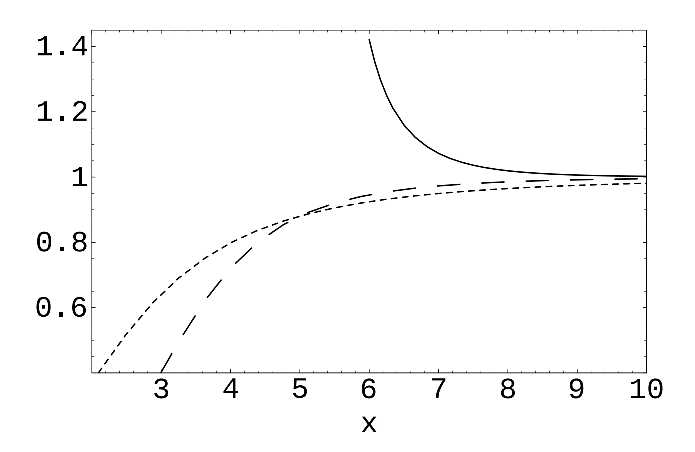


Figura 7.3: Cociente $I(x)/S_N(x)$ frente a x para $N = 3$ (rayas cortas), $N = 5$ (rayas largas) y $N = 10$ (línea continua).

luego

$$\begin{aligned} I(x) &= t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^x - \frac{1}{2}\int_0^x t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-t} \\ &= x^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0}} - \frac{1}{2}\int_0^x t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-t}\ . \end{aligned}$$

Hemos encontrado una división por cero de modo que esta vía de resolución no es válida. El problema está en el comportamiento de nuestras expresiones en las vecindades de $x = 0$. Podemos evitarnos trabajar en esta región problemática expresando $I(x)$ como diferencia de dos integrales

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt - \int_x^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \int_x^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= \sqrt{\pi} - \int_x^\infty t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt\,, \end{aligned}$$

siendo $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ la función gamma con argumento $1/2$.
Ahora la segunda integral puede integrarse por partes sin problemas porque la contribución del extremo en el infinito es nula[7]:

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& t^{-1/2} \\ dv &=& \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} du &=& -\dfrac{1}{2}\,t^{-3/2}\,dt\,, \\ v &=& -\,\mathrm{e}^{-t}\ . \end{array}\right.$$

y por tanto

$$\begin{aligned} I(x) &= \sqrt{\pi} - \left[-t^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_x^\infty - \frac{1}{2}\int_x^\infty t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt\right] \\ &= \sqrt{\pi} + x^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\int_x^\infty t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-t}\ dt. \end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento y escogemos

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& t^{-3/2} \\ dv &=& \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} du &=& -\dfrac{3}{2}\,t^{-5/2}\,dt\,, \\ v &=& -\,\mathrm{e}^{-t}\ . \end{array}\right.$$

[7]Nótese que hemos usado la misma identificación para u y dv que antes

para así obtener

$$I(x) = \sqrt{\pi} - x^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}\left[-t^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_x^\infty - \frac{3}{2}\int_x^\infty t^{-5/2}\,\mathrm{e}^{-t}\;dt\right]$$
$$= \sqrt{\pi} + x^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{3}{4}\int_x^\infty t^{-5/2}\,\mathrm{e}^{-t}\;dt.$$

En general, para $I_n(x) = \int_x^\infty t^{-(2n-1)/2}\,\mathrm{e}^{-t}\;dt$ usamos

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& t^{-(2n-1)/2} \\ dv &=& \mathrm{e}^{-t}\;dt \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} du &=& -\dfrac{2n-1}{2}\,t^{-(2n+1)/2}\,dt\,, \\ v &=& -\,\mathrm{e}^{-t}\,. \end{array}\right.$$

para obtener

$$I_n(x) = -t^{-(2n-1)/2}\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_x^\infty - \frac{2n-1}{2}\int_x^\infty t^{-\frac{2(n+1)-1}{2}}\,\mathrm{e}^{-t}\;dt$$
$$= x^{-(2n-1)/2}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{2n-1}{2}\,I_{n+1}(x)$$
$$= \sqrt{x}\,x^{-n}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{2n-1}{2}\,I_{n+1}(x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{x^{n-1}}\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{2n-1}{2}\,I_{n+1}(x)\,.$$

Por tanto, dado que $I(x) = \sqrt{\pi} - I_1(x)$, deducimos que

$$I(x) = \sqrt{\pi} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1\cdot 3}{(2x)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2x)^3} + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2x)^n}\right]$$
$$+ (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2)^n}\frac{2n+1}{2}\,I_{n+2}(x)\,.$$

Como $I_{n+2}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$, se tiene que, por definición de serie asintótica,

$$I(x) \sim \sqrt{\pi} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{(2x)^n}\right], \qquad x\to\infty\,. \tag{7.33}$$

◀

Hemos aprendido en este último ejemplo es que la integración por partes no funcionará si la contribución de uno de los límites de integración es mucho mayor que el valor de la integral.

▶ *Ejemplo 7.11*

Ahora deseamos estimar el valor de la integral de Laplace

$$I(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\,f(t)\,dt \tag{7.34}$$

para x grandes $(x\to\infty)$ asumiendo que la integral existe y que $f(x)$ es analítica en $[0,\infty]$.[8]

Escogemos

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& f(t) \\ dv &=& \mathrm{e}^{-xt}\;dt \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{rcl} du &=& f'(t)\,dt\,, \\ v &=& -\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,. \end{array}\right.$$

[8] Recuérdese que esto significa que todas las derivadas de $f(x)$ existen en el intervalo $[0,\infty]$.

Esta identificación tiene buen aspecto pues el integrando de la integral remanente contendrá a la función $v = -\mathrm{e}^{-xt}/x$ que, para x grandes, es menor (en valor absoluto) que la función e^{-xt} existente en la integral inicial. Integrando por partes según la identificación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,dt &= -\frac{f(t)\,\mathrm{e}^{-xt}}{x}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x} f'(t)\,dt \\ &= \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Repetimos el procedimiento y escogemos

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& f'(t) \\ dv &=& \mathrm{e}^{-xt}\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du &=& f''(t)\,dt\,, \\ v &=& -\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\,. \end{array}\right.$$

para así obtener

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,dt &= \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\left[-\frac{f'(t)\,\mathrm{e}^{-xt}}{x}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x} f''(t)\,dt\right] \\ &= \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f''(t)\,dt.\end{aligned}$$

Repitiendo el procedimiento n veces se encuentra que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{x^{n+1}} + \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{x^{n+1}} + O\left(\frac{1}{x^{N+2}}\right)\end{aligned}$$

es decir,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f(t)\,dt \sim \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{x^{n+1}}, \qquad x \to \infty\,.$$

◀

▶ *Ejemplo 7.12*

Calcularemos ahora el comportamiento de la integral generalizada de Laplace,

$$I(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{x\phi(t)}\,dt$$

para $x \to \infty$.

Integramos por partes escogiendo (sin mucha reflexión)

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& f(t) \\ dv &=& \mathrm{e}^{x\phi(t)}\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du &=& f'(t)\,dt\,, \\ v &=& ? \end{array}\right.$$

En general, salvo para funciones $\phi(t)$ muy simples, no es posible conocer la primitiva de dv, por lo que esta elección no es muy acertada. Hay otra identificación más prometedora que no sufre de este inconveniente, a saber:

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& \dfrac{f(t)}{\phi'(t)} \\ dv &=& \phi'(t)\,\mathrm{e}^{x\phi(t)}\,dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du &=& \left[\dfrac{f(t)}{\phi'(t)}\right]'\,dt\,, \\ v &=& -\dfrac{\mathrm{e}^{x\phi(t)}}{x}\,. \end{array}\right.$$

y por consiguiente

$$I(x) = \left. \frac{e^{x\phi(t)}\, f(t)}{x\,\phi'(t)} \right|_a^b - \frac{1}{x}\int_a^b e^{x\phi(t)} \left[\frac{f(t)}{\phi'(t)}\right]' dt. \tag{7.35}$$

Como comentamos en el ejemplo 7.11 anterior, es una muy buena señal el hecho de que en la función v aparezca el factor $1/x$ multiplicando a la función $e^{x\phi(t)}$ (función que ya aparecía en la integral original). Por descontado, ha de asumirse que la integral remanente existe. Esta fórmula es útil si la integral de la derecha es asintóticamente más pequeña que los términos de contorno cuando $x \to \infty$. Si esto es cierto, los términos de contorno son asintóticos a $I(x)$:

$$I(x) \sim \frac{1}{x}\frac{f(b)}{\phi'(b)}\, e^{x\phi(b)} - \frac{1}{x}\frac{f(a)}{\phi'(a)}\, e^{x\phi(a)}, \qquad x \to \infty.$$

◀

Este último ejemplo ha sido especialmente interesante. Hemos visto en él una fórmula general para estimar el comportamiento dominante asintótico de una integral de Laplace generalizada. Vale pues la pena discutir bajo qué condiciones la fórmula obtenida anteriormente,

$$I(x) = \int_a^b f(t)\, e^{x\phi(t)}\, dt \tag{7.36}$$

$$\sim \frac{1}{x}\frac{f(b)}{\phi'(b)}\, e^{x\phi(b)} - \frac{1}{x}\frac{f(a)}{\phi'(a)}\, e^{x\phi(a)}, \qquad x \to \infty, \tag{7.37}$$

es válida. Puede demostrarse que ésta es una expresión asintótica correcta si las funciones $\phi(t)$, $\phi'(t)$ y $f(t)$:

1. Son continuas.

2. Satisfacen alguna de las siguientes tres condiciones:

   a) $\phi'(t) \neq 0$ para $a \leq t \leq b$ y al menos $f(a) \neq 0$ y/o $f(b) \neq 0$. Estas condiciones son suficientes para asegurar que existe la integral restante del miembro derecho de (7.35). Además puede probarse que esta integral remanente es despreciable frente a los términos de contorno cuando $x \to \infty$.

   b) $\mathrm{Re}[\phi(t)] < \mathrm{Re}[\phi(b)]$ para $a \leq t < b$, $\mathrm{Re}[\phi'(b)] \neq 0$ y $f(b) \neq 0$. Estas condiciones no permiten asegurar que exista la integral remanente de la expresión (7.35), pero si son lo suficientemente fuertes como para garantizar que

   $$I(x) \sim \frac{1}{x}\frac{f(b)}{\phi'(b)}\, e^{x\phi(b)} \qquad \text{para } x \to \infty.$$

   Este resultado lo justificaremos en la sección 7.9 mediante el método de Laplace.

   c) $\mathrm{Re}[\phi(t)] < \mathrm{Re}[\phi(a)]$ para $a < t \leq b$, $\mathrm{Re}[\phi'(a)] \neq 0$ y $f(a) \neq 0$. Como en el apartado $2b$, estas condiciones no aseguran que la integral restante exista, pero si nos garantizan que

   $$I(x) \sim \frac{1}{x}\frac{f(a)}{\phi'(a)}\, e^{x\phi(a)} \qquad \text{para } x \to \infty.$$

▶ *Ejemplo 7.13*

Veamos un par de ejemplos en los que estimaremos el término asintótico dominante de integrales de Laplace generalizadas empleando la fórmula (7.37) tras asegurarnos que $f(t)$ y $\phi(t)$ satisfacen las condiciones adecuadas.

1. Sea la integral

$$I(x) \int_1^2 \mathrm{e}^{x \cosh t}\, dt, \qquad x \to \infty.$$

Aquí $f(t) = 1$, $\phi(t) = \cosh t \Rightarrow \phi'(t) = \operatorname{senh} t$. Luego se tiene que:

- $\phi'(t) = \operatorname{senh} t \neq 0$ para $1 \leq t \leq 2$.
- $f(1) \neq 0$ y $f(2) \neq 0$.

Por lo tanto $f(t)$ y $\phi(t)$ satisfacen las condiciones del apartado $2a$, luego

$$I(x) \sim \frac{1}{x} \frac{1}{\operatorname{senh} 2} \mathrm{e}^{x \cosh 2} \qquad \text{para } x \to \infty$$

dado que $\cosh(2) > \cosh(1)$.

2. Vamos a ver otro ejemplo con la integral

$$I(x) = \int_{-1}^3 \mathrm{e}^{x \cosh^2 t}\, dt, \qquad x \to \infty.$$

Identificamos términos: $f(t) = 1$, $\phi(t) = \cosh^2 t \Rightarrow \phi'(t) = 2 \cosh t \operatorname{senh} t$. Con estos datos podemos ver que:

- $\cosh^2 t < \cosh^2 3, \quad -1 \leq t < 3$.
- $\phi'(b = 3) \neq 0$.
- $f(3) = 1 \neq 0$.

Estas son las condiciones del apartado $2b$ de la página 422, luego

$$I(x) \sim \frac{1}{x} \frac{1}{2 \cosh 3 \operatorname{senh} 2} \mathrm{e}^{x \cosh^2 3} \qquad \text{para} \quad x \to \infty.$$

◀

Si la integral remanente existe y se satisfacen algunas de las tres condiciones anteriores, se puede seguir integrando por partes para obtener términos correctivos (es decir, subdominantes) de $I(x)$. Cada nueva integración por partes introduce un nuevo factor $1/x$, de modo que la serie toma la forma de serie de potencias en x^{-1}. Por ejemplo, si $\mathrm{Re}[\phi(b)] > \mathrm{Re}[\phi(a)]$, el desarrollo asintótico de $I(x)$ toma la forma

$$I(x) \sim \mathrm{e}^{x\phi(b)} \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{-n}, \qquad x \to \infty.$$

▷ ***Ejercicio** 7.1*

Demuestra la afirmación anterior.

7.6.1. Fallo de la integración por partes

El método de integración por partes es bastante inflexible pues sólo da lugar a series asintóticas en potencias enteras de $1/x$. Sin embargo, las integrales de Laplace $I(x) = \int_a^b \mathrm{e}^{x\phi(t)} f(t)\, dt$ pueden tener desarrollos asintóticos que involucran potencias fraccionarias de $1/x$ cuando $x \to \infty$. Por tanto, es evidente que la integración por partes es inadecuada para hallar la serie asintótica de esas integrales. ¿Cómo podemos saber si la integración por partes funcionará? Es claro que la

integración por partes no es el procedimiento adecuado si da lugar a la aparición de integrales inexistentes. Por ejemplo, es casi seguro que la integración por partes no funcionará si $\phi'(t)$ tiene un cero en $[a, b]$.

▶ *Ejemplo 7.14*

Sea la integral

$$I(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt^2}\, dt.$$

Esta integral puede resolverse exactamente mediante el cambio $x\,t^2 = z$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{1}{2x^{1/2}} \int_0^\infty z^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-z}\, dz \\ &= \frac{\Gamma(1/2)}{2x^{1/2}}\,, \end{aligned}$$

es decir,

$$I(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

Vemos que $I(x)$ no tiene la forma de una potencia entera de $1/x$, luego la integración por partes debe fallar. De hecho, en esta integral

$$\phi(t) = -t^2 \Rightarrow \phi'(t) = -2t \Rightarrow \phi'(t=0) = 0,$$

por lo que esperamos obtener una integral inexistente al integrar por partes:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{\phi'(t)} = \frac{1}{-2t} \\ dv &= \mathrm{e}^{x\phi}\, \phi'(t)\, dt = \mathrm{e}^{-xt^2} (-2t)\, dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} du &= \frac{1}{2t^2}\, dt\,, \\ v &= \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{x}\,. \end{aligned}\right.$$

luego

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt^2}\, dt = -\frac{1}{2t}\, \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{x}\bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{x}\, \frac{1}{2t^2}\, dt\,.$$

La integral remanente no existe debido al factor $1/t^2$ y además un término de contorno conduce a una division por cero. Es claro que este es un caso en el que la integración por partes resulta inadecuada.

◀

7.7. Método de Laplace

Este método permite obtener el comportamiento asintótico para $x \to \infty$ de integrales en las que el parámetro grande, x, aparece en una exponencial,

$$I(x) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt,$$

siendo $f(t)$ y $\phi(t)$ funciones reales continuas. Asumiremos que la integral $I(x)$ existe, es decir, que tiene un valor finito.

Antes de hacer una exposición genérica, vamos a ilustrar el método con un ejemplo.

▶ Ejemplo 7.15

Queremos evaluar
$$\int_0^{10} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt$$
para x grandes, es decir para $x \to \infty$.

Seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Empezamos desarrollando $(1+t)^{-1}$ en potencias de t.
2. Integramos el resultado término a término.
3. Reemplazamos el límite superior de la integral por ∞.

Etapa 1. Desarrollamos $(1+t)^{-1}$ en potencias de t:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n. \tag{7.38}$$

El radio de convergencia de esta serie es

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \tag{7.39}$$

luego la serie converge uniformemente sólo para $|t| < 1$. Por tanto, la integración de esta serie término a término sobre el intervalo $[0, 10]$ no tendría justificación.

Etapa 2. Para evitar esta dificultad dividimos el intervalo de integración en dos intervalos, $[0, \delta]$ y $[\delta, 10]$, siendo δ un número positivo pequeño (menor que 1). Por consiguiente,

$$I(x) = \int_0^{\delta} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt + \int_{\delta}^{10} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt\,. \tag{7.40}$$

Pero
$$\int_{\delta}^{10} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt < \int_{\delta}^{10} \mathrm{e}^{-xt}\;dt = \left.\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right|_{\delta}^{10} = -\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{-10x} - \mathrm{e}^{-\delta x}) \tag{7.41}$$

y tanto e^{-10x} como $\mathrm{e}^{-\delta x}$ tienden a 0 mucho más rápidamente que cualquier potencia de x^{-1} para $x \to \infty$. Decimos entonces que esta última integral tiende exponencialmente a cero, o que contribuye con términos exponencialmente pequeños (TExP). En definitiva,

$$I(x) = \int_0^{\delta} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,dt + \text{TExP} \equiv I(x,\delta) + \text{TExP} \qquad \text{para } x \to \infty. \tag{7.42}$$

Esto significa que sólo la *vecindad* de $t = 0$ contribuye a la integral $I(x)$. Esto es debido a que, para $x \to \infty$, el integrando es muchísimo mayor en las vecindades del máximo del exponente de e^{-xt} (que está en $t = 0$) que en el resto de las zonas. Es decir, $\mathrm{e}^{-x\cdot 0} = 1 \gg \mathrm{e}^{-xt}$ para todo $t > 0$ cuando $x \to \infty$.
Como $\delta < 1$, podemos desarrollar $(1+t)^{-1}$ en potencias de t e integrar la serie resultante término a término sobre el intervalo $[0, \delta]$ dado que esa serie es uniformemente convergente en ese intervalo $[0, \delta]$ si $\delta < 1$, es decir,

$$I(x,\delta) = \int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-xt} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-xt}\,t^n\,dt. \tag{7.43}$$

Mediante el cambio $x\,t = \tau$, la integral de la ecuación (7.43) queda

$$\int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-xt}\,t^n\,dt = \int_0^{x\delta} \mathrm{e}^{-\tau} \left(\frac{\tau}{x}\right)^n \frac{d\tau}{x} = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^{x\delta} \mathrm{e}^{-\tau}\,\tau^n\,d\tau. \tag{7.44}$$

Definimos

$$I_n = \int_0^{x\delta} \mathrm{e}^{-\tau}\, \tau^n \, d\tau$$

de modo que

$$I(x,\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n I_n}{x^{n+1}}\,.$$

Podemos evaluar la integral I_n integrando por partes mediante la identificación

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& \tau^n \\ dv &=& \mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du &=& n\,\tau^{n-1}\, d\tau, \\ v &=& -\,\mathrm{e}^{-\tau}\,. \end{array}\right.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
I_n &= -\tau^n\, \mathrm{e}^{-\tau}\Big|_0^{x\delta} + n\int_0^{x\delta} \mathrm{e}^{-\tau}\, \tau^{n-1}\, d\tau \\
&= n\, I_{n-1} - (x\delta)^n\, \mathrm{e}^{-x\delta} \\
&= n\left[(n-1)\, I_{n-2} - (x\delta)^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\tau}\right] - (x\delta)^n\, \mathrm{e}^{-x\delta} \\
&= n\,(n-1)\, I_{n-2} - \left[(x\delta)^n + n\,(x\delta)^{n-1}\right]\, \mathrm{e}^{-x\delta} \\
&= n\,(n-1)\left[(n-2)\, I_{n-3} - (x\delta)^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x\delta}\right] - \left[(x\delta)^n + n\,(x\delta)^{n-1}\right]\, \mathrm{e}^{-x\delta} \\
&= n\,(n-1)\,(n-2)\, I_{n-3} - \left[(x\delta)^n + n\,(x\delta)^{n-1} + n\,(n-1)\,(x\delta)^{n-2}\right]\, \mathrm{e}^{-x\delta}\,.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que podemos escribir de forma general

$$\begin{aligned}
I_n &= n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-m+1)\, I_{n-m} \\
&\quad - \left[(x\delta)^n + n\,(x\delta)^{n-1} + \cdots + n\,(n-1)\,\cdots(n-m+2)\,(x\delta)^{n-m+1}\right]\, \mathrm{e}^{-x\delta}\,.
\end{aligned}$$

Haciendo $n = m$ y dado que $I_0 = I_{n-n} = \int_0^{x\delta} \mathrm{e}^{-\tau}\, d\tau = 1 - \mathrm{e}^{-x\delta}$, se tiene

$$\begin{aligned}
I_n &= n!\, I_0 - \left[(x\delta)^n + n\,(x\delta)^{n-1} + \cdots + n\,(n-1)\cdots 2(x\delta)\right]\, \mathrm{e}^{-x\delta} \\
&= n!\left[1 - \mathrm{e}^{-x\delta}\right] - \left[(x\,\delta)^n + n\,(x\,\delta)^{n-1} + \cdots + n!\,(x\,\delta)\right]\, \mathrm{e}^{-x\delta} \\
&= n! - \left[(x\,\delta)^n + n\,(x\,\delta)^{n-1} + \cdots + n!\,(x\,\delta) + n!\right]\, \mathrm{e}^{x\delta}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral (7.44) se puede escribir como

$$\int_0^{\delta} \mathrm{e}^{xt}\, t^n\, dt = \frac{I_n}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}} - \left[\frac{\delta^n}{x} + n\,\frac{\delta^{n-1}}{x^2} + n\,(n-1)\,\frac{\delta^{n-2}}{x^3} + \cdots + n!\,\frac{\delta}{x^n} + \frac{n!}{x^{n+1}}\right]\, \mathrm{e}^{-x\delta}\,.$$

Dado que $\mathrm{e}^{-x\delta}$ va a cero mucho más rápidamente que cualquier potencia de x^{-1} cuando $x \to \infty$, escribimos, tal como hicimos en la ecuación (7.42), que

$$\int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-xt}\, t^n\, dt = \frac{n!}{x^{n+1}} + \text{TExP}. \tag{7.45}$$

Etapa 3. Nótese que este resultado es independiente del valor de δ, incluso tomando $\delta = \infty$. De hecho, hacer $\delta = \infty$ sería el modo más directo de calcular los términos que no son exponencialmente pequeños. En nuestro caso se tendría que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\, t^n\, dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Pero de momento seguiremos considerando que δ es un número positivo pequeño.
Utilizando el resultado de la ecuación (7.45) en (7.43) se tiene que

$$I(x,\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \text{TExP} \quad \text{para } x \to \infty,$$

lo que implica, por (7.42), que

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \text{TExP} \quad \text{para } x \to \infty.$$

Es fácil ver que la serie anterior no es convergente pues su radio de convergencia es nulo,

$$R = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}(n+1)!} \right| = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por ello escribimos

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \quad \text{para } x \to \infty. \tag{7.46}$$

Este resultado también se podría haber obtenido por integración por partes.

◀

Repasemos el procedimiento que hemos usado:

1. Primero aproximamos $I(x)$ por $I(x,\delta)$ reduciendo el intervalo de integración a un pequeño intervalo alrededor de la posición $t = c$ del máximo de $\phi(t)$ [en nuestro ejemplo $\phi(t) = -t$ tiene el máximo en $t = 0$], es decir, $I(x) \sim I(x,\delta)$ para $x \to \infty$ con:

   - $I(x,\delta) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(t)\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt$ si $a < c < b$.
   - $I(x,\delta) = \int_{a}^{a+\delta} f(t)\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt$ si $c = a$.
   - $I(x,\delta) = \int_{b-\delta}^{b} f(t)\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt$ si $c = b$.

   El motivo de aproximar $I(x)$ por $I(x,\delta)$ reside en que su integrando $f(t)\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}$ adopta la forma de un pico muy agudo (tipo delta de Dirac) alrededor de $t = c$ cuando $x \gg 1$. Esto no es difícil de entender tras un poco de reflexión. La figura 7.4, que muestra como evoluciona un integrando con la forma anterior [con $f(t) = 1$ y $\phi(t) = \operatorname{sen}(t) - 2$] a medida que x aumenta, debiera servirnos de ayuda.

2. En segundo lugar aproximamos $f(t)$ y $\phi(t)$ mediante series de potencias alrededor del máximo $t = c$ de $\phi(t)$. Como el integrando es tanto más estrecho alrededor de $t = c$ cuanto mayor sea x, esta aproximación será tanto mejor cuanto mayor sea x.

3. A continuación intercambiamos el orden de la integral y el sumatorio de modo que expresamos $I(x,\delta)$ como serie de integrales.

4. Por último, el modo más conveniente de evaluar estas integrales es extender su intervalo de integración a infinito, estos es, reemplazar δ por ∞.

Todo esto puede parecer un tanto loco: cambiamos primero 10 por δ con $0 < \delta \ll 1$, y después δ por ∞. Sin embargo, una pequeña reflexión nos muestra que sí tiene sentido. Hemos de escoger δ pequeño para poder expresar el integrando de $I(x,\delta)$ en serie de Taylor e integrar término a término, a continuación cambiamos δ por ∞ para evaluar más cómodamente los términos de la serie. La clave está en que cada vez que cambiamos los límites de integración sólo introducimos errores exponencialmente pequeños.

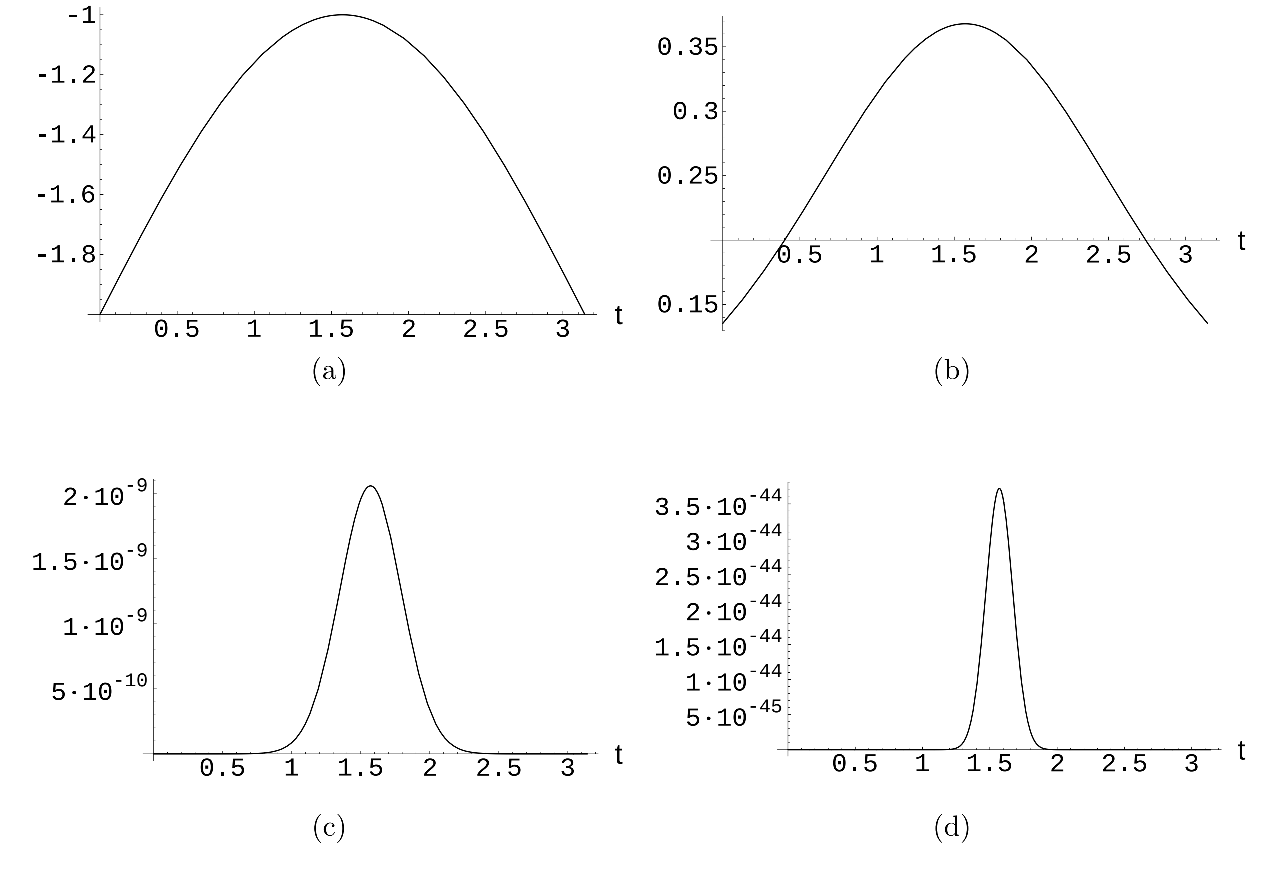


Figura 7.4: (a) $\phi(t) = \text{sen}(t) - 2$ frente a t. (b) $\exp[x\phi(t)]$ con $x = 1$. (c) $\exp[x\phi(t)]$ con $x = 20$. (d) $\exp[x\phi(t)]$ con $x = 100$.

- **Nota sobre la unicidad de las series asintóticas**. El ejemplo anterior nos sirve para ilustrar una propiedad característica de las series asintóticas, a saber, que *dos funciones distintas pueden tener la misma serie asintótica.* Por ejemplo, todas las funciones

$$I(x;\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t} dt$$

con $\alpha > 0$ tienen por serie asintótica a

$$I(x;\alpha) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \qquad \text{para} \quad x \to \infty$$

porque el hecho de que en

$$I(x) = \int_0^{10} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\, dt$$

el límite superior sea 10 no tiene ninguna transcendencia cuando calculamos (véase el ejemplo 7.15) la serie asintótica $I(x)$ para $x \to \infty$. Es obvio que $I(x;10) \neq I(x;20) \neq \cdots$ y sin embargo, estas funciones distintas tienen un mismo desarrollo asintótico para $x \to \infty$, que es justamente el que hallamos para $I(x;10) \equiv I(x)$ en el ejemplo 7.15. Sin embargo, debe quedar claro que una *función tiene un único desarrollo asintótico*, es decir, no existen dos series asintóticas distintas de una misma función.

7.8. Lema de Watson

El procedimiento que hemos empleado en el ejemplo 7.15 da lugar, al aplicarse sobre

$$I(x)=\int_0^b f(t)\, e^{-xt}\, dt \tag{7.47}$$

al llamado lema de Watson. Éste dice así:

Lema 7.2 (Lema de Watson) *Sea f(t) continua en el intervalo de integración $0 \le t \le b$, con el siguiente desarrollo asintótico:*[9]

$$f(t) \sim t^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{\beta n} \quad \textit{para } t \to 0^+, \tag{7.48}$$

donde que $\alpha > -1$ y $\beta > 0$.[10] *Además, si $b = +\infty$, debe ocurrir que $f(t) \ll e^{ct}$ cuando $(t \to \infty)$ para alguna constante positiva c.*[11] *Bajo estas condiciones, se verifica que*

$$I(x)=\int_0^b f(t)\, e^{-xt}\, dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}} \quad \textit{para } x \to \infty. \tag{7.49}$$

Nótese que, formalmente, esto equivale a introducir la integral dentro del sumatorio (es decir, a integrar término a término) y tomar $b \to \infty$.

Demostración. Sabemos que:

1. Si $b =$ finito y $f(t)$ es continua, entonces

$$\sup_{\delta \le t \le b} |f(t)| = \text{finito}$$

   y por tanto

$$\int_\delta^b f(t)\, e^{-xt} \le \sup_{\delta \le t \le b} |f(t)| \int_\delta^b e^{-xt} = \text{TExP}, \quad x \to \infty.$$

2. Si $b = \infty$ y $f(t) \ll e^{ct}$ se tiene que

$$\int_\delta^b f(t)\, e^{-xt} \ll \int_\delta^b e^{ct}\, e^{-xt} = \text{TExP}, \quad x \to \infty.$$

En cualquiera de los dos casos, encontramos que

$$I(x) = I(x,\delta) + \text{TExP} = \int_0^\delta f(t)\, e^{-xt}\, dt + \text{TExP}, \quad x \to \infty. \tag{7.50}$$

[9] Esto es una condición más débil que imponer que sea convergente, pues recuérdese que convergente implica asintótico pero no lo contrario

[10] Si no fuera así, la integral $I(x)$ no convergería.

[11] Esta condición se impone para que $I(x)$ converja.

Escogemos δ suficientemente pequeño de modo que los primeros N términos de la serie asintótica (7.48) sean una buena aproximación de $f(t)$:

$$\left| f(t) - t^{\alpha} \sum_{n=0}^{N} a_n t^{\beta n} \right| \leq k\, t^{\alpha+\beta\,(N+1)}\,, \quad 0 \leq t \leq \delta, \tag{7.51}$$

donde, por definición de serie asintótica, $0 \leq k < \infty$. Esto es equivalente a escribir

$$f(t) - t^{\alpha} \sum_{n=0}^{N} a_n t^{\beta n} = O\big(t^{\alpha+\beta\,(N+1)}\big), \quad t \to 0^{+}\,.$$

Multiplicando (7.51) por e^{-xt} e integrando entre 0 y δ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} k\, t^{\alpha+\beta\,(N+1)}\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt &\geq \int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-xt} \left| f(t) - t^{\alpha} \sum_{n=0}^{N} a_n t^{\beta n} \right| dt \\
&\geq \left| \int_0^{\delta} \mathrm{e}^{-xt} \left[f(t) - t^{\alpha} \sum_{n=0}^{N} a_n t^{\beta n} \right] dt \right| \\
&\geq \left| I(x,\delta) - \sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^{\delta} t^{\alpha+\beta n}\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt \right|.
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} k\, t^{\alpha+\beta\,(N+1)}\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt &= \int_0^{\infty} k\, t^{\alpha+\beta\,(N+1)}\, \mathrm{e}^{-xt} + \mathrm{TExP} \\
&= k\, \frac{\Gamma\big(\alpha+\beta\,(N+1)+1\big)}{x^{\alpha+\beta\,(N+1)+1}} + \mathrm{TExP}
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\left| I(x,\delta) - \sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^{\delta} t^{\alpha+\beta n}\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt \right| = O\big[x^{-\alpha-\beta\,(N+1)-1}\big].$$

Por último, reemplazamos δ por ∞, y usamos la relación

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta n}\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt = \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}},$$

para obtener

$$\left| I(x) + \mathrm{TExP} - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}} + \mathrm{TExP} \right| = O\big[x^{-\alpha-\beta\,(N+1)-1}\big],$$

es decir,

$$I(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}} = O\big[x^{-\alpha-\beta\,(N+1)-1}\big].$$

Luego, por definición de serie asintótica,

$$I(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\alpha+\beta n+1)}{x^{\alpha+\beta n+1}}, \qquad x \to \infty, \quad \text{c.q.d.} \tag{7.52}$$

▶ *Ejemplo 7.16*

Una representación integral de la función de Bessel modificada $K_0(x)$ es

$$K_0(x) = \int_1^\infty (s^2-1)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-xs}\, ds.$$

Vamos a hallar una representación asintótica de $K_0(x)$ para $x \to \infty$ mediante el lema de Watson.

Empezamos por expresar $K_0(x)$ en términos de una integral con límites de integración 0 e ∞. Para ello utilizamos el cambio de variable,

$$s = t+1 \Rightarrow \begin{cases} s=1 \Rightarrow t=0, \\ s=\infty \Rightarrow t=\infty, \end{cases}$$

de modo que la integral se transforma en

$$\begin{aligned} K_0(x) &= \int_0^\infty \left[(t+1)^2-1\right]^{-1/2} \mathrm{e}^{-x(t+1)}\, dt \\ &= \mathrm{e}^{-x} \int_0^\infty (t^2+2t)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-xt}\, dt. \end{aligned}$$

Así hemos logrado expresar la integral en la forma estándar de la integral del lema de Watson [véase la ecuación (7.47)].
Ahora expresamos $f(t) = (t^2+2t)^{-1/2}$ en serie de potencias de t mediante la fórmula del binomio generalizado (véase la fórmula (2.168) en la página 124):

$$\begin{aligned} (t^2+2t)^{-1/2} &= (2t)^{-1/2}\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-1/2} \\ &= (2t)^{-1/2} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{t}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Aplicar el lema de Watson es equivalente a intercambiar el orden de la integral y el sumatorio, de modo que

$$\begin{aligned} K_0(x) &\sim \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2^{n+\frac{1}{2}}\, n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt}\, t^{n-\frac{1}{2}}\, dt \\ &\sim \mathrm{e}^{-x} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{2^{n+\frac{1}{2}}\, n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad x\to\infty\,. \end{aligned}$$

◀

7.9. Desarrollo asintótico de integrales generalizadas de Laplace

El lema de Watson sólo se aplica a integrales de Laplace en las que $\phi(t) = -t$. Para funciones $\phi(t)$ más generales podemos proceder de dos modos que expondremos en las secciones siguientes.

7.9.1. Primer modo. Cambio de variable

Si $\phi(t)$ es suficientemente simple, puede intentarse el siguiente cambio de variable:

$$s = -\phi(t) \Rightarrow t = \phi^{-1}(-s),$$

de modo que

$$I(x) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{e}^{x\phi(t)}\;dt = \int_{-\phi(a)}^{-\phi(b)} F(s)\,\mathrm{e}^{-xs}\;ds,$$

donde

$$F(s) = f\left[\phi^{-1}(s)\right]\frac{d\phi^{-1}(s)}{ds}.$$

La última integral tiene la forma adecuada para aplicar sin más el lema de Watson.

▶ *Ejemplo 7.17*

Queremos hallar el comportamiento de

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{sen}^2 t}\;dt \qquad \text{cuando } x\to\infty.$$

Aquí $\phi(t) = -\,\mathrm{sen}^2 t$ por lo que

$$s = \mathrm{sen}^2 t \Rightarrow ds = 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t\,dt = 2\sqrt{\mathrm{sen}^2 t}\,\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 t}\,dt = 2\sqrt{s}\,\sqrt{1-s}\,dt.$$

Por tanto la integral queda de la forma

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\mathrm{sen}^2 0}^{\mathrm{sen}^2 \pi/2} \mathrm{e}^{-xs}\,\frac{ds}{2\sqrt{s}\,\sqrt{1-s}} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[s\,(1-s)\right]^{-1/2}\mathrm{e}^{-xs}\;ds. \end{aligned}$$

Ahora ya podemos aplicar el lema de Watson porque

$$\begin{aligned} \left[s\,(1-s)\right]^{-1/2} &= s^{-1/2}(1-s)^{-1/2} \\ &= s^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,s^n \end{aligned}$$

para $|s|<1$, y por tanto

$$\begin{aligned} I(x) &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\infty} s^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-xs}\;ds, \qquad x\to\infty \\ &\sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{x^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad x\to\infty. \end{aligned}$$

◀

7.9.2. Segundo modo. Modo directo

En otras ocasiones la función $\phi(t)$, y sobre todo, la función inversa $t=\phi^{-1}(-s)$, es una función complicada multivaluada y el primer modo no es simple en absoluto. En estos casos puede ser más sencillo atacar el problema directamente. El procedimiento, que ya esbozamos en la página 427, es el siguiente:

I. Si $\phi(t)$ tiene un máximo absoluto en $t=c$, entonces aproximamos $I(x)$ por $I(x,\delta)$ tal como vimos en la página 427.

II. En la región estrecha $|t-c|\le\delta$:

1. Desarrollamos $f(t)$ en torno a $t = c$ y nos quedamos con el término dominante (es decir, el primer término no nulo); esto implicará obtener sólo el término dominante de $I(x)$. Por simplicidad, en lo que sigue supondremos que $f(t)$ es continua y que $f(c) \neq 0$. No obstante, veremos más adelante (página 436) cómo tratar casos en los que $f(c) = 0$.

2. Reemplazamos $\phi(t)$ por sus primeros términos del desarrollo de Taylor en torno a su máximo situado en $t = c$. Hay varias posibilidades. Discutiremos tres casos representativos:

   a) El máximo está situado en uno de los extremos de integración, es decir, $c = a$ ó $c = b$, y además $\phi'(c) \neq 0$. Entonces aproximamos $\phi(t)$ por

   $$\phi(t) \simeq \phi(c) + \phi'(c)\,(t - c).$$

   b) El máximo está situado en el interior del intervalo de integración, es decir, $a < c < b$, y además $\phi'(c) = 0$ (esto es necesario pues $\phi(t)$ es máximo en $t = c$), y $\phi''(c) \neq 0$. En este caso aproximamos $\phi(t)$ por

   $$\phi(t) \simeq \phi(c) + \frac{1}{2}\,\phi''(c)\,(t - c)^2.$$

   c) El máximo está situado en el interior del intervalo de integración, es decir, $a < c < b$, y además $\phi'(c) = \phi''(c) = \cdots = \phi^{(p-1)}(c) = 0$ y $\phi^{(p)}(c) \neq 0$. En este caso aproximamos $\phi(t)$ por

   $$\phi(t) \simeq \phi(c) + \frac{1}{p!}\,\phi^{(p)}(c)\,(t - c)^p.$$

   En resumen, desarrollamos $\phi(t)$ en torno a $t = c$ quedándonos con el primer término correctivo a $\phi(c)$ que sea no nulo.

Hay algunos otros casos posibles (véase el ejercicio 7.2 o los ejemplos 7.18.1 y 7.18.2) pero el modo de resolverlos debería deducirse inmediatamente de la discusión que haremos de los tres casos anteriores.

III. A continuación sustituimos estas aproximaciones en $I(x, \delta)$ y evaluamos el término dominante de la integral ampliando el intervalo de integración a infinito. Analizamos separadamente cada uno de los casos del apartado II.2:

1. En el caso II.2*a* se tenía que $c = a$ ó $c = b$ y $\phi'(c) \neq 0$:

   a) Si $c = a$ entonces $\phi'(a) < 0$ y se tiene que

   $$I(x, \delta) \sim \int_a^{a+\delta} f(a)\, \mathrm{e}^{x\,[\phi(a) + \phi'(a)\,(t-a)]}\, dt\,.$$

   Haciendo $\delta \to \infty$ sólo introducimos términos exponencialmente pequeños, luego, para $x \to \infty$,

   $$\begin{aligned} I(x) &\sim f(a)\ \mathrm{e}^{x\phi(a)} \int_a^\infty \mathrm{e}^{x\phi'(a)\,(t-a)}\ dt \\ &\sim f(a)\ \mathrm{e}^{x\phi(a)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{x\phi'(a)\,s}\ ds \\ &\sim f(a)\ \mathrm{e}^{x\phi(a)} \left.\frac{\mathrm{e}^{x\phi'(a)\,s}}{x\phi'(a)}\right|_0^\infty \\ &\sim -\frac{f(a)\ \mathrm{e}^{x\phi(a)}}{x\,\phi'(a)}\,. \end{aligned} \tag{7.53}$$

b) Si $c = b$, debe ocurrir que $\phi'(b) > 0$ y, procediendo de modo similar al caso anterior, tenemos que

$$I(x,\delta) \sim \int_{b-\delta}^{b} f(b)\,\mathrm{e}^{x\,[\phi(b)+\phi'(b)\,(t-b)]}\,dt\,, \quad x\to\infty\,.$$

Haciendo $\delta\to\infty$ encontramos que, para $x\to\infty$,

$$\begin{aligned} I(x) &\sim f(b)\ \mathrm{e}^{x\phi(b)} \int_{-\infty}^{b} \mathrm{e}^{x\phi'(b)\,(t-b)}\ dt \\ &\sim -\frac{f(b)\ \mathrm{e}^{x\phi(b)}}{x\,\phi'(b)}\,. \end{aligned} \tag{7.54}$$

2. En el caso II.2b se tiene que $\phi'(c) = 0$. Si además $a < c < b$, entonces $\phi''(c) = 0$ porque, recordemos, $\phi(c)$ es un máximo de $\phi(t)$. Por consiguiente

$$I(x,\delta) \sim \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(c)\,\mathrm{e}^{x\,[\phi(c)+\frac{1}{2}\,\phi''(c)\,(t-c)^2]}\ dt, \qquad x\to\infty.$$

Haciendo $\delta\to\infty$ sólo introducimos términos exponencialmente pequeños, luego

$$I(x) \sim f(c)\ \mathrm{e}^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\,x\,\phi''(c)\,(t-c)^2}\ dt, \qquad x\to\infty,.$$

Ahora hacemos

$$s^2 = -\frac{1}{2}x\,\phi''(c)\,(t-c)^2 \Rightarrow s = \sqrt{-\frac{x\,\phi''(c)}{2}}\,(t-c),$$

y por tanto

$$I(x) \sim -\frac{f(c)\ \mathrm{e}^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\,\frac{\phi''(c)}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\ ds, \qquad x\to\infty. \tag{7.55}$$

Pero $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\ ds = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\ ds$. Empleando el cambio de variable $s^2 = u$ en esta integral, y teniendo en cuenta la definición de la función gamma [ecuación (2.170), página 125], encontramos que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\ ds = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Por tanto

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi}\,f(c)\ \mathrm{e}^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\,\phi''(c)}}, \qquad x\to\infty. \tag{7.56}$$

▷ ***Ejercicio*** *7.2*

Calcúlese $I(x)$ *asintóticamente para* $x\to\infty$ *si* $\phi'(c) = 0$, $c = a$ *y* $\phi''(c) < 0$.

3. En el caso II.2c sucede que $\phi'(c) = \phi''(c) = \cdots = \phi^{(p-1)}(c) = 0$. Si $a < c < b$, debe ocurrir que p debe ser par y $\phi^{(p)}(c) < 0$, pues en otro caso $\phi(c)$ no sería un máximo. En este caso

$$I(x,\delta) \sim \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(c)\,\mathrm{e}^{x\,[\phi(c)+\frac{1}{p!}\,\phi^{(p)}(c)\,(t-c)^p]}\ dt.$$

Haciendo $\delta \to \infty$ sólo introducimos términos exponencialmente pequeños, y por tanto

$$I(x) \sim f(c)\, \mathrm{e}^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{p!}\phi^{(p)}(c)\,(t-c)^p}\, dt.$$

Hacemos el cambio,

$$s^p = -\frac{1}{p!} x\,\phi^{(p)}(c)\,(t-c)^p \Rightarrow s = \left[-\frac{x\,\phi^{(p)}(c)}{p!}\right]^{1/p} (t-c),$$

y entonces

$$I(x) \sim \frac{f(c)\, \mathrm{e}^{x\phi(c)}}{\left[-\frac{x\,\phi^{(p)}(c)}{p!}\right]^{1/p}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^p}\, ds.$$

Como p es par se tiene que $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-s^p}\, ds = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^p}\, ds$. Además, mediante el cambio de variable $s^p = u$ encontramos que

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^p}\, ds = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\, u^{\frac{1}{p}-1}\, du = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right).$$

Por tanto

$$I(x) \sim \frac{2}{p}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\, (p!)^{1/p}}{\left[x\,\phi^{(p)}(c)\right]^{1/p}}\, f(c)\, \mathrm{e}^{x\phi(c)}, \qquad x \to \infty. \tag{7.57}$$

▷ ***Ejercicio** 7.3*

Calcúlese $I(x)$ asintóticamente para $x \to \infty$ si $c = a$, $\phi'(a) = \phi''(a) = \cdots \phi^{(p-1)}(c) = 0$ y $\phi^{(p)}(c) < 0$.

▶ *Ejemplo 7.18*

A continuación se muestran unos ejemplos:

1.
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-x\,\tan t}\, dt \sim \frac{1}{x} \qquad \text{para} \quad x \to \infty\,.$$

Esta integral pertenece al caso III.1a, con $c = a = 0$ y $\phi'(a) = 0$.

2.
$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{senh}^2 t}\, dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \qquad \text{para} \quad x \to \infty\,.$$

Esta integral casi pertenece al caso III.2 con $c = a = 0$, $\phi'(a) = 0$ y $\phi''(a) \neq 0$. No es exactamente igual al caso discutido en el apartado III.2 porque en este ejemplo el máximo de $\phi(t)$ no está situado en el interior del intervalo de integración. Esto no conlleva un cambio sustancial en el procedimiento usado en el apartado III.2 para estimar el desarrollo asintótico de la integral. Es fácil ver que simplemente el límite inferior de integración de (7.55) cambia de $-\infty$ a 0, de modo que el valor de la integral $I(x)$ se reduce en un factor 2. En definitiva, la ecuación (7.56) se convierte en

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}\, f(a)\, \mathrm{e}^{x\phi(a)}}{\sqrt{-2x\,\phi''(a)}}, \qquad x \to \infty.$$

En nuestro ejemplo $a = 0$, $\phi(t) = -\,\mathrm{senh}^2 t$ y $f(t) = 1$, y la expresión anterior se reduce a $I(x) \sim \sqrt{\pi/4x}$.

3.
$$\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-x\,\mathrm{sen}^4 t}\, dt \sim \frac{\Gamma(1/4)}{2x^{1/4}} \qquad \text{para} \quad x \to \infty\,.$$

Esta integral corresponde al caso III.3 con $p = 4$.

4.
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (t+2)\, \mathrm{e}^{-x\,\cos t}\, dt \sim \frac{4}{x} \qquad \text{para} \quad x \to \infty\,.$$

Esta integral pertenece al caso III.1, aunque debe notarse que los *dos* extremos de integración ($t = -\pi/2$ y $t = \pi/2$) contribuyen a la aproximación asintótica pues la función $\phi(t) = -\cos t$ tiene un máximo (absoluto) en ambos extremos. Un modo sencillo de tratar estos casos que poseen más de un máximo absoluto (es decir, máximos absolutos iguales) es descomponiendo la integral original en suma de integrales con intervalos de integración en los que sólo se encuentre un máximo absoluto. En nuestro caso podríamos, por ejemplo, descomponer la integral así:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (t+2)\, \mathrm{e}^{-x\,\cos t}\, dt = \int_{-\pi/2}^{0} (t+2)\, \mathrm{e}^{-x\,\cos t}\, dt + \int_{0}^{\pi/2} (t+2)\, \mathrm{e}^{-x\,\cos t}\, dt\,.$$

La primera integral es simplemente del tipo considerado en el apartado III.1a y la segunda pertenece al caso discutido en el apartado III.1b.

◄

Caso con $f(t) \sim f_0 (t-c)^\lambda$.

En este apartado analizaremos un caso en el que $f(c) = 0$, más específicamente, analizaremos el caso en el que
$$f(t) \sim f_0 (t-c)^\lambda \quad \text{para} \quad t \to c$$
con $\lambda > 0$. Además supondremos que la función $\phi(t)$ de la integral
$$I(x) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt\,, \qquad x \to \infty\,,$$
satisface la condición
$$\phi'(c) = 0, \;\; \phi''(c) < 0 \quad \text{para} \quad a < c < b.$$

Procederemos como en casos anteriores y aproximamos $I(x)$ por $I(x,\delta)$ donde
$$I(x,\delta) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f_0 (t-c)^\lambda\, \mathrm{e}^{x[\phi(c) + \frac{1}{2}\phi''(c)\,(t-c)^2]}\, dt,$$
es decir, tomamos el término dominante de $f(t)$ en $t = c$ y *hasta* el primer término correctivo de $\phi(t)$ en $t = c$. Haciendo $\delta \to \infty$, obtenemos
$$I(x) \sim f_0\, \mathrm{e}^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} (t-c)^\lambda\, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x\phi''(c)\,(t-c)^2}\, dt.$$

Ahora hacemos el cambio habitual:
$$s^2 = -\frac{1}{2} x\, \phi''(c)\, (t-c)^2 \Rightarrow t - c = \left[-\frac{2}{x\,\phi''(c)}\right]^{1/2} s,$$

y obtenemos que, para $x \to \infty$,

$$\begin{aligned} I(x) &\sim f_0 \, \mathrm{e}^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{-2}{x\,\phi''(c)} \right]^{\lambda/2} s^{\lambda} \, \mathrm{e}^{-s^2} \left[-\frac{2}{x\,\phi''(c)} \right]^{1/2} ds \\ &\sim f_0 \, \mathrm{e}^{x\phi(c)} \left[\frac{-2}{x\,\phi''(c)} \right]^{\frac{\lambda+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} s^{\lambda} \, \mathrm{e}^{-s^2} \, ds. \end{aligned} \tag{7.58}$$

Ahora hay dos posibilidades:

- Si λ es impar la integral se anula y habría que incorporar el siguiente término del desarrollo asintótico de $f(t)$.
- Si λ es par, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} s^{\lambda} \, \mathrm{e}^{-s^2} \, ds &= 2 \int_{0}^{\infty} s^{\lambda} \, \mathrm{e}^{-s^2} \, ds \\ &= \int_{0}^{\infty} u^{\frac{\lambda+1}{2}} \, \mathrm{e}^{-u} \, du \\ &= \Gamma\left(\frac{\lambda+3}{2} \right). \end{aligned}$$

  En este caso

$$I(x) \sim f_0 \left[\frac{-2}{x\,\phi''(c)} \right]^{\frac{\lambda+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\lambda+3}{2} \right) \mathrm{e}^{x\phi(c)}, \qquad x \to \infty. \tag{7.59}$$

La condición $\lambda > 0$ se puede relajar a $\lambda > -1$. Sin embargo, $\lambda \le -1$ no es aceptable pues, en este caso, la integral $I(x)$ no existe.

7.9.3. Máximo no fijo

En el apartado anterior vimos el caso en el que $f(c)$ va a cero como una potencia de $(t-c)$ cuando $t \to c$:

$$f(t) \sim f_0 (t-c)^{\lambda}.$$

Ahora estudiaremos un caso en el que $f(t)$ va a cero cuando $t \to c$ más rápidamente que cualquier potencia de $(t-c)$:

$$I(x) = \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{1}{t-a}} \, \mathrm{e}^{-x\,(t-a)^2} \, dt, \qquad x \to \infty.$$

En este ejemplo $c = a$. Nótese que la función $f(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{t-a}}$ va a cero mucho más rápido que $(t-a)^{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$ cuando $t \to a$. Esto significa que no podemos aproximar $f(t)$ por el término dominante de su desarrollo asintótico en *potencias* de $(t-a)$. El procedimiento adecuado consiste en *no* separar $\exp[-1/(t-a)]$ de $\exp[-x\,(t-a)^2]$ y hallar la posición del *verdadero* máximo del integrando de $I(x)$. Para ello escribimos $I(x)$ como

$$I(x) = \int_a^b \mathrm{e}^{\phi(x,t)} \, dt, \tag{7.60}$$

donde

$$\phi(x,t) = -\frac{1}{t-a} - x\,(t-a)^2.$$

El máximo de esta función se da en el valor de t que satisface la ecuación

$$\frac{d\,\phi(x,t)}{dt} = 0 = \frac{1}{(t-a)^2} - 2x\,(t-a).$$

Despejando t obtenemos que la posición del máximo de $\phi(x,t)$ es

$$t = a + (2x)^{-1/3}. \tag{7.61}$$

Nótese que, a diferencia de los casos estudiados hasta ahora, la posición del máximo depende del valor de x. En estos casos se dice que el máximo es *movible o no fijo*.

Para aplicar el método de Laplace lo primero que haremos es transformar, mediante un cambio de variable, este problema en uno con máximo fijo, es decir, en una integral del tipo de (7.60) pero en la que el máximo del exponente ϕ no dependa de x. Para ello hacemos el cambio

$$t - a = x^{-1/3} s \tag{7.62}$$

de modo que, por la ecuación (7.61), vemos que el máximo de

$$\phi(x,t(s)) = \phi(x,s) = -(x^{-1/3}s)^{-1} - x\,(x^{-1/3}s)^2 = -x^{1/3}[s^{-1} + s^2]$$

está situado en $s = 2^{-1/3} = c$. Llevando a cabo el anunciado cambio de variable se tiene que

$$I(x) = x^{-1/3} \int_0^{(b-a)\,x^{1/3}} \mathrm{e}^{\phi(x,s)}\; ds\,. \tag{7.63}$$

Esta integral ya tiene la forma adecuada para aplicar las técnicas que hemos aprendido en la sección anterior. Vamos a hacerlo, pero ya sin demorarnos en los detalles. Sabemos que[12]

$$I(x) \sim I(x,\delta) = x^{-1/3} \int_{2^{-1/3}-\delta}^{2^{-1/3}+\delta} \mathrm{e}^{\phi(x,s)}\; ds\,.$$

Desarrollando $\phi(x,s)$ en torno a $s = 2^{-1/3}$,

$$\begin{aligned}\phi(x,s) &= \phi(x, s=2^{-1/3}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\phi(x,s)\Big|_{s=2^{-1/3}} (s-2^{-1/3})^2 + \cdots \\ &= x^{1/3}\left[-\frac{3}{2^{2/3}} - 3(s-2^{-1/3})^2 + \cdots\right],\end{aligned}$$

insertando este resultado en $I(x,\delta)$, y efectuando la integración tras hacer $\delta \to \infty$, se tiene que

$$\begin{aligned}I(x) &\sim x^{-1/3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(2x)^{1/3} - 3x^{1/3}(s-2^{-1/3})^2}\; ds \\ &\sim x^{-1/3}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(2x)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-3x^{1/3}(s-2^{-1/3})^2}\; ds\end{aligned}$$

para $x \to \infty$. Ahora hacemos el cambio de variable

$$u = \sqrt{3x^{1/3}}\,(s - 2^{1/3})$$

de modo que $du = 3^{1/2}x^{1/6}\,ds$ y así obtenemos

$$\begin{aligned}I(x) &\sim 3^{-1/2}x^{-1/3-1/6}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(2x)^{1/3}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\; du, \qquad x \to \infty \\ &\sim \left(\frac{\pi}{3x}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}(2x)^{1/3}}, \qquad x \to \infty\end{aligned}$$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2} = \sqrt{\pi}$.

[12]Nótese que estamos en el caso en el que el máximo $c = 2^{-1/3}$ está el interior del intervalo de integración: $0 < 2^{-1/3} < (b-a)\,x^{-1/3}$ para $x \to \infty$.

7.10. Integrales de Fourier

Una generalización obvia de las integrales de Laplace estudiadas en la sección anterior se da cuando $\phi(t)$ es compleja. En lo que sigue supondremos, sin perdida de generalidad, que $f(t)$ es real, pues si fuera compleja la descompondríamos como suma de su parte real e imaginaria:

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}[f(t)]\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt + i \int_a^b \mathrm{Im}[f(t)]\, \mathrm{e}^{x\phi(t)}\, dt$$

y evaluaríamos cada integral por separado. El hecho de que $\phi(t)$ sea compleja da lugar a dificultades nuevas no triviales. En esta sección empezaremos considerando el caso en el cual $\phi(t)$ es imaginaria pura:[13]

$$\phi(t) = i\psi(t) \quad \text{con} \quad \psi(t) real.$$

La integral que estudiaremos,

$$I(x) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{i\,x\psi(t)}\, dt, \tag{7.64}$$

con $f(t)$, $\psi(t)$, a, b y x reales, se conoce como integral generalizada de Fourier. Por supuesto, cuando $\psi(t) = t$ esta integral se reduce a una simple integral de Fourier.

7.10.1. Integración por partes de integrales de Fourier sin puntos estacionarios

Vimos en la sección 7.6 que en algunos casos es posible estudiar el comportamiento de $I(x)$ para $x \to \infty$ mediante integración por partes pues para usar esta técnica no es relevante el hecho de que la función $\phi(t)$ sea compleja. Ilustraremos esta afirmación mediante el siguiente ejemplo.

▶ *Ejemplo 7.19*

Vamos a calcular una aproximación asintótica de la integral de Fourier

$$I(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{1+t}\, dt$$

para $x \to \infty$. Lo haremos mediante integración por partes:

$$\left.\begin{array}{rcl} u &=& (1+t)^{-1} \\ dv &=& \mathrm{e}^{ixt}\, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du &=& -(1+t)^{-2}\, dt\,, \\ v &=& \dfrac{\mathrm{e}^{ixt}}{ix} = -i\dfrac{\mathrm{e}^{ixt}}{x}\,. \end{array}\right.$$

y por tanto

$$\begin{aligned} I(x) &= -i\frac{\mathrm{e}^{ixt}}{x}\;\frac{1}{1+t}\bigg|_0^1 - \frac{i}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{(1+t)^2}\, dt \\ &= -\frac{i}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{ix}}{x} + \frac{i}{x} - \frac{i}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{(1+t)^2}\, dt. \end{aligned} \tag{7.65}$$

La integral remanente es despreciable frente a los términos de contorno cuando $x \to \infty$; de hecho, se desvanece como $1/x^2$ cuando $x \to \infty$. Podemos comprobar esta afirmación integrando por partes una vez más escogiendo $u = (1+t)^{-2}$ y $dv = \mathrm{e}^{ixt}\, dt$:

$$-\frac{i}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{(1+t)^2}\, dt = -\frac{1}{4x^2}\,\mathrm{e}^{ix} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{(1+t)^3}\, dt.$$

[13] El caso general en el que $\phi(t)$ es compleja se estudia en la sección 7.11.

Pero esta última integral remanente es finita pues aplicando la desigualdad triangular encontramos que

$$\left|\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^3}\,dt\right| \le \int_0^1 \left|\frac{e^{ixt}}{(1+t)^3}\right| dt = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^3} = \frac{3}{8}.$$

Por tanto, para $x \to \infty$,

$$I(x) = -\frac{i}{2x}\,e^{ix} + \frac{i}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

o, usando otra notación,

$$I(x) \sim -\frac{i}{2x}\,e^{ix} + \frac{i}{x}, \quad x \to \infty\,. \tag{7.66}$$

Integrando repetidamente por partes se encontraría que

$$I(x) \sim e^{ix}\left[-\frac{i}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \cdots + \frac{(-i)^n(n-1)!}{(2x)^n} + \cdots\right] + \left[\frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{(-i)^n(n-1)!}{x^n} + \cdots\right]. \tag{7.67}$$

◀

▷ ***Ejercicio** 7.4*

Demuestra por inducción la relación (7.67).

En el ejemplo anterior hemos demostrado que las integrales remanentes que se iban obteniendo se desvanecían más rápidamente que los términos de contorno cuando $x \to \infty$. Podríamos haber justificado este hecho acudiendo al *lema de Riemann-Lebesgue*, el cual dice lo siguiente:

Lema 7.3 (Lema de Riemann-Lebesgue para integrales de Fourier)

$$\int_a^b f(t)\,e^{ixt}\,dt \to 0 \quad \textit{para} \;\; x \to \infty \tag{7.68}$$

siempre que $\int_a^b |f(t)|\,dt$ *exista.*

Utilizando este lema, el resultado (7.66) se podría haber deducido inmediatamente de (7.65) sin necesidad de integrar de nuevo por partes la integral remanente de (7.65). En efecto, dado que la integral

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{(1+t)^2}\right| dt$$

existe (de hecho, su valor es 1/2), el lema de Riemann-Lebesgue nos dice que la integral remanente de (7.65) tiene la propiedad

$$\int_0^1 \frac{e^{ixt}}{(1+t)^2}\,dt \to 0 \quad \text{para} \;\; x \to \infty$$

por lo que (7.65) se puede escribir como

$$I(x) = -\frac{i}{2x}\,e^{ix} + \frac{i}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

No demostraremos el lema de Riemann-Lebesgue, aunque podemos comprenderlo de un modo intuitivo si nos damos cuenta de que para $x \to \infty$ el integrando $f(t)\,e^{ixt}$ oscila muy rápidamente por lo que las contribuciones de los diferentes subintervalos de integración se cancelan dando lugar a una integral que tiende a cero cuando $x \to \infty$. Estas afirmaciones se corroboran en la figura 7.5 donde se ha representado la parte real del integrando de la integral del ejemplo 7.19 para $x = 200$.

El lema de Riemann-Lebesgue puede extenderse a las integrales generalizadas de Fourier, es decir, cuando $\psi(t) \neq t$. En este caso el lema afirma:

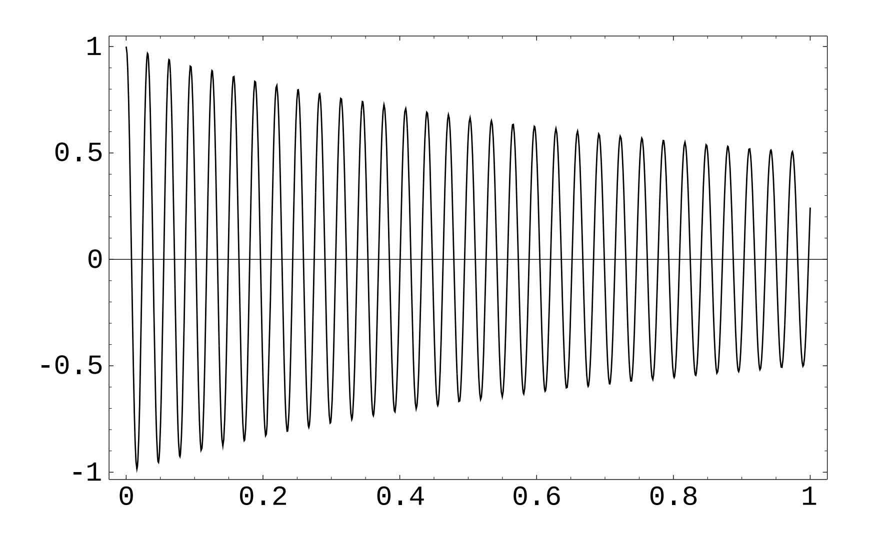


Figura 7.5: Parte real de la función $e^{ixt}/(1+t)$ para $x = 200$ frente a t en el intervalo $0 \le t \le 1$.

Lema 7.4 (Lema de Riemann-Lebesgue para integrales generalizadas de Fourier)

$$\int_a^b f(t)\, e^{ix\psi(t)}\, dt \to 0 \quad \textit{para} \;\; x \to \infty \tag{7.69}$$

siempre que:

1. *$|f(t)|$ sea integrable en el intervalo $[a,b]$, (es decir, si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ es finita).*
2. *$\psi(t)$ es una vez continuamente diferenciable en $a \le t \le b$ (esto es, la primera derivada es continua en $a \le t \le b$).*
3. *$\psi(t)$ no es constante en ningún subintervalo de $a \le t \le b$.*

► *Ejemplo 7.20*

Este lema implica que

$$\int_0^{10} t^3\, e^{ix\,\mathrm{sen}^2 t}\, dt \to 0 \quad \text{para} \;\; x \to \infty,$$

pues

1. $|t^3|$ es integrable en $[0,10]$ pues $\int_0^{10} |t^3|\,dt = 10^4/4$.
2. $\mathrm{sen}^2\, t$ es una vez continuamente diferenciable en $0 \le t \le 10$ pues su primera derivada $2\,\mathrm{sen}(t)\cos(t)$ es una función continua en $0 \le t \le 10$.
3. $\mathrm{sen}^2\, t$ no es constante en ningún subintervalo de $0 \le t \le 10$.

Sin embargo, el lema de Riemann-Lebesgue no permite afirmar nada sobre el valor de $\int_0^{10} t^3\, e^{i2x}\, dt$ para $x \to \infty$ pues en este caso $\psi(t) = 2$ es constante.

◄

Visto el éxito que hemos obtenido en el ejemplo 7.19 al ser capaces de hallar el desarrollo asintótico de una integral de Fourier para $x \to \infty$ mediante el método de integración por partes,

es natural que apliquemos este mismo método a la integral generalizada de Fourier. En este caso identificamos

$$\left.\begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{f(t)}{\psi'(t)} \\ dv & = & \psi'(t)\, e^{ix\psi(t)}\, dt \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} du & = & \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{f(t)}{\psi'(t)}\right] dt\,, \\ v & = & \dfrac{e^{ix\psi(t)}}{ix}\,, \end{array}\right.$$

y se tiene

$$I(x) = \frac{f(t)}{ix\psi'(t)}\, e^{ix\psi(t)}\Big|_{t=a}^{t=b} - \frac{1}{ix}\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{f(t)}{\psi'(t)}\right] e^{ix\psi(t)}\, dt.$$

Si $f(t)/\psi'(t)$ no se anula en $x = a$ y/o en $x = b$, y $\frac{d}{dt}\left[f(t)/\psi'(t)\right]$ y $\psi(t)$ satisfacen las condiciones del lema de Riemann-Lebesgue, entonces se verifica que

$$I(x) \sim \frac{f(t)}{ix\psi'(t)}\, e^{ix\psi(t)}\Big|_{t=a}^{t=b} \quad \text{para} \quad x \to \infty \tag{7.70}$$

pues la integral remanente, por el lema de Riemann-Lebesgue, va a cero más rápidamente que los términos de contorno cuando $x \to \infty$.

Es evidente que la integración por partes tendría problemas si $\psi'(t) = 0$ para algún $t \in [a, b]$. Los puntos en los que $\psi'(t) = 0$ se llaman *puntos estacionarios.*[14]

7.10.2. Integrales de Fourier con puntos estacionarios. Método de la fase estacionaria

Cuando hay puntos estacionarios, aún sigue siendo válido el lema de Riemann-Lebesgue, por lo que $I(x)$ sigue yendo a cero para $x \to \infty$, pero ahora lo hará menos rápidamente que $1/x$. Esto puede entenderse de un modo cualitativo (por supuesto, es posible demostrarlo de forma rigurosa) mediante el siguiente argumento: dado que $f(t)\, e^{i\psi(t)}$ oscila menos rápidamente cerca de un punto estacionario que en el resto de puntos, debe haber menor cancelación entre los subintervalos de integración adyacentes al punto estacionario, por lo que la integral irá a cero para $x \to \infty$ de un modo más lento que en el caso en el que no había puntos estacionarios. Estas afirmaciones pueden corroborarse a la vista de la figura 7.6 donde hemos representado la parte real de la función $e^{ix\psi(t)}/(1 + t)$ para $x = 200$ y donde $\psi(t) = (t - 1/2)^2$ tiene un punto estacionario en $t = 1/2$. Es muy instructivo que compares esta figura con la figura 7.5 (nótese que en esta figura $\psi(t) = t$, por lo que $\psi(t)$ no tiene ningún punto estacionario). Un poco de reflexión debería convencernos de que la figura 7.6 es representativa del comportamiento típico de los integrandos de las integrales generalizadas de Fourier en las vecindades de un punto estacionario cuando $x \to \infty$.

Se ha afirmado hace un momento que las integrales de Fourier con un punto estacionario van cero para $x \to \infty$ más lentamente que las integrales de Fourier sin punto estacionarios que, recuérdese, iban a cero como $1/x$. Podemos ser más precisos: vamos a demostrar dentro de un momento mediante el método de la fase estacionaria que el término dominante de las integrales generalizadas de Fourier en las que existe un punto estacionario $t = c$ con las propiedades $\psi'(c) = \psi''(c) = \cdots = \psi^{(n-1)}(c) = 0$ y $f(c) \neq 0$, viene dado por

$$I(x) \sim \frac{A}{x^{1/n}} \qquad \text{para } x \to \infty\,.$$

El valor de A lo daremos más adelante.

[14]Este nombre está bien elegido, ¿verdad?

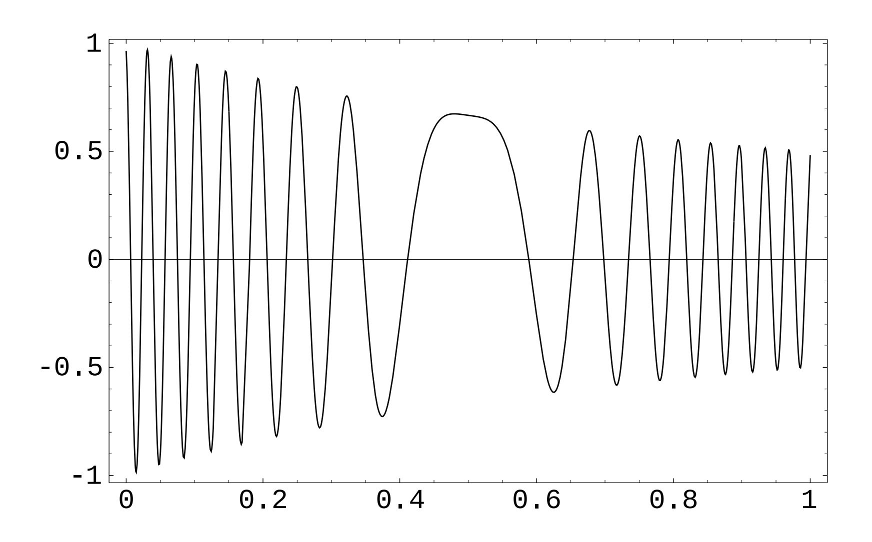


Figura 7.6: La parte real de la función $\mathrm{e}^{ix(t-1/2)^2}/(1+t)$ para $x = 200$ frente t para $0 \le t \le 1$. Compárese con la figura 7.5.

El método de la fase estacionaria es un método similar al de Laplace en lo que se refiere a que explota el hecho de que el término dominante de $I(x)$ procede de un pequeño intervalo de ancho δ que rodea al punto estacionario. La verdad de esta última afirmación debe resultarnos evidente a la vista de la figura 7.6.

Dado que cualquier integral generalizada de Fourier con puntos estacionarios puede escribirse como suma de integrales en las cuales $\psi'(t)$ se anule en uno de los extremos de integración[15] podemos estudiar el método de fase estacionaria sólo para integrales en las que el punto estacionario esté en uno de sus extremos, digamos, por concretar, en su extremo inferior:

$$\psi'(a) = 0, \quad \text{y} \quad \psi'(t) \neq 0 \quad \text{para } \; a < t \le b\,.$$

7.10.3. Método de la fase estacionaria. Caso simple.

Queremos obtener el término asintótico dominante de la integral

$$I(\alpha) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\, dt \tag{7.71}$$

cuando $\alpha \to \infty$, $\psi'(a) = 0$, $\psi''(a) \neq 0$ y $f(a) =$ finito. Nótese que hemos llamado α al parámetro que hasta ahora denotábamos por x. Usaremos esta nueva notación porque en adelante nos encontraremos con integrales en el plano complejo en las que x denotará (como es típico) la parte real de los números complejos.

Empezamos descomponiendo $I(\alpha)$ así

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_a^{a+\delta} f(t)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\, dt + \int_{a+\delta}^b f(t)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\, dt \\ &= I(\alpha,\delta) + \frac{A}{\alpha}, \qquad 0 < \delta \ll 1. \end{aligned}$$

[15]Esto se consigue sin más que situar el origen o final de los intervalos de integración justo sobre los puntos estacionarios.

La segunda integral va a cero como $1/\alpha$ porque no hay punto estacionario de $\psi(t)$ en el intervalo $[a+\delta, b]$. Dado que $0 < \delta \ll 1$ podemos usar la aproximación

$$f(t) \simeq f(a)\,,$$
$$\psi(t) \simeq \psi(a) + \frac{1}{2}\psi''(a)\,(t-a)^2\,,$$

para hallar el término dominante de $I(\alpha, \delta)$:

$$\begin{aligned} I(\alpha,\delta) &= \int_a^{a+\delta} f(t)\; \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\; dt \\ &\simeq f(a)\,\mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)} \int_a^{a+\delta} \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,(t-a)^2}\; dt. \end{aligned}$$

A fin de evaluar el término dominante de $I(\alpha, \delta)$ podemos hacer $\delta \to \infty$ pues el término espurio

$$f(a)\,\mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)} \int_\delta^\infty \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,(t-a)^2}\; dt,$$

que añadimos de este modo va a cero como $1/\alpha$ dado que la función $\frac{1}{2}\psi''(a)\,(t-a)^2$ que aparece en el exponente no tiene ningún punto estacionario en el intervalo $[\delta, \infty]$. Como esperamos[16] que $I(\alpha)$ decaiga a cero para $\alpha \to \infty$ mucho lentamente que $1/\alpha$, podemos despreocuparnos de estos términos que decaen tan rápidamente y escribir

$$I(\alpha) \sim f(a)\,\mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)} \int_a^\infty \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,(t-a)^2}\; dt + \frac{B}{\alpha}, \qquad \alpha \to \infty\,,$$

sin preocuparnos por el valor de B. Denotaremos a la integral que aparece en la expresión anterior como $J(\alpha)$, es decir,

$$J(\alpha) = \int_a^\infty \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,z^2}\; dt, \tag{7.72}$$

donde $z = t - a$.

Evaluaremos la integral $J(\alpha)$ mediante el teorema de Cauchy-Goursat. Recuérdese que este teorema nos dice que si la derivada de $F(z)$ (siendo z un número complejo) existe dentro y sobre el contorno cerrado simple $\mathcal{C}$ (es decir, si $F(z)$ es analítica dentro y sobre el contorno) entonces,

$$\int_{\mathcal{C}} F(z)\,dz = 0.$$

En lo que sigue, al integrando de (7.72) lo denotaremos por $F(z)$. Nótese que

$$F(z) = \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,z^2}$$

es una función analítica para todo z.

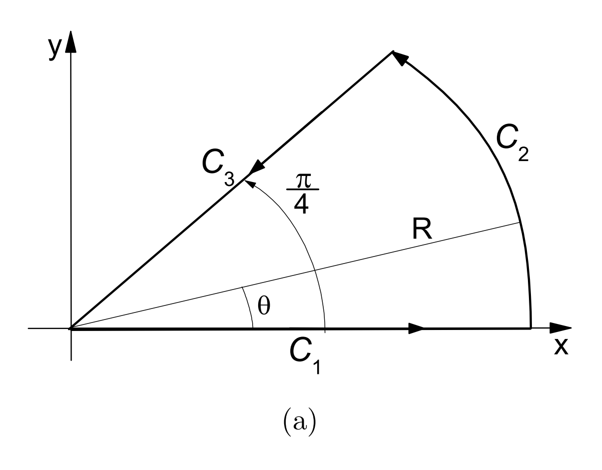
La idea clave para evaluar $J(\alpha)$ mediante el teorema de Cauchy-Goursat consiste en escoger $\mathcal{C}$ de modo tal que la integral de Fourier $J(\alpha)$ se transforme en una integral generalizada de Laplace cuyo comportamiento asintótico puede hallarse mediante las técnicas expuestas en la sección 7.9 anterior. Este contorno[17] $\mathcal{C}$ se muestra en la figura 7.7. Sobre este contorno se cumple que

$$\int_{\mathcal{C}} F(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}_1} F(z)\,dz + \int_{\mathcal{C}_2} F(z)\,dz + \int_{\mathcal{C}_3} F(z)\,dz = 0, \tag{7.73}$$

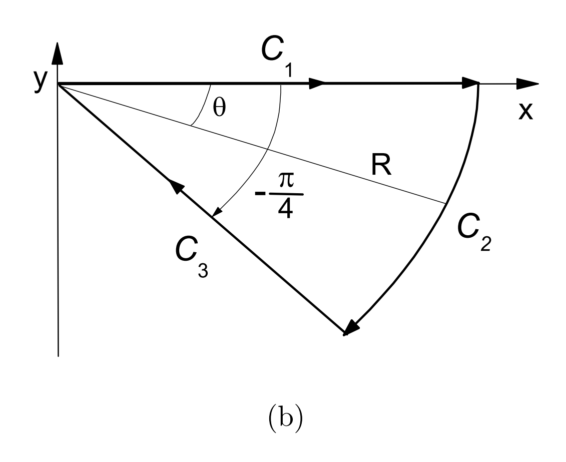
y la elección de $\mathcal{C}$ asegura que, en cada caso (a) o (b), se tiene que $\int_{\mathcal{C}_2} F(z)\,dz = 0$ para $R \to \infty$ y que $\int_{\mathcal{C}_3} F(z)\,dz$ toma la forma de una integral de Laplace. Veámoslo para cada caso.

[16] Por supuesto, esto habrá de confirmarse en el futuro. Los impacientes pueden ver el resultado final —y la confirmación de estas suposiciones— en la ecuación (7.79).

[17] La demostración que se hará en las páginas siguientes para llegar a la fórmula (7.78) debe aclarar el porqué este contorno es justamente el adecuado.



(a)



(b)

Figura 7.7: Contorno $\mathcal{C}$ para (a) $\psi''(a) > 0$ (b) $\psi''(a) < 0$.

Caso (a): $\psi''(a) > 0$

1. Sobre $\mathcal{C}_2$ se tiene que $z = x + i\,y = R\cos\theta + i\,R\,\mathrm{sen}\,\theta = R\,\mathrm{e}^{i\theta}$ y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} z^2 &= R^2\,\mathrm{e}^{i2\theta} = R^2\cos 2\theta + i\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta\,, \\ dz &= i\,R\,\mathrm{e}^{i\theta}\;d\theta\,, \\ \int_{\mathcal{C}_2} F(z)\,dz &= \int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,(R^2\cos 2\theta + i\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta)}\,i\,R\,\mathrm{e}^{i\theta}\;d\theta\,. \end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathcal{C}_2} F(z)\,dz\right| &\le \int_{\mathcal{C}_2} |F(z)|\,dz \\ &\le R\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}\;d\theta \\ &\le R\int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}\;d\theta + R\int_{\epsilon}^{\pi/4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}\;d\theta \end{aligned}$$

donde $0 < \epsilon \ll 1$. Analicemos por separado estas dos integrales:

- Como $\psi''(a) > 0$ y $\mathrm{sen}\,2\theta > 0$, se tiene que el integrando de

$$\int_{\epsilon}^{\pi/4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}\;d\theta$$

es exponencialmente pequeño para $R \to \infty$, por lo que

$$R\int_{\epsilon}^{\pi/4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}\;d\theta \to 0 \quad \text{para } R \to \infty.$$

- En la expresión

$$R\int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\,R^2\,\mathrm{sen}\,2\theta}\;d\theta$$

aproximamos $\operatorname{sen} 2\theta \simeq 2\theta$ para obtener

$$R\int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\, R^2 \operatorname{sen} 2\theta}\, d\theta \simeq R\int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-\alpha\psi''(a)\, R^2\theta}\, d\theta$$
$$\simeq \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha\psi''(a)R^2\epsilon}}{\alpha\, R\,\psi''(a)} \to 0 \quad \text{para} \quad R\to\infty.$$

En definitiva, encontramos que

$$\int_{\mathcal{C}_2} F(z)\, dz \to 0 \quad \text{para} \qquad R\to\infty. \tag{7.74}$$

2. Sobre $\mathcal{C}_3$ se tiene que

$$z = r\ \mathrm{e}^{i\pi/4} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = r^2\ \mathrm{e}^{i\pi/2} = i\, r^2\,, \\ dz = \mathrm{e}^{i\pi/4}\ dr\,. \end{cases}$$

   Por tanto,

$$\int_{\mathcal{C}_3} F(z)\, dz = \int_{\infty}^{0} \mathrm{e}^{i\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\, ir^2}\ \mathrm{e}^{i\pi/4}\ dr \tag{7.75}$$
$$= -\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\, r^2}\ dr \tag{7.76}$$

   que es una integral de Laplace generalizada que, como veremos más abajo, puede integrase fácilmente de forma exacta.

3. Sobre $\mathcal{C}_1$ se tiene que

$$\int_{\mathcal{C}_1} F(z)\, dz = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\alpha\psi''(a)\, x^2}\ dx \equiv J(\alpha). \tag{7.77}$$

Insertando los resultados de (7.74), (7.77) y (7.76) en (7.73), encontramos que

$$J(\alpha) = \mathrm{e}^{i\pi/4}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha\psi''(a)\, r^2}\ dr.$$

Nótese que, de forma efectiva, el problema de calcular un desarrollo asintótico de una integral de Fourier lo hemos transformado en el problema más simple (o al menos, en el que tenemos más experiencia) de calcular el desarrollo asintótico de una integral de Laplace. Esta última tarea es especialmente simple en este caso pues la integral anterior se puede calcular de forma exacta. Para ello hacemos el cambio $\tau = \left[\frac{1}{2}\alpha\,\psi''(a)\right]^{1/2} r$ para obtener

$$J(\alpha) = \mathrm{e}^{i\pi/4}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\alpha\,\psi''(a)}}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2}\ d\tau = \frac{\sqrt{\pi}\ \mathrm{e}^{i\pi/4}}{\sqrt{2\alpha\,\psi''(a)}} \tag{7.78}$$

pues $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\tau^2}\, d\tau = \sqrt{\pi}/2$.

En definitiva,

$$I(\alpha) \sim \frac{\sqrt{\pi}\, f(a)}{\sqrt{2\alpha\,\psi''(a)}}\,\mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)+i\pi/4}, \quad \alpha\to\infty. \tag{7.79}$$

Caso (b): $\psi''(a) < 0$

Procediendo de modo análogo a como se ha hecho en el caso (a), pero usando el contorno de integración que se muestra en la figura 7.7(b), se demuestra igualmente que

$$I(\alpha) \sim \frac{\sqrt{\pi}\, f(a)}{\sqrt{-2\alpha\, \psi''(a)}}\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)-i\pi/4}, \quad \alpha \to \infty. \tag{7.80}$$

7.10.4. Metodo de la fase estacionaria. Caso más general

Queremos evaluar la misma integral que vimos en la ecuación (7.71)

$$I(\alpha) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\, dt, \quad \alpha \to \infty\,,$$

pero ahora para el caso en el que $\psi'(a) = \psi''(a) = \cdots = \psi^{(n-1)}(a) = 0,\ \psi^{(n)}(a) \neq 0$ y $f(a) =$ finito $\neq 0$. La discusión y procedimiento en este caso es, salvo por ciertas modificaciones menores, igual al de la sección 7.10.3 anterior.

Procedemos como en el caso anterior descomponiendo la integral

$$I(\alpha) = I(\alpha, \delta) + \int_{a+\delta}^b f(t)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\, dt, \quad \alpha \to \infty.$$

Dado que $\psi(t)$ no tiene punto estacionario en $[a+\delta, b]$, se verifica que la segunda integral va como[18] A/α para $\alpha \to \infty$. Centrémosnos pues en la integral

$$\begin{aligned} I(\alpha, \delta) &= \int_a^{a+\delta} f(t)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\, dt \\ &\simeq \int_a^{a+\delta} f(a)\, \mathrm{e}^{i\alpha\left[\psi(a)+\frac{1}{n!}\psi^{(n)}(a)\,(t-a)^n\right]}\, dt \end{aligned}$$

Al hacer $\delta \to \infty$ introducimos sólo errores de orden $1/\alpha$ por lo que, para $\alpha \to \infty$,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &\sim f(a)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)} \int_a^\infty \mathrm{e}^{i\alpha\psi^{(n)}(a)\,(t-a)^n\frac{1}{n!}}\, dt + \frac{B}{\alpha} \\ &\sim f(a)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)} \int_a^\infty \mathrm{e}^{i\alpha\psi^{(n)}(a)\,z^n\frac{1}{n!}}\, dz + \frac{B}{\alpha} \\ &\sim J(\alpha) + \frac{B}{\alpha} \end{aligned}$$

donde

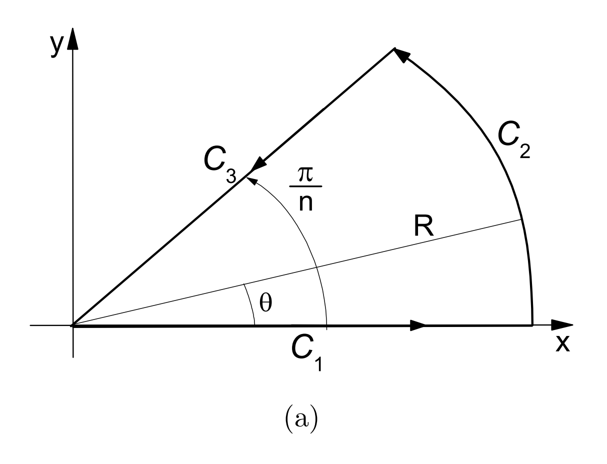
$$J(\alpha) = \int_a^\infty \mathrm{e}^{i\alpha\psi^{(n)}(a)\,z^n\frac{1}{n!}}\, dz.$$

Ahora evaluamos $J(\alpha)$ mediante el teorema de Cauchy-Goursat:

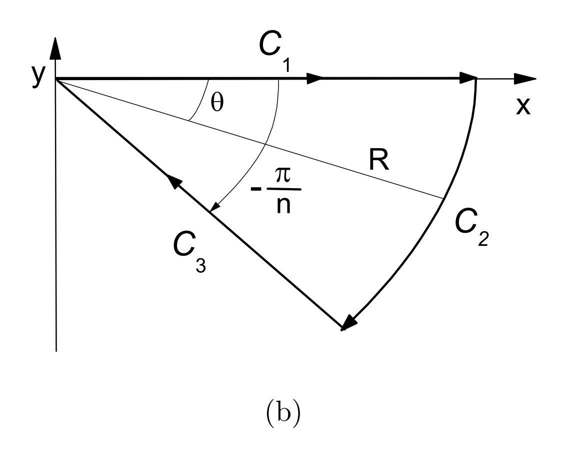
$$\int_{\mathcal{C}} F(z)\, dz = 0 \quad \text{con} \quad F(z) = \mathrm{e}^{i\alpha\psi^{(n)}(a)\,z^n\frac{1}{n!}},$$

escogiendo como contorno $\mathcal{C}$ el que se muestra en la figura 7.8. Es fácil demostrar aquí también,

[18] Lo que valga la constante A no es importante, pues veremos que el término A/α será despreciable frente a los procedentes de $I(\alpha)$ para $\alpha \to \infty$.



(a)



(b)

Figura 7.8: Contorno $\mathcal{C}$ para (a) $\psi^{(n)}(a) > 0$, (b) $\psi^{(n)}(a) < 0$.

procediendo como en el apartado 7.10.3 anterior, que $\int_{\mathcal{C}_2} F(z)\, dz \to 0$ para $\alpha \to 0$. Por supuesto, aquí también $\int_{\mathcal{C}_1} F(z)\, dz = J(\alpha)$. En definitiva, tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} F(z)\, dz = \int_{\mathcal{C}_1} F(z)\, dz + \int_{\mathcal{C}_2} F(z)\, dz + \int_{\mathcal{C}_3} F(z)\, dz = 0\,,$$

es decir,

$$J(\alpha) + 0 + \int_{\mathcal{C}_3} F(z)\, dz = 0\,.$$

Tenemos por tanto que

$$J(\alpha) = -\int_{\mathcal{C}_3} F(z)\, dz = -\int_{\mathcal{C}_3} \mathrm{e}^{\frac{i\alpha}{n!}\psi^{(n)}(a) z^n}\; dz.$$

Vamos a discutir cada caso ($\psi^{(n)}(a) > 0$ y $\psi^{(n)}(a) < 0$) por separado.

Caso (a): $\psi^{(n)}(a) > 0$

Sobre el contorno $\mathcal{C}_3$ que se muestra en la figura 7.8(a) se tiene que $z = r \exp\left(\frac{i\pi}{2n}\right)$, y por tanto $z^n = ir^n$ sobre $\mathcal{C}_3$. Esto significa que $J(\alpha)$ se transforma en una integral *real*, en una integral de Laplace:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{i\frac{\alpha}{n!}\psi^{(n)}(a)\, ir^n}\, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}\; dr \\ &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{n!}\psi^{(n)}(a)\, r^n}\; dr\,. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $s = \frac{\alpha}{n!}\psi^{(n)}(a)\, r^n$, obtenemos,

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}\, \frac{1}{n} \left[\frac{\alpha}{n!}\psi^{(n)}(a)\right]^{-1/n} \int_0^\infty s^{\frac{1}{n}-1}\, \mathrm{e}^{-s}\; ds \\ &= \left[\frac{n!}{\alpha\, \psi^{(n)}(a)}\right]^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{n}\, \mathrm{e}^{i\pi/2n}\,. \end{aligned}$$

En definitiva, dado que $1/\alpha^{1/n}$ domina sobre $1/\alpha$ para $\alpha \to \infty$, encontramos que

$$I(\alpha) \sim \left[\frac{n!}{\alpha\, \psi^{(n)}(a)}\right]^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{n}\, f(a)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi^{(n)}(a) + i\frac{\pi}{2n}}, \quad \alpha \to \infty. \tag{7.81}$$

Caso (b): $\psi^{(n)}(a) < 0$

Procediendo como en el caso (a), pero usando ahora el contorno $\mathcal{C}_3$ de la figura 7.8(b), se encuentra sin mayor dificultad que

$$I(\alpha) \sim \left[-\frac{n!}{\alpha\, \psi^{(n)}(a)}\right]^{1/n} \frac{\Gamma(1/n)}{n}\, f(a)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi^{(n)}(a) - i\frac{\pi}{2n}}, \quad \alpha \to \infty. \tag{7.82}$$

7.10.5. Método de la fase estacionaria cuando $f(t) \sim f_0\,(t-a)^\lambda$ en el punto estacionario a

Queremos conocer en esta sección el desarrollo asintótico de la integral

$$I(\alpha) = \int_a^b f(t)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(t)}\, dt.$$

cuando el punto estacionario de $\psi(t)$ está en $t = a$ y cuando sucede que la función $f(t)$ no toma un valor finito distinto de cero en $t = a$ (tal como había sucedido hasta ahora) sino que se comporta como

$$f(t) \sim f_0\,(t-a)^\lambda \tag{7.83}$$

en las vecindades del punto estacionario. Vamos a suponer además que

$$\psi(t) = \psi(a) + \frac{1}{n!}\psi^{(n)}(a)\,(t-a)^n + \cdots \tag{7.84}$$

es decir que $\psi'(a) = \psi''(a) = \cdots = \psi^{(n-1)}(a) = 0$ y $\psi^{(n)}(a) \neq 0$.

Procedemos como en las secciones anteriores y, para $\alpha \to \infty$ aproximamos $I(\alpha)$ así:

$$I(\alpha) \sim I(\alpha, \delta) = \int_a^{a+\delta} f(t)\, \mathrm{e}^{ix\psi(t)}\, dt\,.$$

Insertando en esta integral las expresiones de $\psi(t)$ y $f(t)$ de las ecuaciones (7.83) y (7.84) encontramos que

$$I(\alpha, \delta) \sim \int_a^{a+\delta} f_0\,(t-a)^\lambda\, \mathrm{e}^{i\alpha\left[\psi(a) + \frac{1}{n!}\psi^{(n)}(a)\,(t-a)^n\right]}\, dt.$$

Haciendo $\delta \to \infty$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &\sim f_0\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)} \int_a^\infty (t-a)^\lambda\, \mathrm{e}^{i\alpha\frac{1}{n!}\psi^{(n)}(a)\,(t-a)^n}\, dt \\
&\sim f_0\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)} \int_0^\infty z^\lambda\, \mathrm{e}^{i\alpha\frac{1}{n!}\psi^{(n)}(a)\, z^n}\, dz \\
&\sim f_0\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)}\, J(\alpha).
\end{aligned}$$

Para evaluar $J(\alpha)$ procederemos como en los apartados anteriores: usamos el teorema de Cauchy-Goursat para transformar $J(\alpha)$ en una integral de Laplace, elegimos contorno $\mathcal{C}$ como en el apartado 7.10.4 anterior [véase la figura 7.8(a)] y distinguimos dos casos según $\psi^{(n)}(a)$ sea mayor o menor que cero.

Caso (a): $\psi^{(n)}(a) > 0$

De igual modo que en la sección 7.10.4 anterior, es posible demostrar que $\int_{\mathcal{C}_2} F(z)\,dz \to 0$ para $R \to \infty$, por lo que

$$\int_{\mathcal{C}_1} F(z)\,dz = J(\alpha) = -\int_{\mathcal{C}_3} F(z)\,dz.$$

Pero sobre el contorno $\mathcal{C}_3$ de la figura 7.8(a) se tiene que $z = r\exp\left(i\frac{\pi}{2n}\right)$, por lo que la tarea de evaluar la integral compleja anterior se convierte en la tarea de evaluar una integral real:

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= -\int_{\infty}^{0} \left[r\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}\right]^{\lambda}\ \mathrm{e}^{i\alpha\frac{1}{n!}\psi^{(n)}(a)\,ir^n}\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2n}}\ dr \\ &= \mathrm{e}^{i\,(\lambda+1)\,\frac{\pi}{2n}} \int_0^{\infty} r^{\lambda}\ \mathrm{e}^{-\alpha\frac{1}{n!}\psi^{(n)}(a)\,r^n}\ dr\,. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable $s = \frac{\alpha}{n!}\psi^{(n)}(a)\,r^n$, con lo que obtenemos,

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \mathrm{e}^{i\,(\lambda+1)\,\frac{\pi}{2n}}\ \frac{1}{n}\ \left[\frac{n!}{\alpha\,\psi^{(n)}(a)}\right]^{\frac{\lambda+1}{n}} \int_0^{\infty} s^{-1+\frac{\lambda+1}{n}}\ \mathrm{e}^{-s}\ ds \\ &= \left[\frac{n!}{\alpha\,\psi^{(n)}(a)}\right]^{\frac{\lambda+1}{n}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{n}\right)}{n}\ \mathrm{e}^{i\,(\lambda+1)\,\frac{\pi}{2n}}\ . \end{aligned}$$

En definitiva,

$$I(\alpha) \sim \left[\frac{n!}{\alpha\,\psi^{(n)}(a)}\right]^{\frac{\lambda+1}{n}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{n}\right)}{n}\ f_0\ \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)+i(\lambda+1)\frac{\pi}{2n}}, \quad \alpha\to\infty\,. \tag{7.85}$$

Caso (b): $\psi^{(n)}(a) < 0$

De forma análoga al caso (a), pero ahora usando el contorno $\mathcal{C}_3$ de la figura 7.8(b), es fácil demostrar que

$$I(\alpha) \sim \left[-\frac{n!}{\alpha\,\psi^{(n)}(a)}\right]^{\frac{\lambda+1}{n}}\ \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{n}\right)}{n}\ f_0\ \mathrm{e}^{i\alpha\psi(a)-i(\lambda+1)\frac{\pi}{2n}}, \quad \alpha\to\infty\,. \tag{7.86}$$

7.11. Método de la máxima pendiente

El método de la máxima pendiente es una técnica muy relacionada con el método de Laplace (y de la fase estacionaria) que sirve para hallar el comportamiento asintótico de integrales de la forma

$$I(\alpha) = \int_C f(z)\ \mathrm{e}^{\alpha h(z)}\,dz = \int_C f(z)\ \mathrm{e}^{\alpha\phi(z)}\ \mathrm{e}^{i\alpha\psi(z)}\ dz \tag{7.87}$$

para $\alpha\to\infty$, donde C es un contorno de integración en el plano complejo, $f(z)$ y

$$h(z) = \phi(z) + i\psi(z)$$

son funciones analíticas de z, y $\phi(z)$ y $\psi(z)$ son funciones reales. A diferencia de las integrales del método de fase estacionaria, en el que el argumento del exponente era un número imaginario puro, o del método de Laplace, en el que el argumento era un número real, ahora el argumento de la integral (7.87) tiene parte real *y* parte imaginaria.

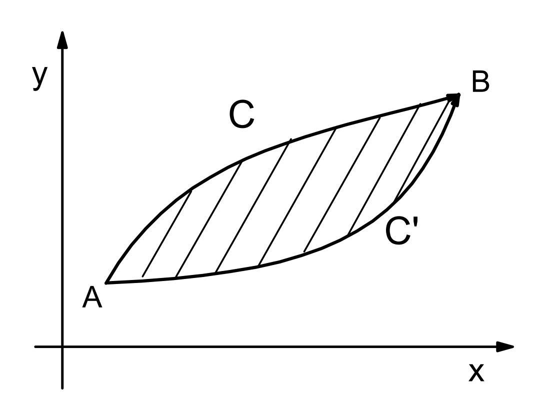


Figura 7.9: La integral $\int_C F(z)dz$ y $\int_{C'} F(z)dz$ son iguales si $F(z)$ es analítica en los contornos C y C', y en la región comprendida entre estos contornos (región rayada). El contorno C [C'] es la línea gruesa superior [inferior] que va desde el punto A hasta el punto B.

La clave del método de máxima pendiente consiste en usar el hecho de que el integrando de (7.87) es analítico para deformar el contorno C y transformarlo en un nuevo contorno de integración C' sobre el que la integración sea más fácil de llevar a cabo (véase la figura 7.9). En particular, el nuevo contorno C' que se escoge en el método de la máxima pendiente es aquel sobre el que la fase de $h(z)$, es decir, la parte imaginaria de $h(z)$, es contante: $\psi(x) = \text{const}$. De este modo la integral (7.87) se reduce a

$$I(\alpha) = \mathrm{e}^{i\alpha\psi(z)} \int_{C'} f(z)\, \mathrm{e}^{\alpha\phi(z)}\, dz \tag{7.88}$$

y la nueva integral

$$I'(\alpha) = \int_{C'} f(z)\, \mathrm{e}^{\alpha\phi(z)}\, dz \tag{7.89}$$

puede evaluarse mediante el método de Laplace dado que $\phi(z)$ es real.

Por supuesto, podría haberse escogido como nuevo contorno C'' a aquel en el que la parte real de $h(z)$ es constante: $\phi(z) = \text{const}$. En este caso la la integral (7.87) se reduce a

$$I(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha\phi(z)} \int_{C'} f(z)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(z)}\, dz \tag{7.90}$$

y la nueva integral

$$I''(\alpha) = \int_{C''} f(z)\, \mathrm{e}^{i\alpha\psi(z)}\, dz \tag{7.91}$$

podría evaluarse mediante el método de la fase estacionaria dado que $\psi(z)$ es real. No obstante, suele usarse el contorno C' porque el método de Laplace es habitualmente preferible al de la fase estacionaria dado que su comportamiento asintótico completo se deduce del comportamiento del integrando en la vecindad del punto de C' en el que $\phi(z)$ es máximo. Por el contrario, el comportamiento asintótico completo de una integral de Fourier depende del comportamiento de $\psi(z)$ sobre todo el integrando C''. En definitiva, el método que vamos a estudiar en esta sección consiste esencialmente en transformar la integral compleja (7.87) en una integral de Laplace. Veremos más adelante por qué a este método se le conoce como método de la máxima pendiente.

Empezaremos estudiando este método mediante varios ejemplos.

▶ *Ejemplo 7.21*

Queremos hallar el comportamiento asintótico de la integral

$$I(\alpha) = \int_C \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \; dz \tag{7.92}$$

cuando $\alpha \to \infty$ siendo C el segmento que va de 0 a 1 sobre la recta real. Es decir, queremos evaluar la integral

$$I(\alpha) = \int_0^1 \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \; dz \tag{7.93}$$

cuando $\alpha \to \infty$. Vamos a hacerlo mediante el método que hemos apuntando más arriba (método de la máxima pendiente): deformamos C en un nuevo contorno C' sobre el que la fase $\psi(z)$ es constante de modo que la integral toma la forma de una integral de Laplace. ¿Cuál es este contorno? Comparando la integral de (7.92) con la expresión general (7.87) vemos que $h(z) = iz = ix - y$, de modo que

$$\phi(z) \equiv \phi(x+iy) \equiv \phi(x,y) = -y = -\mathrm{Im}\, z$$

y

$$\psi(z) \equiv \psi(x+iy) \equiv \psi(x,y) = x = \mathrm{Re}\, z.$$

Por tanto, líneas con x constante, es decir, las líneas paralelas al eje y, son líneas de fase $\psi(x,y)$ constante. Es sobre estas líneas sobre las que hemos de deformar el contorno C. En la figura 7.10(b) se ha dibujado el nuevo contorno de integración $C' = C1 + C2 + C3$. La integral (7.92) es por tanto:

$$I(\alpha) = \int_{C'} \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \; dz \tag{7.94}$$

$$= \int_{C1} \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \; dz + \int_{C2} \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \; dz + \int_{C3} \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \; dz. \tag{7.95}$$

El contorno $C1$ viene dado por la ecuación $x = 0$ o, en forma paramétrica, $z = is$ donde el parámetro s es un número real que va de 0 hasta S:[19]

$$C1: \quad z = is, \quad 0 \le s \le S, \quad s \uparrow .$$

El contorno $C3$ esta definido por la ecuación $x = 1$, o en forma paramétrica, $z = 1 + is$ donde el parámetro s es un número real que va desde S hasta 0:

$$C3: \quad z = 1 + is, \quad S \ge s \ge 0, \quad s \downarrow .$$

Los contornos $C1$ y $C3$ son contornos sobre los que la fase de $h(z) = iz$ es constante y, como veremos en breve, la integrales I_1 e I_3 sobre estos contornos adoptan la forma de integrales de Laplace. Sin embargo, es evidente que la fase de $h(z)$, $\psi(z) = x$, sobre $C2$ no es constante por lo que la integral sobre $C2$ no será de Laplace. No obstante, esto no es preocupante porque, como es fácil ver, esta integral tiende a cero de forma exponencial cuando $S \to \infty$:

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \int_{C2} \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \; dz \\ &= \int_{iS}^{1+iS} \ln(x+iS)\, \mathrm{e}^{i\alpha(x+iS)}\, dx \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha S} \int_{iS}^{1+iS} \ln(x+iS)\, \mathrm{e}^{i\alpha x}\, dx \end{aligned}$$

y por tanto $I_2 \to 0$ de forma exponencial para $S \to \infty$. Debe notarse que no hay modo de ir de 0 a 1 a través de un contorno *siempre* de fase constante porque la fase $\psi(z)$ en $z = 0$ es distinta de la fase en

[19] Con el símbolo $s \uparrow$ queremos indicar que s es un número que crece. Obviamente, $s \downarrow$ significa que s es un número decreciente.

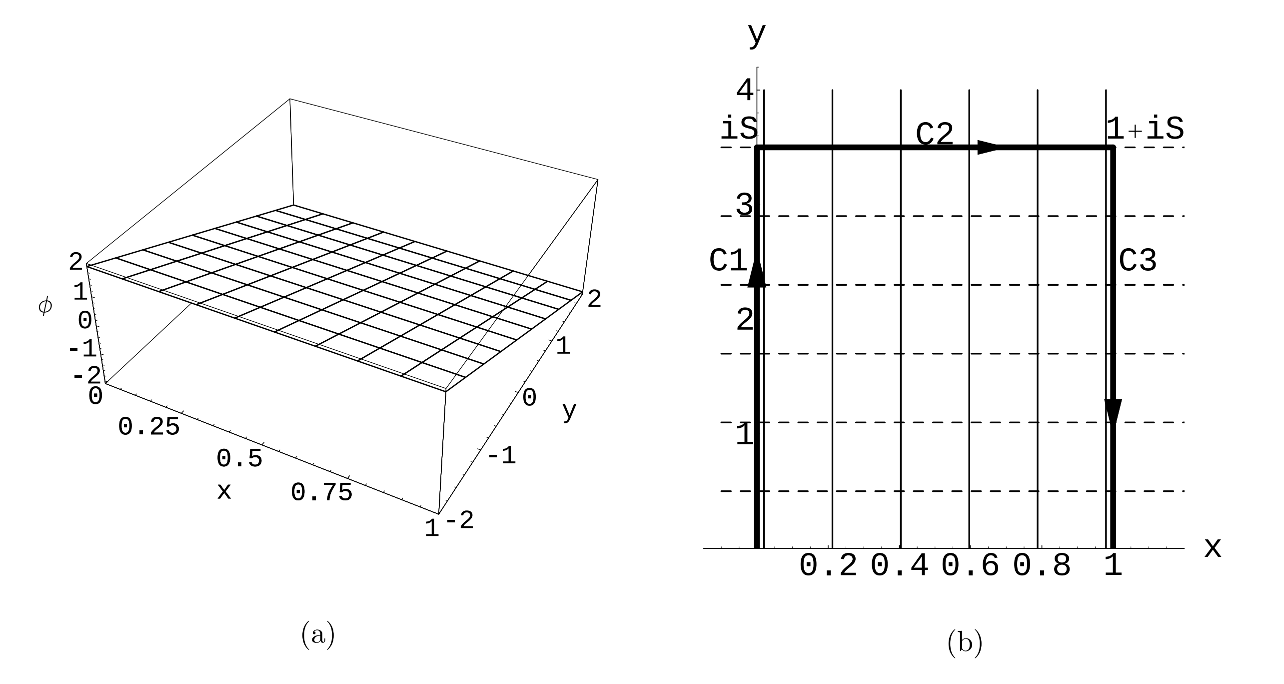


Figura 7.10: (a) La función $\phi(z) = \phi(x,y) = \mathrm{Re}\,[h(z)] = -y$ con $h(z) = iz$. (b) Contorno de integración $C' = C1 + C2 + C3$ (líneas continuas gruesas). También se han representado las isolíneas de $\phi(z)$ (líneas quebradas) y las isolíneas de la fase $\psi(z)$ (líneas continuas delgadas).

$z = 1$: $\psi(0) = 0 \neq 1 = \psi(1)$. Esta dificultad la hemos solventado de un modo sencillo: hemos escogido el contorno sobre el que la integral no es de Laplace (sobre el que la fase no es constante) de modo tal que el valor de la integral sobre este contorno sea fácil de calcular, en particular, hemos escogido el contorno para que la integral sea nula.

La integral I_1 puede evaluarse de forma exacta. Veámoslo:

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int_{C1} \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z} \, dz \\ &= \int_0^S \ln(is)\, \mathrm{e}^{i\alpha(is)}\, d(is) \\ &= i \int_0^S \ln(is)\, \mathrm{e}^{-\alpha s}\, ds. \end{aligned}$$

Como anunciamos antes, esta integral es ya una integral de Laplace. Si hacemos $S \to \infty$ y tenemos en cuenta que $\ln(is) = \ln\left(\mathrm{e}^{i\pi/2}\, s\right) = i\pi/2 + \ln s$ se tiene que

$$I_1 = -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha s}\, ds + i \int_0^\infty \ln s\, \mathrm{e}^{-\alpha s}\, ds.$$

Haciendo el cambio $\xi = \alpha s$ encontramos

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{i}{\alpha} \left[\int_0^\infty \ln \xi\, \mathrm{e}^{-\xi}\, d\xi - \ln \alpha \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi}\, d\xi \right] \\ &= -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{i}{\alpha}(\gamma + \ln \alpha) \end{aligned}$$

donde hemos usado la relación

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi} \ln \xi \, d\xi = -\gamma$$

siendo $\gamma = 0'5772156649\ldots$ la constante de Euler.

Nos resta calcular la integral I_3:

$$
\begin{aligned}
I_3 &\equiv \int_{C3} \ln z \; \mathrm{e}^{i\alpha z}\; dz \\
&= \int_{\infty}^{0} \ln(1+is)\, \mathrm{e}^{i\alpha(1+is)}\, d(1+is) \\
&= -i\,\mathrm{e}^{i\alpha} \int_0^{\infty} \ln(1+is)\, \mathrm{e}^{-\alpha s}\, ds
\end{aligned}
$$

donde hemos hecho directamente $S \to \infty$ en los límites de integración. Esta última integral es evidentemente una integral de Laplace. Teniendo en cuenta que $\ln(1+is) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-is)^n/n$, y aplicando el lema de Watson, se obtiene

$$
\begin{aligned}
I_3 &\sim i\,\mathrm{e}^{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} \int_0^{\infty} s^n\, \mathrm{e}^{-\alpha s}\, ds \\
&\sim i\,\mathrm{e}^{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (n-1)!}{\alpha^{n+1}} \quad \text{para} \quad \alpha \to \infty.
\end{aligned}
$$

El resultado final es por tanto

$$
\begin{aligned}
I(\alpha) &= I_1 + I_2 + I_3 \\
&\sim -\frac{i\ln\alpha}{\alpha} - \frac{i\gamma + \pi/2}{\alpha} + i\,\mathrm{e}^{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n (n-1)!}{\alpha^{n+1}}, \quad \alpha \to \infty.
\end{aligned}
$$

◄

Ahora podemos entender por qué el procedimiento que acabamos de usar es conocido como método de la máxima pendiente. La razón es simple: resulta que las líneas sobre las cuales la fase de $h(z)$ es constante, $\psi(z) = \text{const}$, señalan justamente la direcciones a lo largo de las cuales la función $\left|\mathrm{e}^{h(z)}\right| = \mathrm{e}^{\phi(z)}$ o, equivalentemente, $\phi(z)$, cambia más rápidamente. Entendiendo $\phi(z)$ como la altura de una superficie $\phi(x,y)$, las líneas a lo largo de las cuales $\phi(x,y)$ cambia más rápidamente marcan, en cada punto por los que pasan, las direcciones en las que la pendiente de $\phi(x,y)$ es máxima.

Veamos que, efectivamente, los contornos de fase $\psi(z)$ constante son los contornos de máxima pendiente de $\phi(z)$. Como $h(z)$ es analítica (al menos en la región de integración), se han de satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\partial\psi}{\partial y}, \\
\frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\frac{\partial\phi}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{7.96}
$$

Multiplicando los términos de la izquierda y de la derecha entre sí encontramos la relación

$$
\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0. \tag{7.97}
$$

Teniendo en cuenta que

$$
\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \vec{\nabla}\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}\right),
$$

la ecuación (7.97) equivale a

$$
\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0.
$$

Esta ecuación nos dice que en todo punto (x, y) el gradiente de ϕ es perpendicular al de ψ. Como la derivada de ψ en una dirección cualquiera $\vec{n}$ viene dada por

$$\left.\frac{d\psi}{dz}\right|_{\vec{n}} = \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{n},$$

vemos que la derivada de ψ en la dirección del gradiente de ϕ, $\vec{n} = \vec{\nabla}\phi/|\vec{\nabla}\phi|$, es nula:

$$\left.\frac{d\psi}{dz}\right|_{\vec{\nabla}\phi} = \frac{\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\phi}{|\vec{\nabla}\phi|} = 0.$$

Esto significa que $\psi(z)$ es constante sobre las líneas que son paralelas al gradiente de $\phi(z)$, es decir que, tal como queríamos demostrar, *las líneas con fase $\psi(z)$ constante son líneas de máxima pendiente de $\phi(z)$*. Esto ya lo habíamos visto en el ejemplo 7.21 anterior: como se aprecia en la figura 7.10(a), las líneas de máxima pendiente de $\phi(z)$ corren paralelas al eje y, es decir, la ecuación de estas líneas es $x = \text{const}$, que es justamente la ecuación de las líneas con fase $\phi(z) = x$ constante.

Intercambiando el papel de ψ y ϕ en los razonamientos anteriores, se encontraría que $\phi(z)$ es constante sobre las líneas paralelas al gradiente de $\psi(z)$. Como $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$, concluimos que las líneas de valor constante (isolíneas) de $\phi(z)$ y $\psi(z)$ son normales entre sí. Esto se puede apreciar en las figuras 7.10, 7.11, 7.13, 7.14 y 7.15, donde se ve que las líneas continuas [isolíneas de $\psi(z)$] y discontinuas [isolíneas de $\phi(z)$] se cortan siempre en ángulo recto.

▶ *Ejemplo 7.22*

Queremos hallar el desarrollo asintótico para $x \to \infty$ de

$$I(\alpha) = \int_C e^{i\alpha z^2}\, dz = \int_0^1 e^{i\alpha z^2}\, dz\,. \tag{7.98}$$

C es el segmento de la recta real que va de 0 a 1. Aquí

$$h(z) = iz^2 = i(x+iy)^2 = -2xy + i(x^2 - y^2)$$

de modo que

$$\begin{aligned}\phi(z) &= -2xy\\ \psi(z) &= x^2 - y^2.\end{aligned}$$

La función $\phi(z)$ se ha representado en la figura 7.11(a). En la figura 7.11(b) se han trazado líneas de fase $\psi(z)$ constante (líneas continuas) y líneas con valor $\phi(z)$ constante (líneas quebradas). Vamos a proceder como en el ejemplo anterior y buscamos un nuevo contorno C' que surja de la deformación de C y que recorra líneas de fase constante. En la figura 7.11(b) se ha representado con líneas continuas más gruesas este contorno: $C' = C1 + C2 + C3$ de modo que[20]

$$I(\alpha) = \int_{C'} e^{i\alpha z^2}\, dz \tag{7.99}$$

$$= \int_{C1} e^{i\alpha z^2}\, dz + \int_{C2} e^{i\alpha z^2}\, dz + \int_{C3} e^{i\alpha z^2}\, dz. \tag{7.100}$$

Vamos a justificar a continuación que este contorno permite transformar la tarea de calcular la integral (7.98) en la tarea de evaluar un par de integrales de Laplace.

[20] $C2$ no es realmente un contorno de fase constante, pero esto no tiene importancia porque como veremos más adelante su contribución a la integral es nula.

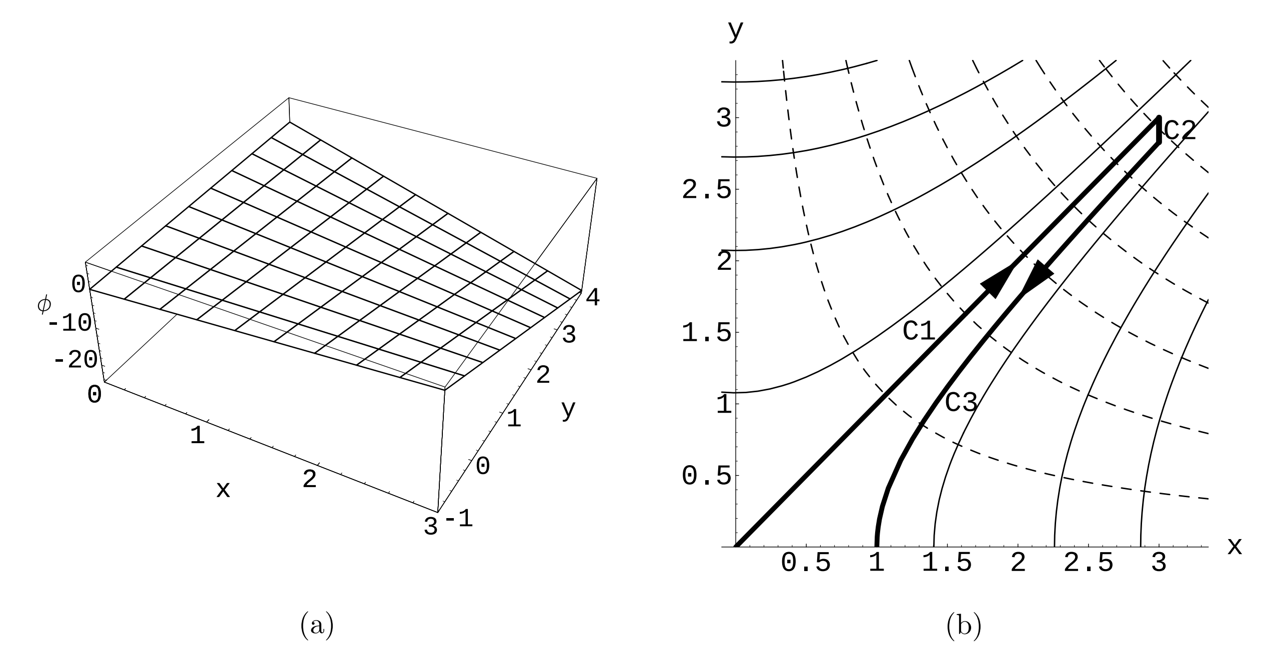


Figura 7.11: (a) La función $\phi(z) = \phi(x, y) = \mathrm{Re}\,[h(z)] = -2xy$ con $h(z) = iz^2$. (b) Isolíneas de $\phi(z)$ (líneas quebradas) y de la fase $\psi(z)$ (líneas continuas delgadas). El contorno de integración $C' = C1 + C2 + C3$ se representa mediante líneas continuas gruesas.

La línea (o líneas) de fase $\psi(z) = x^2 - y^2$ que pasa por $(x, y) = (0, 0)$ es aquella en la que la fase es nula $\psi(z = 0) = 0$. La ecuación de esta línea es por tanto $(x, y = \pm x)$. La línea $(x, y = -x)$ o, en forma paramétrica, $z = (1 - i)s$ siendo s el parámetro *real*, es una línea sobre la cual $\phi(z)$ *crece* cuando nos alejamos del punto inicial $(x, y) = (0, 0)$ dado que $\phi(z = (1 - i)s) = 2s^2$ por lo que $\phi(z)$ crece para s crecientes, es decir, a medida que nos alejamos del punto inicial. Esto significa que deformar el contorno C para llevarlo (en parte) sobre este contorno $z = (1 - i)s$ no es conveniente pues la integral correspondiente no sería una integral de Laplace puesto que en las integrales de Laplace $\int_0^\infty \exp(-\alpha\xi) f(\xi) d\xi$ el núcleo $\exp(-\alpha\xi)$ es decreciente. En cambio, sobre la línea $(x, y = x)$, o en forma paramétrica, sobre la línea $z = (1 + i)s$, la fase $\phi(z)$ *disminuye* para s crecientes. En definitiva, este contorno, que llamamos $C1$ viene dado por la ecuación

$$C1: \quad z = (1 + i)s, \quad 0 \le s \le S, \quad s \uparrow .$$

Sobre este contorno $C1$ sí podremos usar el método de Laplace. Más aún, sobre este contorno es posible integrar

$$I_1 \equiv \int_{C1} \mathrm{e}^{i\alpha z^2}\, dz$$

de forma exacta. Veámoslo:

$$I_1 \equiv \int_0^S \mathrm{e}^{i\alpha(1+i)^2 s^2}\,(1 + i)\, ds\,,$$

pero $1 + i = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}$, de modo que $(1 + i)^2 = 2\,\mathrm{e}^{i\pi/2} = 2i$, y por tanto la integral anterior se transforma en

$$I_1 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4} \int_0^S \mathrm{e}^{-2\alpha s^2}\, ds.$$

Mediante el cambio $z^2 = 2\alpha s^2$, haciendo $S \to \infty$, y teniendo en cuenta que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\, dz = \sqrt{\pi}/2$, se deduce finalmente que

$$I_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,.$$

Calculemos ahora la integral I_3. El contorno $C3$ es la línea de fase constante que pasa por $z = 1$. Las líneas de fase constante $\psi(z) = \text{const}$ son aquellas que verifican la relación $\psi(z) = x^2 - y^2 = \text{const}$. La fase de la línea que pasa por $z = 1$ es $\psi(z = 1) = 1$, por lo que la ecuación del contorno $C3$ es $(x, \sqrt{x^2 - 1})$ o, en forma paramétrica,

$$C3: \quad z = s + i\sqrt{s^2 - 1}$$

siendo el parámetro s un número real que va de $s = S$ hasta $s = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{C3} \mathrm{e}^{i\alpha z^2}\, dz \\ &= \int_S^1 \mathrm{e}^{i\alpha z^2(s)} \frac{dz}{ds}\, ds. \end{aligned}$$

Pero $iz^2 = i - 2s\sqrt{s^2 - 1}$, lo que sugiere hacer el cambio $u = 2s\sqrt{s^2 - 1}$, de modo que $z = \sqrt{1 + iu}$, para que la integral tome la forma de integral de Laplace sobre la variable u:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_S^0 \mathrm{e}^{\alpha(i-u)} \frac{dz}{du}\, du \\ &= -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{2} \int_0^S \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u}}{\sqrt{1 + iu}}. \end{aligned}$$

Haciendo $S \to \infty$, la integral de Laplace resultante

$$I_3 = -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{2} \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha u}}{\sqrt{1 + iu}} \tag{7.101}$$

puede evaluarse fácilmente mediante el lema de Watson. Para ello desarrollamos $1/\sqrt{1 + iu}$ en serie de Taylor (fórmula del binomio generalizado, véase la fórmula (2.168) en la página 124),

$$\frac{1}{\sqrt{1 + iu}} = \sum_{n=0}^\infty (-iu)^n \frac{\Gamma(n + 1/2)\Gamma(1/2)}{n!},$$

la introducimos en la integral (7.101) e integramos término a término:

$$I_3 \sim -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{2} \sum_{n=0}^\infty (-i)^n \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(1/2)\alpha^{n+1}}, \quad x \to \infty. \tag{7.102}$$

La integral

$$I_2 = \int_{C2} \mathrm{e}^{i\alpha z^2}\, dz$$

no es una integral de Laplace porque $C2$ no es un contorno de fase constante.[21] No obstante, esta integral es fácil de evaluar pues $C2$ es un contorno vertical (paralelo al eje y) que va del punto (S, S) hasta el punto $(S, \sqrt{S^2 - 1})$ y, por tanto, la longitud del camino de integración va cero cuando $S \to \infty$. Como el integrando es una función acotada, concluimos que $I_2 \to 0$ si $S \to \infty$.
Sumando los resultados anteriores para I_1, I_2 e I_3 encontramos finalmente que

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \mathrm{e}^{i\pi/4} - \frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{2} \sum_{n=0}^\infty (-i)^n \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\Gamma(1/2)\alpha^{n+1}}, \quad \alpha \to \infty.$$

Por último es importante recordar que en el cálculo de las integrales de Laplace sólo es relevante el comportamiento de la integral (o el integrando) en las vecindades del punto en el que la función $\phi(z)$ es máxima. Por ejemplo, para calcular I_3 hemos trabajado anteriormente con todo el contorno $C3$ cuando sabemos que sólo es relevante conocer este contorno en las vecindades de $z = 1$. Sea $C3^*$ el contorno de

[21] $C2$ va desde $C1$, en donde la fase es nula, $\psi(z) = 0$, hasta $C3$, en donde $\psi(z) = 1$. En la figura 7.11 se ve que $C2$ no corre a lo largo de una línea continua delgada y que no es ortogonal a las líneas de $\phi(z)$ constante (líneas quebradas).

fase constante situado en las *vecindades* de $z = 1$ y que pasa por $z = 1$, es decir, $C3^*$ es simplemente una porción (muy pequeña) de $C3$ que incluye al extremo $z = 1$ del contorno. Entonces

$$I_3 \sim \int_{C3^*} \mathrm{e}^{i\alpha z^2}\, dz, \quad \alpha \to \infty\,.$$

La función $h(z)$ en las vecindades de un punto z_0 podemos estimarla mediante los dos primeros términos del desarrollo de Taylor: $h(z) = \widetilde{h}(z) + O(z - z_0)^2$ con

$$\widetilde{h}(z) = h(z_0) + \left.\frac{df}{dz}\right|_{z_0} (z - z_0).$$

Las curvas de fase constante en la vecindad de z_0 son aquellas en las que la parte imaginaria de $\widetilde{h}(z)$ es constante, es decir, aquellas curvas para las que $\widetilde{\psi}(z) = \text{const}$ siendo $\widetilde{\psi}(z) = \operatorname{Im}\widetilde{h}(z)$. En el presente ejemplo $h(z) = iz^2$ y $z_0 = 1$ de modo que

$$\widetilde{h}(z) = i + 2i(z - 1) = -2y + i(2x - 1)$$

y

$$\widetilde{\psi}(z) = 2x - 1.$$

Por consiguiente, en las vecindades de $z = z_0 = 1$, los caminos de fase constante son aquellos en los que x es constante. Por supuesto, el contorno de fase constante que pasa por $z = (x, y) = (1, 0)$ es aquel para el que la fase es igual a $\widetilde{\psi}(1) = 1$. En resumen, el contorno de fase constante $C3^*$ situado en las vecindades de $z = 1$ y que pasa por $z = 1$ viene dado por la ecuación paramétrica $z = 1 + is$ donde el parámetro s es un número real pequeño $0 < s \ll 1$ decreciente:

$$C3^* : \quad z = 1 + is, \quad 0 < s \ll 1, \quad s \downarrow .$$

Por tanto, para $\alpha \to \infty$ y ϵ pequeño,

$$\begin{aligned} I_3 &\sim \int_{C3^*} \mathrm{e}^{i\alpha z^2}\, dz \\ &\sim \int_{\epsilon}^{0} \mathrm{e}^{i\alpha(1+is)^2}\, d(1 + is) \\ &\sim -i\,\mathrm{e}^{i\alpha} \int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-2\alpha s}\, \mathrm{e}^{-i\alpha s^2}\, ds. \end{aligned}$$

Esta última integral de Laplace puede calcularse mediante el lema de Watson teniendo en cuenta que $\exp\left(-i\alpha s^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-i\alpha s^2)^n / n!$:

$$\begin{aligned} I_3 &\sim -i\,\mathrm{e}^{i\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^n}{n!} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha s}\, s^{2n}\, ds \\ &\sim -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}\, n!\, \alpha^{n+1}}, \quad \alpha \to \infty. \end{aligned}$$

Este resultado está de acuerdo con el de la ecuación (7.102) puesto que $(2n)!/(2^{2n} n!) = \Gamma(n+1/2)/\Gamma(1/2)$. Este procedimiento es claramente ventajoso cuando el cálculo de todo el contorno de fase constante resulta complicado.

Podemos simplificar aún más el cálculo si sólo nos interesa hallar el término principal del desarrollo

asintótico. En este caso, basta aproximar $h(z)$ por $\widetilde{h}(z)$ para obtener

$$\begin{aligned} I_3 &\sim \int_{C3^*} \mathrm{e}^{\alpha h(z)}\, dz \\ &\sim \int_{C3^*} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}(z)}\, dz \\ &\sim \int_{\epsilon}^{0} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}(z=1+is)}\, d(1+is) \\ &\sim -i\,\mathrm{e}^{i\alpha} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha s}\, ds \\ &\sim -\frac{i\,\mathrm{e}^{i\alpha}}{2\alpha}, \end{aligned}$$

que coincide con el término dominante de (7.102).

◀

7.11.1. Puntos de silla

Hasta ahora, las integrales de Laplace que hemos encontrado al deformar el contorno de integración C eran del tipo en las que el máximo del exponente $\phi(z)$ estaba situado en los extremos de integración. Podría pensarse que este máximo también podría estar situado en el interior del intervalo de integración, es decir, que podríamos encontrarnos que $\phi(x,y)$ alcanza un máximo en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ situado en el interior (no en los extremos) de un contorno de fase constante, $\psi(z) = \text{const}$. Si esto sucediera, en este "máximo" la derivada de ϕ en la dirección paralela a este contorno se anularía. Pero esta derivada es justamente el gradiente de ϕ porque, como demostramos anteriormente, el contorno de fase ψ constante es un contorno de máxima pendiente de ϕ, es decir, un contorno que, en cada punto, corre paralelo al gradiente $\vec{\nabla}\phi$. En definitiva

$$\vec{\nabla}\phi(z_0) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_{z_0} = (0,0). \tag{7.103}$$

Desde un punto de vista geométrico, esto significa que la superficie $\phi(x,y)$ es plana en el punto z_0. Sin embargo, debe notarse que $\phi(z)$ nunca puede tener un auténtico máximo (excepto en una singularidad). Esto puede verse a partir de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{7.104}$$

la cual se deduce fácilmente a partir de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (7.96) derivando la primera ecuación respecto a x, la segunda respecto y y despejando el término cruzado $\partial^2\psi/\partial xy$. Ahora podemos entender que no es posible que ϕ tenga un auténtico máximo en z_0 porque si, por ejemplo, ocurre que $\partial^2\phi/\partial x^2|_{z_0} < 0$ entonces, por (7.104), necesariamente debe ocurrir que $\partial^2\phi/\partial y^2|_{z_0} > 0$. Estos puntos z_0 son llamados punto de silla porque la superficie $\phi(x,y)$ toma el aspecto de una silla de montar (o la forma de un paso de montaña) en sus vecindades (véase la figura 7.12).

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann (7.96), la ecuación (7.103) implica

$$\vec{\nabla}\psi(z_0) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{z_0} = (0,0). \tag{7.105}$$

Además,

$$h'(z) = \frac{dh}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

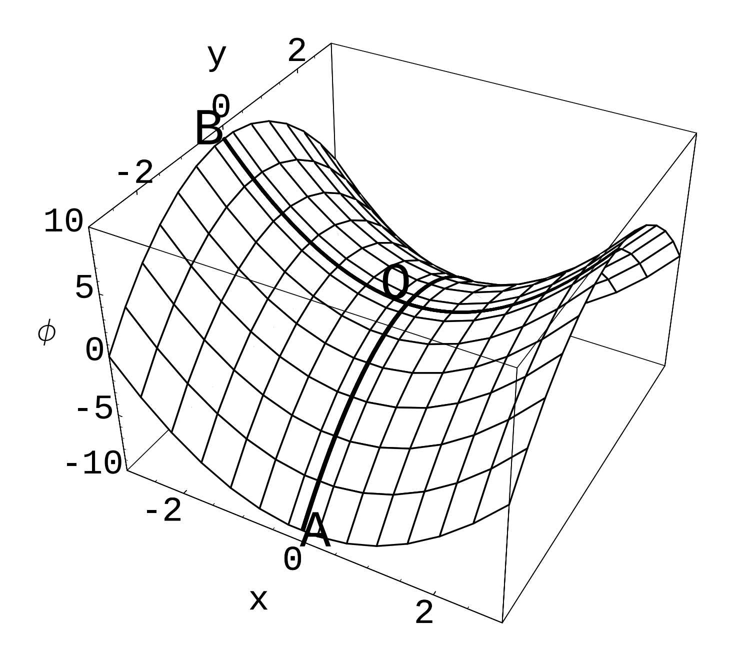


Figura 7.12: Ejemplo de función con punto de silla: $\phi(x, y) = \text{Re}(z^2) = x^2 - y^2$ tiene un punto de silla en $(x, y) = (0, 0)$. La función $\phi(x, y)$ tiene un máximo *sobre* la curva $x = 0$ (la curva que pasa por O desde el punto A), curva que es de fase constante pues $\psi(x, y) = \text{Im}(z^2) = 2xy = 0$ para $x = 0$.

y por tanto, de las ecuaciones (7.103) y (7.105), se deduce que

$$h'(z) = 0 \tag{7.106}$$

en los puntos de silla.

En la figura 7.12 se ha representado la función $\phi(x, y) = \text{Re}\, z^2 = x^2 - y^2$ que tiene un punto de silla en $z = 0$. Nótese que ϕ crece cuando nos alejamos del punto $(x, y) = (0, 0)$ a lo largo de un contorno paralelo al eje x (línea 0B) y decrece cuando nos alejamos del punto siguiendo una línea paralela al eje y (línea 0A). La línea 0A, y la que baja por el otro lado del "valle", son las líneas *descendentes* de máxima pendiente (o de máximo *descenso*) que pasan por el punto de silla. En cambio, la línea 0B, y su opuesta (la que sube al otro lado de 0), son las líneas *ascendentes* de máxima pendiente (o de máximo ascenso) que pasan por el punto de silla. En aquellos problemas en los que el máximo de $\phi(x, y)$ sea un punto de silla, el contorno de máxima pendiente que hemos de seguir es el de máximo descenso para que la integral se transforme en una integral de Laplace. Veamos unos cuantos ejemplos.

► *Ejemplo 7.23*

Queremos evaluar la integral de Airy

$$\text{Ai}(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\alpha s + \frac{s^3}{3}\right) ds$$

para $\alpha \to \infty$. Mediante el cambio $s = \alpha^{1/2} z$ y escribiendo el coseno como suma de exponenciales imagi-

narias, $\cos x = (\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})/2$, es fácil ver que

$$\mathrm{Ai}(\alpha) = \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{i\alpha^{3/2}(z+z^3/3)}\, dz \tag{7.107}$$

$$= \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \int_C \mathrm{e}^{\alpha^{3/2} h(z)}\, dz\,. \tag{7.108}$$

Esta integral ya tiene la forma (7.87) apropiada para aplicar el método de la máxima pendiente. Pero como el intervalo de integración C va de $-\infty$ hasta ∞, el único modo de aplicarlo es si $\phi(z)$ tiene (al menos) un punto de silla. Por (7.106) sabemos que los puntos de silla se sitúan en los ceros de $h'(z) = 0$. En la integral de Airy $h(z) = i(z + z^3/3)$ de modo que $h'(z) = i(1 + z^2)$ y los puntos de silla están en $z = +i$ y $z = -i$. Además

$$h(z) = i\left(z + \frac{z^3}{3}\right) \tag{7.109}$$

$$= i(z + iy) + i\frac{(x+iy)^3}{3} \tag{7.110}$$

$$= y\left(\frac{y^2}{3} - x^2 - 1\right) + ix\left(\frac{x^2}{3} - y^2 - 1\right), \tag{7.111}$$

y por tanto

$$\mathrm{Re}\, h(z) = \phi(z) = y\left(\frac{y^2}{3} - x^2 - 1\right)$$

$$\mathrm{Im}\, h(z) = \psi(z) = x\left(\frac{x^2}{3} - y^2 - 1\right).$$

Por consiguiente, las líneas de máxima pendiente (fase constante) satisfacen la relación

$$\psi(z) = x\left(\frac{x^2}{3} - y^2 - 1\right) = \mathrm{const.} \tag{7.112}$$

Algunas de estas líneas se han representado en la figura 7.13 (son las líneas continuas). Como el valor de la función $h(z)$ en los puntos de silla es real, $h(\pm i) = \mp 2/3$, la fase de las líneas que pasan por estos puntos es nula. Por tanto, estas líneas vienen descritas por la ecuación

$$\mathrm{Im}\, h(z) = \psi(z) = x\left(\frac{x^2}{3} - y^2 - 1\right) = 0. \tag{7.113}$$

De aquí se deduce que las líneas de máxima pendiente que pasan por los puntos de silla son el eje imaginario, $x = 0$, y las hipérbolas de ecuación

$$\frac{x^2}{3} - y^2 - 1 = 0\,. \tag{7.114}$$

Estas hipérbolas se han representado en la figura 7.13 mediante líneas de trazo más grueso. La línea $x = 0$ es la línea de máximo ascenso de $\phi(z)$, mientras que las hipérbolas

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}$$

son las líneas de máximo *descenso*, como no es difícil comprobar.[22]

Para evaluar la integral de Airy (7.107) vamos a deformar el contorno C en un nuevo contorno $C' = C1 + C2 + C3$ que en parte de su recorrido (en el dado por $C2$) sigue la línea de máxima *descenso* que cruza el punto de silla i (véase la figura 7.11). Es decir

$$C2: \quad y = \sqrt{\frac{x^2}{3} - 1}\,.$$

[22]Sabemos que ambas líneas son bien de máximo ascenso o bien de máximo descenso, de modo que para determinar su tipo basta con comprobar si sobre ellas la función $\phi(z)$ simplemente aumenta o disminuye al alejarnos del punto de silla.

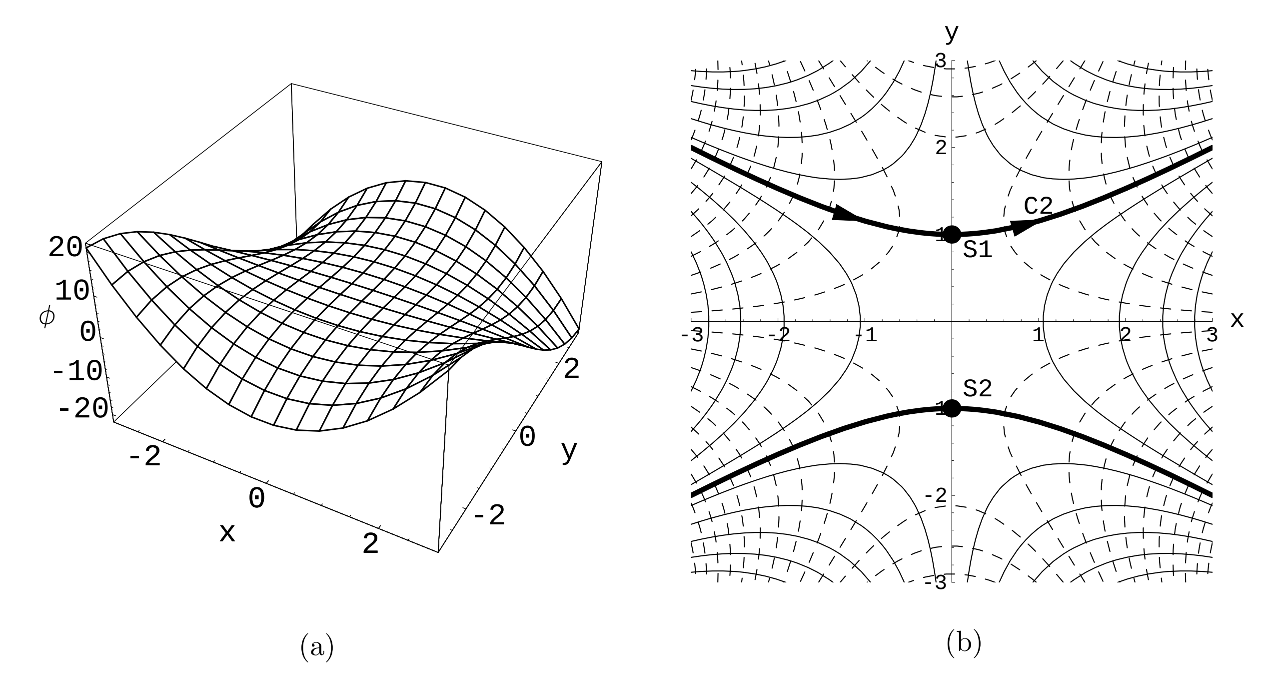


Figura 7.13: (a) Función $\phi(x, y) = \text{Re}\,[i(z + z^3/3)]$ del ejemplo 7.23. (b) Contorno de integración $C2$ (línea continua gruesa superior) para el ejemplo 7.23. Las líneas quebradas son las isolíneas con valor de $\phi(z)$ constante. Las líneas continuas delgadas son las isolíneas de fase $\psi(z)$ constante o, equivalentemente, las líneas de máxima pendiente de $\phi(x, y)$. Los puntos marcados con S1 y S2 son los puntos de silla situados en $z = i$ y $z = -i$, respectivamente. C2 es el contorno de máximo *descenso* que pasa por el punto de silla S1. La línea gruesa que pasa por $S2$ es una línea de máximo *ascenso*.

Los contornos $C1$ y $C3$ no se han representado en esta figura. Podemos tomarlos como arcos de radio $R \to \infty$ que van desde el eje real $y = 0$ hasta el contorno $C2$. No es difícil demostrar que las integrales $\int_{C1} \exp[i\alpha^{3/2}(z + z^3/3)]dz$ y $\int_{C3} \exp[i\alpha^{3/2}(z + z^3/3)]dz$ se desvanecen cuando $R \to \infty$.[23]
Como ya apuntamos en el ejemplo 7.22, página 458, sabemos que en el cálculo de las integrales de Laplace sólo es relevante el comportamiento de la integral (o el integrando) en las vecindades del punto de silla $z = i$. Sea $C2^*$ el contorno de fase constante situado en las *vecindades* de $z = i$ y que pasa por $z = i$, es decir, $C2^*$ es simplemente una porción (muy pequeña) de $C2$ que rodea al punto de silla. Entonces

$$I_2 \sim \int_{C2^*} \mathrm{e}^{\alpha^{3/2} h(z)}\, dz, \quad \alpha \to \infty.$$

Podemos estimar la función $h(z)$ en las vecindades del punto $z_0 = i$ desarrollando $h(z)$ en serie de Taylor en torno a z_0: $h(z) = \widetilde{h}(z) + O(z - z_0)^3$ donde [recuérdese que $h'(z_0) = 0$]

$$\widetilde{h}(z) = h(z_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{dh^2}{dz^2}\right|_{z_0} (z - z_0)^2 \tag{7.115}$$

$$= -2/3 - (z - i)^2 \tag{7.116}$$

$$= \frac{1}{3} - 2y - x^2 + y^2 + i2x(1 - y). \tag{7.117}$$

Las curvas de máxima pendiente en la vecindad de z_0 son aquellas en las que la parte imaginaria de $\widetilde{h}(z)$ es constante, es decir, aquellas curvas para las que $\widetilde{\psi}(z) = \text{Im}\,\widetilde{h}(z) = 2x(1 - y) = \text{const}$. Como fase en

[23]La demostración es similar a la que se llevó a cabo en la páginas 444 y siguientes para justificar que la integral $\int_{C_2} F(z)dz$ iba a cero exponencialmente cuando $R \to \infty$ [véase la ecuación (7.76)].

$z = i$ es nula pues $h(i) = -2/3$ es real, la ecuación del contorno de fase constante que pasa por el punto de silla $z_0 = i$ es, en las vecindades de z_0, $\widetilde{\psi}(z) = 2x(1-y) = 0$. La solución de esta ecuación es, bien $x = 0$, es decir el eje imaginario y, que es el contorno de máximo ascenso de ϕ, o bien $y = 1$, que es el contorno que nos interesa pues es el contorno de máximo descenso de ϕ, como es fácil de comprobar. Por consiguiente, en las vecindades de $z = z_0 = i$, el contorno de máximo descenso viene dado por la ecuación paramétrica $z = i + s$ donde s (el parámetro) es un número real pequeño $|s| \ll 1$ con valores crecientes:

$$C2^*: \quad z = i + s, \quad |s| \ll 1, \quad s \uparrow \ .$$

Por tanto, para $\alpha \to \infty$ y ϵ pequeño,

$$\begin{aligned}
I_2 &\sim \int_{C2^*} \mathrm{e}^{\alpha^{3/2} h(z)}\, dz \\
&\sim \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{e}^{\alpha^{3/2} h(z=i+s)}\, d(i+s) \\
&\sim \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{e}^{\alpha^{3/2}(-2/3 - s^2 - is^3/3)}\, ds \\
&\sim \mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^{3/2}s^2}\, \mathrm{e}^{-i\alpha^{3/2}s^3/3}\, ds \\
&\sim 2\,\mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^{3/2}s^2} \cos\left(\frac{\alpha^{3/2}s^3}{3}\right) ds.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio $\alpha^{3/2}s^2 = \xi$ se obtiene

$$I_2 \sim \mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3}\, \alpha^{-3/4} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi} \cos\left(\frac{\xi^{3/2}}{3\alpha^{3/4}}\right) \xi^{-1/2} d\xi.$$

Esta integral es una integral de Laplace que puede evaluarse mediante el lema de Watson. Para ello desarrollamos el coseno del integrando en serie de potencias, $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)!$, para a continuación integrar término a término. El resultado es:

$$I_2 \sim \mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3}\, \alpha^{-3/4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}(2n)!} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{\alpha^{3n/2}}, \quad \alpha \to \infty. \tag{7.118}$$

El desarrollo asintótico completo de la función de Airy es por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ai}(\alpha) &= \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} I_2 \\
&\sim \frac{1}{2\pi} \alpha^{-1/4}\, \mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n}(2n)!} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{\alpha^{3n/2}}, \quad \alpha \to \infty.
\end{aligned}$$

Si sólo nos interesara hallar el término dominante, podríamos haber procedido como al final del ejemplo (7.22) y aproximar $h(z)$ por $\widetilde{h}(z)$ para obtener

$$\begin{aligned}
I_2 &\sim \int_{C2^*} \mathrm{e}^{\alpha h(z)}\, dz \\
&\sim \int_{C2^*} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}(z)}\, dz \\
&\sim \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}(z=i+s)}\, d(i+s) \\
&\sim \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathrm{e}^{\alpha^{3/2}(-2/3 - s^2)}\, ds \\
&\sim \mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^{3/2}s^2}\, ds
\end{aligned}$$

cuando $\alpha \to \infty$. Teniendo en cuenta que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = \sqrt{\pi}$, se obtiene finalmente:

$$I_2 \sim \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3}\, \alpha^{-3/4}, \quad \alpha \to \infty.$$

Este resultado coincide con el término dominante de (7.118). El término principal del desarrollo de la función de Airy es pues

$$\begin{aligned} \mathrm{Ai}(\alpha) &= \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} I_2 \\ &\sim \frac{\mathrm{e}^{-2\alpha^{3/2}/3}}{2\sqrt{\pi}\alpha^{1/4}}, \quad \alpha \to \infty. \end{aligned}$$

◀

▶ *Ejemplo 7.24*

Vamos a calcular el término principal del desarrollo asintótico de la función gamma, $\Gamma(\alpha)$ para $\alpha \to \infty$. Este término se calcula en el problema 7.14 mediante el método de Laplace. En este ejemplo vamos calcular el término principal de su desarrollo asintótico mediante el método de la máxima pendiente partiendo de esta representación integral alternativa de la función gamma:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i \alpha^{\alpha-1}} \int_C \mathrm{e}^{\alpha(z - \ln z)}\, dz \tag{7.119}$$

donde C es un contorno que procede de $z = -\infty - ia$ con $a > 0$, rodea al corte ramal de $\ln z$ constituido por el eje real negativo, y va hacia $z + ib$ con $b > 0$.
La función $h(z) = z - \ln z$ tiene un punto de silla en $z = 1$ pues $h'(z = 1) = 1 - 1/z|_{z=1} = 0$. Para evaluar esta integral mediante el método de la máxima pendiente deformamos el contorno C para obtener otro C' que rodee al corte ramal, pase por el punto de silla $z = i$, y sea un contorno de fase constante y de máximo *descenso* de $\phi(z)$. Como

$$h(z = x + iy) = x - \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i(y - \arctan y/x)$$

se tiene que las línea de fase constante son aquellas que verifican la relación $\psi(x, y) = y - \arctan y/x =$ const. En particular, la fase en $z = 1$ es $\psi(z = 1) = 0$ por lo que la ecuación de las líneas de fase constante que pasan por $z = 1$ es

$$y - \arctan y/x = 0.$$

La solución es bien $y = 0$, o bien $x = y/\tan y$. Es fácil comprobar que $h(z)$ crece si partimos de $z = 1$ y nos alejamos de este punto sobre la línea $y = 0$. Esta línea es por tanto el contorno de máximo ascenso. La línea de máximo descenso, y el contorno C' que buscabamos, viene dado por la ecuación $x = y \cot y$. En la figura 7.14 se ha representado este contorno junto con las isolíneas de $\phi(z)$ y $\psi(z)$.
Sabemos que para calcular el término dominante sólo es necesario evaluar la integral

$$\int_{C'^*} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}(z)}\, dz \tag{7.120}$$

pues

$$\int_C \mathrm{e}^{\alpha h(z)}\, dz \sim \int_{C'^*} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}(z)}\, dz\,, \quad \alpha \to \infty$$

donde C'^* es el trozo de contorno de C' que está en la vecindad del punto de silla $z = 1$, y $\widetilde{h}(z)$ son los dos primeros términos del desarrollo de Taylor de $h(z)$ en torno al punto de silla $z = 1$:

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(z) &= h(z = 1) + \frac{1}{2} h''(z = 1)(z - 1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}(z - 1)^2 \\ &= \frac{3}{2} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + iy(x - 1)\,. \end{aligned}$$

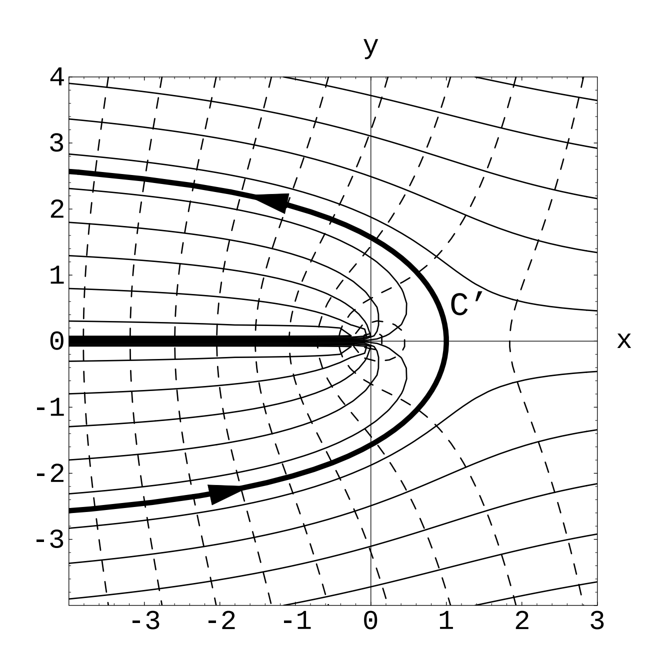


Figura 7.14: Líneas de fase constante o líneas de máxima pendiente (líneas continuas) del ejemplo 7.24. Las líneas discontinuas son las líneas de nivel de Re$h(z) = \phi(z)$. La línea más gruesa que pasa por el punto de silla $x = 1$ es el contorno de integración C' cuya ecuación es $(y\,\text{cot}y, y)$. La línea gruesa sobre el eje $y = 0$ es el corte ramal de $\ln z$.

El contorno de máximo descenso C'^{*} (contorno de fase constante nula) es pues solución de $\widetilde{\phi}(x, y) = y(x-1) = 0$. Como es fácil comprobar, $\widetilde{h}(z)$ crece sobre la línea $y = 0$. El contorno de máximo descenso buscado es pues $x = 1$ o, en forma paramétrica,

$$C'^{*}: \quad z = 1 + is, \quad |s| \ll 1, \quad s \uparrow .$$

Entonces $\widetilde{h}(z = 1 + is) = 1 - s^2/2$ y la integral (7.120) se reduce a una integral de Laplace

$$\int_{C'^{*}} e^{\alpha\widetilde{h}(z)} = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} d(1 + is)\, e^{\alpha\widetilde{h}(z=i+s)}$$
$$= i\int_{-\epsilon}^{\epsilon} ds\, e^{\alpha(1-s^2/2)},$$

la cual podemos evaluar de la forma habitual haciendo $\epsilon \to \infty$:

$$\int_{C'^{*}} e^{\alpha\widetilde{h}(z)} \sim i\, e^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-\alpha s^2/2} = i\, e^{\alpha}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}, \quad \alpha \to \infty$$

y así obtener

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sim \frac{e^{\alpha}}{\sqrt{2\pi}\alpha^{\alpha-1/2}}, \quad \alpha \to \infty.$$

◀

▶ *Ejemplo 7.25*

Vamos a calcular el término principal de

$$I(\alpha) = 2\int_0^{\infty} dz\, \cos(\alpha\pi z)\, e^{-\alpha(\cosh z + z^2/2)} \tag{7.121}$$

para $\alpha \to \infty$. Reescribimos la integral así

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \mathrm{e}^{\alpha(i\pi z - \cosh z - z^2/2)} \tag{7.122}$$
$$= \int_C dz\ \mathrm{e}^{\alpha h(z)} \tag{7.123}$$

para usar el método de la máxima pendiente. La función $h(z)$ tiene un punto de silla en $z = i\pi$ pues

$$\begin{array}{rclcrcl} h'(z) &=& i\pi - z - \sinh z, & \to & h'(i\pi) &=& 0, \\ h''(z) &=& -1 - \cosh z, & \to & h''(i\pi) &=& 0, \\ h^{(3)}(z) &=& -\sinh z, & \to & h^{(3)}(i\pi) &=& 0, \\ h^{(4)}(z) &=& -\cosh z, & \to & h^{(4)}(i\pi) &=& 1. \end{array}$$

A estos puntos de silla se les llama de cuarto orden por ser nulas las tres primeras derivadas. La fase de $h(z)$ es

$$\mathrm{Im}\, h(z) = \psi(z) = x(\pi - y) - \mathrm{sen}(y)\,\mathrm{senh}(x).$$

En el punto de silla $h(z = i\pi) = 1 - \pi^2/2$, luego la fase $\psi(z)$ en el punto de silla es nula, de modo que las líneas de máxima pendiente que pasan por el punto de silla $z = i\pi$ son aquellas en las que

$$x(\pi - y) - \mathrm{sen}(y)\ \mathrm{senh}(x) = 0\,.$$

Es fácil ver que las soluciones de esta ecuación son las líneas $x = 0$, $y = \pi$, y aquellas otras que satisfacen la ecuación implícita

$$\frac{\mathrm{sen}\, y}{\pi - y} = \frac{x}{\mathrm{senh}\, x}\,. \tag{7.124}$$

Las líneas $x = 0$ e $y = \pi$ son los contornos de máximo ascenso. Las otra líneas dadas por (7.124) son los contornos de máximo descenso y se han representado por líneas gruesas en la figura 7.15. Es fácil ver mediante (7.124) que el contorno denotado por C' en esta figura tiende asintóticamente hacia la recta real $y = 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Por tanto, para evaluar la integral (7.121), deformamos el contorno C (es decir, la recta real) para obtener el contorno C':

$$I(\alpha) = \int_C dz\ \mathrm{e}^{\alpha h(z)} = \int_{C'} dz\ \mathrm{e}^{\alpha h(z)}\,.$$

Como sabemos, para evaluar el término principal de $I(\alpha)$ sólo es necesario llevar a cabo la integración sobre un pequeño trozo del contorno C' que pasa por el punto de silla. Para hallar la ecuación de C' en la la vecindad de $z = i\pi$ calculamos la función $\widetilde{h}(z)$ construida mediante los dos primeros términos del desarrollo de Taylor de $h(z)$ en torno a $z = i\pi$:

$$\widetilde{h}(z) = h(i\pi) + \frac{1}{4!}\, h^{(4)}(i\pi)\,(z - i\pi)^4$$
$$= 1 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{24}\,(z - i\pi)^4. \tag{7.125}$$

La fase $\widetilde{\psi}(z)$ de $\widetilde{h}(z)$ viene dada por

$$\widetilde{\psi}(z) = \mathrm{Re}\,\widetilde{h}(z) = \frac{1}{6}\, x\,(\pi - y)\,\left(\pi^2 - x^2 - 2\pi\, y + y^2\right). \tag{7.126}$$

Sabemos que la fase en el punto de silla es nula pues $h(z = i\pi) = 1 - \pi^2/2$ es real. Por tanto, las líneas de máxima pendiente que pasan por el punto de silla son las soluciones de $\widetilde{\psi}(z) = 0$. De (7.126) se deduce que unas de estas líneas son las dadas por $x = 0$, otras las dadas por $y = \pi$ y, finalmente, otras las dadas por las soluciones de $\pi^2 - x^2 - 2\pi\, y + y^2 = 0$, es decir, descritas por la relación $y = \pi \pm x$. Los contornos descritos por las ecuaciones $x = 0$ e $y = \pi$ son contornos de máximo ascenso mientras que (en las vecindades del punto de silla) los contornos $y = \pi \pm x$ son contornos de máximo descenso.

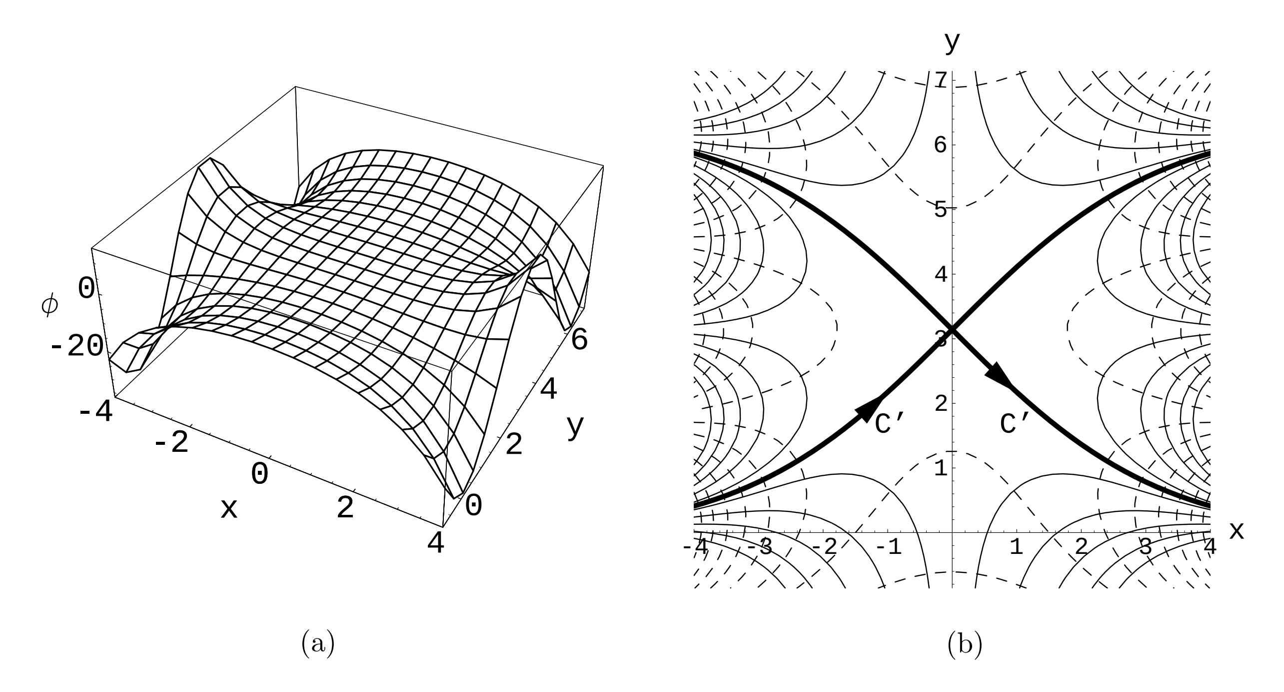


Figura 7.15: (a) Función $\phi(x,y) = \mathrm{Re}\,[i\pi z - \cosh z - z^2/2]$ del ejemplo 7.25. (b) Contorno de integración C'. Las líneas quebradas son las isolíneas de $\phi(z)$ y las líneas continuas delgadas son las isolíneas de a fase $\psi(z)$ o, equivalentemente, las líneas de máximo descenso de $\phi(x,y)$. El punto de silla está situado en $z = i\pi = (x = 0, y = \pi)$.

▷ ***Ejercicio*** *7.5*

Comprueba la veracidad de esta última afirmación comparando el valor de $\phi(z)$ en el punto de silla con los valores de $\phi(z)$ que se obtienen cuando los valores de z se toman sobre los contornos $x = 0$ e $y = \pi$, por un lado, y sobre los contornos $y = \pi \pm x$, por otro.

Por consiguiente, el contorno de máximo descenso en las vecindades del punto de silla , C'^*, viene descrito por ecuación $y = \pi + x$ para $x < 0$ e $y = \pi - x$ para $x > 0$, es decir

$$C'^* : \quad \begin{cases} z = i\pi + \mathrm{e}^{i\pi/4}\, s, & -\epsilon \le s \le 0, \quad s \uparrow, \\ z = i\pi + \mathrm{e}^{-i\pi/4}\, s, & 0 \le s \le \epsilon, \quad s \uparrow, \end{cases}$$

con $\epsilon \ll 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{C'} dz\ \mathrm{e}^{\alpha h(z)} \\ &\sim \int_{C'^*} dz\ \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}(z)} \\ &\sim \int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}\left(i\pi + \mathrm{e}^{i\pi/4}\, s\right)}\, d\left(i\pi + \mathrm{e}^{i\pi/4}\, s\right) + \int_{0}^{\epsilon} \mathrm{e}^{\alpha \widetilde{h}\left(i\pi + \mathrm{e}^{-i\pi/4}\, s\right)}\, d\left(i\pi + \mathrm{e}^{-i\pi/4}\, s\right) \end{aligned} \tag{7.127}$$

para $\alpha \to \infty$. Usando la relación (7.125) se encuentra que

$$\widetilde{h}\left(i\pi + \mathrm{e}^{\pm i\pi/4 s}\right) = 1 - \pi^2/2 - s^4/24$$

y la ecuación (7.127) se reduce a

$$I(\alpha) \sim \mathrm{e}^{\alpha(1-\pi^2/2)} \left[\mathrm{e}^{i\pi/4} \int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{e}^{-s^2/24}\, ds + \mathrm{e}^{-i\pi/4} \int_{0}^{\epsilon} \mathrm{e}^{-s^2/24}\, ds\right], \quad \alpha \to \infty.$$

Haciendo el cambio $s \to -s$ en la primera integral, se ve inmediatamente que $\int_{-\epsilon}^{0} \mathrm{e}^{-s^2/24}\, ds = \int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-s^2/24}\, ds$ y por tanto

$$I(\alpha) \sim 2\,\mathrm{e}^{\alpha(1-\pi^2/2)} \cos\left(\pi/4\right) \int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-s^2/24}\, ds, \quad \alpha \to \infty.$$

Mediante el cambio $\alpha s^4/24 = \xi$ y tras tomar el límite $\epsilon \to \infty$, la integral se transforma en una integral de Laplace que podemos evaluar de forma exacta:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^4/24}\, ds = \frac{24^{1/4}}{4\alpha^{1/4}} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi}\, \xi^{-3/4} d\xi = \frac{24^{1/4}}{4\alpha^{1/4}}\, \Gamma(1/4).$$

Teniendo en cuenta que $\cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$, el resultado final es

$$I(\alpha) \sim \left(\frac{3}{8}\right)^{1/4} \Gamma(1/4)\, \alpha^{-1/4}\, \mathrm{e}^{\alpha(1-\pi^2/2)}, \quad \alpha \to \infty.$$

◀

7.12. Problemas

7.1. Halla el desarrollo asintótico de la función integral seno

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$$

útil para valores pequeños de x. Encuentra también el desarrollo asintótico válido para valores grandes de x.

7.2. Mediante integración por partes, halla la conducta asintótica completa de la integral

$$\int_0^x \exp\left(t^2\right)\, dt\,, \quad x \to \infty\,.$$

7.3. Encuentra el término dominante de

$$\int_x^\infty \exp\left(-at^b\right)\, dt\,, \quad x \to \infty\,,$$

donde $a > 0$ y $b > 0$.

7.4. a) Las integrales de Fresnel son de la forma

$$\int_x^\infty f(t)\, dt\,,$$

donde $f(t) = \cos(t^2)$ ó $f(t) = \operatorname{sen}(t^2)$. Halla la conducta asintótica completa para $x \to 0$ y $x \to \infty$.

b) La integral generalizada de Fresnel es

$$F(x,a) = \int_x^\infty t^{-a}\, \mathrm{e}^{it^2}\, dt\,, \quad a > 0\,.$$

Halla el desarrollo asintótico completo de $F(x,a)$ para $x \to \infty$.

7.5. Demuestra que

$$\int_0^x (t^3 + t^2)^{1/2} dt \sim \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{1}{3} x^{3/2} + \ldots, \quad x \to \infty.$$

7.6. Demuestra que

$$\int_1^\infty dt\, \exp[-xt^2]\, t^{5/2}\, \ln t \sim \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4x^2}, \quad x \to \infty.$$

7.7. Demuestra que

$$\int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{i(t-x)}}{t}\, dt = \frac{i}{x} + \frac{1}{x^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

para $x \to \infty$.

7.8. Demuestra que

$$\int_x^\infty t^{\lambda-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt \sim x^{\lambda-1}\, \mathrm{e}^{-x} \left[1 + \frac{\lambda-1}{x} + \cdots\right], \quad x \to \infty.$$

7.9. Muestra, de forma razonada, que

$$\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \sim \left(-\frac{1}{x}+\frac{2!}{x^3}+\cdots\right)\operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3!}{x^4}+\cdots\right)\cos x$$

para $x \to \infty$

7.10. Demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-xt^2}\ \ln(3+t^2)\,dt \sim \frac{\sqrt{\pi}\ln 3}{\sqrt{x}}, \quad x\to\infty.$$

Nota: $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

7.11. Demuestra que

$$\int_1^\pi \exp\left[-x\left(t+\frac{1}{t}\right)\right]dt \sim \frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-2x}}{2\sqrt{x}}, \quad x\to\infty.$$

7.12. Encuentra el término dominante para $x\to\infty$ de:

a)

$$\int_0^1 \operatorname{sen} t\,\exp\left(-x\,\operatorname{senh}^4 t\right)\,dt\,.$$

b)

$$\int_0^{2\pi} \left(1+t^2\right)\mathrm{e}^{x\,\cos t}\ dt\,.$$

c)

$$\int_1^2 \ln(1+t)\ \mathrm{e}^{-x(t+1/t)}\ dt\,.$$

7.13. Halla el desarrollo asintótico completo de

$$\int_0^{\pi/2} \exp\left(-x\,\tan^2 t\right)\,dt$$

para $x\to\infty$.

7.14. Demuestra la fórmula de Stirling

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{x-1}\,dt \sim x^x\,\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(1+\frac{1}{12x}\right)$$

para $x\to\infty$. (Pista: ésta es una integral de Laplace con máximo no fijo.)

7.15. Utiliza la representación integral de la función de Bessel de orden n obtenida en la ecuación (2.226),

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(x\operatorname{sen} t - nt\right)\,dt,$$

para deducir, mediante el método de la fase estacionaria, la relación (2.197):

$$J_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), \quad \text{para } x\to\infty.$$

7.16. Halla la conducta principal de las siguientes integrales por el método de la fase estacionaria cuando $x\to\infty$:

a)

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ixt^3}\, dt\ ,$$

b)

$$\int_0^1 \ln(2+t)\, \mathrm{e}^{ixt^3}\, dt\ ,$$

c)

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ixt^2} \cosh t^2\, dt\ ,$$

d)

$$\int_0^1 \cos(xt^4)\, \tan t\, dt\ ,$$

e)

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{ix(t-\operatorname{sen} t)}\, dt\ ,$$

f)

$$\int_{-1}^1 \operatorname{sen}\left[x(t-\operatorname{sen} t)\right] \operatorname{senh} t\, dt\ .$$

7.17. Demuestra mediante el método de la máxima pendiente que el término principal de la función de Hankel (o función de Bessel de tercera especie) viene dado por

$$H_0^{(1)} = -\frac{2}{\pi}\int_1^\infty \frac{\mathrm{e}^{i\alpha z}}{\sqrt{1-z^2}}\, dz \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\ \mathrm{e}^{i(\alpha-\pi/4)}$$

para $\alpha \to \infty$.

7.18. Demuestra mediante el método de la máxima pendiente que

$$\int_0^1 \ln z\ \mathrm{e}^{i\alpha z}\, dz \sim -\frac{i(\ln\alpha+\gamma)+\pi/2}{\alpha}$$

para $\alpha \to \infty$, donde $\gamma = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\xi} \ln\xi\, d\xi$ es la constante de Euler.

7.19. Usa el método de la máxima pendiente para demostrar que

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{i\alpha z^2}}{\sqrt{z+z^2}}\, dz \sim \frac{\Gamma(1/4)\,\mathrm{e}^{i\pi/8}}{2\alpha^{1/4}}$$

para $\alpha \to \infty$.

7.20. La función de Bessel de primera especie de orden cero admite la siguiente representación integral

$$J_0(\alpha) = \operatorname{Re}\frac{1}{i\pi}\int_C \mathrm{e}^{i\alpha\cosh z}\, dz,$$

donde C es cualquier contorno que va desde $z = -\infty - i\pi/2$ hasta $z = \infty + i\pi/2$ (a este contorno se le llama contorno de Sommerfeld). Usa el método de la máxima pendiente para demostrar que

$$J_0(\alpha) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right), \quad \alpha\to\infty.$$

Apéndice A

Soluciones de problemas seleccionados

A.1. Soluciones del capítulo 1: Problema de Sturm-Liouville

- Problema 1.1
  $g(x) = 1 - x$.

- Problema 1.4
  $\psi_\lambda(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda} \ln x\right)$, $\lambda > 0$.

- Problema 1.7
  (a) $\lambda_n = (\gamma_n/a)^2$ con $(1-\gamma_n^2)/(2\gamma_n) = \operatorname{cotan}\gamma_n$.
  $\psi_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x - a\sqrt{\lambda_n}\,\cos\sqrt{\lambda_n}x$.
  (b) Si. $G(x,x') = -\frac{a}{2\pi^2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x'}{a}\right) + \pi\cos\left(\frac{\pi x'}{a}\right)\right]\,\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) - \pi\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right]$
  para $x \leq x'$

- Problema 1.8
  $\lambda_n = 1 + n^2$, $\psi_n(x) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} nx$, , $n = 1, 2, \ldots$
  $x\,\mathrm{e}^x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\,\mathrm{e}^x \operatorname{sen} nx$.

- Problema 1.9
  $\lambda_n = n^2/4$, $\psi_n(x) = \cos\left(\frac{n}{2}\ln x\right)$.

- Problema 1.10
  (b) $\lambda_n = n^2\pi^2 - 3/4$, $n = 1, 2, \ldots$; $\psi_n(x) = \mathrm{e}^{-x/2} \operatorname{sen} n\pi x$.
  (c) $y(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2\pi^2}\psi_n(x)$ con $b_n = 2\int_0^1 dx\,\mathrm{e}^{x/2}\operatorname{sen}(n\pi x) f(x)$.

- Problema 1.11
  (a) $\lambda_n = \alpha_{0n}^2$, $\psi_n(x) = J_0(\alpha_{0n}x)$ $n = 1, 2\ldots$, donde α_{0n} es el n-simo cero de la función de Bessel $J_0(x)$.
  (b) $y(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\alpha_{0n}x)}{\alpha_{0n}(1-\alpha_{0n}^2)J_1(\alpha_{0n})}$.

- Problema 1.5
  $G(x,x') = -(x^2 - 1/x^2)/(4x'^2)$ para $x \leq x'$. $y(x) = (1/x^2 - 1)/4$.

- Problema 1.12
  $G(x,\xi) = -\xi^{-3}x^3/6$ para $x \leq \xi$. $y(x) = -x^2/5$.

- Problema 1.13
  $G(x,x') = -(\mathrm{e}^{kx} - 1)/k$ para $x \leq x'$. $y(x) = (1 - \mathrm{e}^{(k-1)x})/(k-1)$.

- Problema 1.14
  $G(x,x') = -\exp(-k|x - x'|)/(2k)$.

- Problema 1.15
  (a) $G(x,x') = -\left[\exp(-kx')\,\mathrm{senh}\,x\right]/k$ para $x \leq x'$.
  $y(x) = [\exp(-kx) - \exp(-x)]/(k^2 - 1)$.
  (b) $G(x,x') = -x$ para $x \leq x'$. $y(x) = \exp(-x) - 1$.

- Problema 1.16
  $G(x,x') = \ln(x') + 1$, $x \leq x'$. $y(x) = (1 + x^2)/4$.

- Problema 1.18
  (a) $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{(2n+1)\pi x}{2L}$.
  (b) $G(x,x') = -\dfrac{8L}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{(2n+1)\pi x}{2L}\;\mathrm{sen}\,\dfrac{(2n+1)\pi x'}{2L}$.
  (c) $G(x,x') = -x$ para $x \leq x'$.

- Problema 1.19
  (a) $G(x,x') = x(x' - \pi)/\pi$ para $x \leq x'$.
  (b) $G(x,x') = -(2/\pi)\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sen}(nx)\,\mathrm{sen}(nx')/n^2$.
  (c) $y(x) = -\,\mathrm{sen}(3x)/9$. (d) $G(x,x') = -\,\mathrm{sen}(3x)/5 + b\,\mathrm{sen}(2x)$.
  (e) No hay solución.

- Problema 1.20
  (a) $G(x,x') = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\mathrm{sen}[(n+1/2)x/2]\;\mathrm{sen}[(n+1/2)x'/2]}{1 - (n+1/2)^2/4}$.
  (b) $G(x,x') = -\cos x'\,\mathrm{sen}\,x$ para $x \leq x'$.
  (c) $y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}x\cos x$.
  (d) $y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x - \frac{1}{2}x\cos x + 2\cos x$.

- Problema 1.21
  (a) $G(x,x') = -\dfrac{2}{L}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2 + (n\pi/L)^2}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{L}\;\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x'}{L}$.
  (b) $G(x,x') = -\dfrac{\mathrm{senh}\,kx\;\mathrm{senh}\,k(L - x')}{k\;\mathrm{senh}\,kL}$ para $x \leq x'$.

- Problema 1.22
  (a) $\psi_n(x) = B_n\,\mathrm{sen}(\gamma_n/\pi)^2$ donde $\tan\gamma_n = -\gamma_n/\pi$.
  (b) $G(x,x') = -\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{sen}\,\dfrac{\gamma_n x}{\pi}\;\mathrm{sen}\,\dfrac{\gamma_n x'}{\pi}\right)/\,\mathrm{sen}^2\left[\gamma_n(1/\pi + 1/\cos^2\gamma_n)\right]$;

$G(x,x') = \dfrac{(x'-1-\pi)x}{1+\pi}$ para $x \le x'$.

- Problema 1.23
  (a) $\operatorname{sen}\omega(|x-x'|-\pi)/(2\omega \operatorname{sen}\omega\pi)$. Para $\omega = n$ con n entero.
  (b) $\psi_n(x) = A\cos(nx) + B\operatorname{sen}(nx)$. Dos.

- Problema 1.24
  $G(x,x') = -\dfrac{3}{m^2}(x-1)(x'-1) - \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\operatorname{sen}^2 k_n} \frac{\operatorname{sen} k_n(x-1)\ \operatorname{sen} k_n(x'-1)}{m^2+k_n^2}$ con $\tan k_n = k_n$.

- Problema 1.26
  $G(x,x') = -\frac{1}{m}\exp[m(1-x')]\operatorname{senh}[m(x-1)]$ para $x \le x'$.

- Problema 1.27
  (a) $G(t,\tau) = 0$ para $t < \tau$, $G(t,\tau) = \dfrac{\operatorname{sen}\omega(t-\tau)}{\omega}\, \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}$ para $t > \tau$;
  $x(t) = \displaystyle\int_0^t d\tau\ \frac{\operatorname{sen}\omega(t-\tau)}{\omega}\, \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \frac{f(\tau)}{m}$ con $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$.
  (b) $x(t) = \displaystyle\int_0^t d\tau\ \frac{\operatorname{senh}\omega(t-\tau)}{\omega}\, \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\, \frac{f(\tau)}{m}$ con $\omega^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$.

- Problema 1.28
  (a) $\alpha = 0'6718$, $R(u_0, \alpha = 0'6718) = 1'0343$.
  (c) $\alpha = 0$, $R(u_0, \alpha = 0) = 1 = \lambda_0$, $u_0(x, \alpha = 0) = \exp(-x^2/2)$ es la autofunción exacta.
  (d) $\alpha = 0$, $R(u_1, \alpha = 0) = 3 = \lambda_1$, $u_1(x, \alpha = 0) = x\exp(-x^2/2)$ es la autofunción exacta.

- Problema 1.29
  (a) $R(u_0, \alpha = 0'4350) = 1'0649$; $R(u_1, \alpha = 0'2228) = 3'8301$.
  (b) $R(u_0, \alpha = 0'7884) = 1'1353$; $R(u_1, \alpha = 1'3058) = 2'9399$.

A.2. Soluciones del capítulo 2: Funciones Especiales

- Problema 2.1
  (a) $U_1 - 2\,x\,U_0 = 0$, $U_{n+1} - 2\,x\,U_n + U_{n-1} = 0$.
  (b) $U_0(x) = 1, U_1(x) = 2\,x, U_2(x) = -1+4\,x^2, U_3(x) = -4\,x+8\,x^3, U_4(x) = 1-12\,x^2+16\,x^4$, $U_5(x) = 6\,x - 32\,x^3 + 32\,x^5$.
  (c) $U_n(1) = n+1, U_n(-1) = (-1)^n(n+1), U_{2n}(0) = (-1)^n$ y $U_{2n+1}(0) = 0$ con $n = 0,1,2\ldots$

- Problema 2.5
  La integral $\int_0^1 dx P_l(x)$ vale 1 si $l = 0$, $(-1)^n\binom{n-3/2}{n}$ si $l = 2n-1$, y 0 si $l = 2n$ con $n = 1, 2, \ldots$

- Problema 2.6
  (a) $1/2$ para $l = 0$, $1/3$ para $l = 1$, $P_{l-2}(0)/[l(l+2)]$ para $l \ge 2$.
  (b) $\dfrac{P_0(x)}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{4n(n+1)} P_{2n-2}(0) P_{2n}(x)$.

- Problema 2.9
  $H_n(x) = \dfrac{(-i)^n}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dk\, k^n\ \exp[(x+ik/2)^2]$.

- Problema 2.12
  0 si $p > r$, $2^n\sqrt{\pi}(n+r)!$ si $p = r$.

- Problema 2.14
  $e^{\lambda x} = e^{\lambda^2/4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \frac{H_n(x)}{n!}$.
  $e^{\lambda x} = \frac{1}{1-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^n L_n(x)$.

- Problema 2.15
  $(\alpha+n)![-(\alpha+n+1)\delta_{m,n+1} + (2n+\alpha+1)\delta_{m,n} - n\delta_{m,n-1}]/n!$

- Problema 2.16
  $(s-1)^n/s^{n+1}$.

- Problema 2.17
  $\langle r\rangle = [3n^2 - l(l+1)]/(\alpha n)$.

- Problema 2.18
  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x)$ donde $c_0 = e^{-a} L_0(a)$, $c_n = e^{-a}[L_n(a) - L_{n-1}(a)]$ para $n \geq 1$.

- Problema 2.19
  (a) $G(x,t) = (1-t^2)/(1-2xt+t^2)$. (b) $T_n(0) = 0$ si $n =$ impar, $T_n(0) = (-1)^{n/2}$ si $n =$ par. $T_n(1) = 1$. $T_n(-1) = (-1)^n$.

- Problema 2.23
  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\alpha_{0n} J_1(\alpha_{0n})} J_0(\alpha_{0n}x/a)$.

A.3. Soluciones del capítulo 3: Ecuaciones en derivadas parciales

- Problema 3.1
  $u_{nm} = \operatorname{sen}(n\pi x/a)\operatorname{sen}(m\pi y/b)$ con $\omega_{nm}^2 = \pi^2 c^2\left(n^2/a^2 + m^2/b^2\right)$.

- Problema 3.2
  (a) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m}\, \operatorname{sen} nx\, \operatorname{sen} my\, \cos(\sqrt{n^2+m^2}\, ct)$, con

  $$A_{n,m} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} dx\, dy f(x,y)\, \operatorname{sen} nx\, \operatorname{sen} my.$$

  (b) Solución del apartado (a) con $A_{n,m} = \frac{4u_0}{\pi^2}\frac{[1-(-1)^n][1-(-1)^m]}{nm}$.

- Problema 3.3
  $u(x,t) = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_0(k_n r)\exp(-ak_n^2 t)$ con

  $$A_n = \frac{4k_n^3\int_0^b dr\, r^2(u_0(r) - u_1) j_0(k_n r)}{2k_n b - \operatorname{sen}(2k_n b)}$$

  y $\tan(k_n b) = k_n b/(1-hb)$, siendo a el coeficiente de difusividad térmica.

- Problema 3.4
  (a) $u(r,\theta) = \frac{4}{15}\left(r^2 - r^{-2}\right)\cos 2\theta$.
  (b) $u(r,\theta) = r^2\cos\theta$.

- Problema 3.5
  $u(r,t) = u_0 + 2(u_0 - u_1)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_n r/\rho)}{\alpha_n J_1(\alpha_n)}\, \mathrm{e}^{-(\alpha_n^2/\rho^2)kt}$, donde α_n es el n-simo cero de la función de Bessel $J_0(x)$.

- Problema 3.6
  $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_0}{\operatorname{senh}(n\pi)}\, \frac{\cos(n\pi)-1}{n\pi}\, \operatorname{senh}[n\pi(x-1)]\operatorname{sen}(n\pi y)$.

- Problema 3.7
  Solución general: $u(r,\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n \cos n\theta + b_n r^n \operatorname{sen} n\theta)$.
  (a) $u(r,\theta) = r\cos\theta$.
  (b) $u(r,\theta) = \frac{u_0}{2} + \frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{n}\operatorname{sen} n\theta$.

- Problema 3.8
  $u(x,t) = \operatorname{sen}(4\pi x)\cos[(16\pi^2 - 1)t]$.

- Problema 3.9
  $u(x,t) = \frac{2hL^2}{\pi^2\xi(L-\xi)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$.

- Problema 3.11
  $u(x<0,t) = u_0 - \frac{u_0}{1+\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}}\operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\lambda_1}{t}}\right)$,
  $u(x>0,t) = \frac{u_0}{1+\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{t}}\right)$.

- Problema 3.12
  (a) $u(x,t) = T_0 + T_1\exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)\operatorname{sen}\left(\omega t - x\sqrt{\frac{\omega}{2k}}\right)$.
  (b) $u(x,t) = T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} T_n\exp\left(-x\sqrt{\frac{n\omega}{2k}}\right)\operatorname{sen}\left(n\omega t - x\sqrt{\frac{n\omega}{2k}}\right)$.

- Problema 3.13
  $u(x,t) = \frac{u_0}{\pi}\left[\arctan\frac{a+x}{y} + \arctan\frac{a-x}{y}\right]$.

- Problema 3.14
  (a) $u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left[-\frac{kn^2\pi^2 t}{L^2}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$.
  (b)

$$u(x,t) = u_0 + u_0\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+2)L-x}{\sqrt{4kt}}\right] - \operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)L-x}{\sqrt{4kt}}\right]\right.$$
$$\left. +\operatorname{erfc}\left[\frac{(2n+1)L+x}{\sqrt{4kt}}\right] - \operatorname{erfc}\left[\frac{2nL+x}{\sqrt{4kt}}\right]\right\}.$$

- Problema 3.15
  $u(x,t) = u_0 \, \mathrm{e}^{-\gamma^2 t} + u_1 \left(1 - \mathrm{e}^{-\gamma^2 t}\right)$.

- Problema 3.17
  $u(x,t) = \dfrac{h}{4}\left[f(x+ct+\epsilon) - f(x+ct-\epsilon) + f(x-ct+\epsilon) - f(x-ct-\epsilon)\right]$ con $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(x) = 0$ si $x = 0$, y $f(x) = -1$ si $x < 0$.

- Problema 3.18
  (c) $u(r,\theta,t) = 2u_0 \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{0m} J_1(\alpha_{0m})} J_0(\alpha_{0m} r) \cos(\alpha_{0m} ct)$.

- Problema 3.19
  $u(x,y) = u_0 + \dfrac{u_1 - u_0}{\pi} x + \dfrac{4T_0}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \, \mathrm{e}^{-(2n+1)y} \operatorname{sen}(2n+1)x$.

- Problema 3.21
  $u(x,t) = \dfrac{x}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \operatorname{sen} nx$ donde $a_n(t) = a_n(0) \, \mathrm{e}^{-n^2 t}$,

  $a_3(t) = a_3(0) \, \mathrm{e}^{-9t} + \dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-9t}\right) \operatorname{sen} 3x$, y

  $a_n(0) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} dx \, [f(x) - x/\pi] \operatorname{sen} nx$ para $n \neq 3$.

  (a) $u(x,t) = \dfrac{x}{\pi} + \mathrm{e}^{-t} \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-9t}\right) \operatorname{sen} 3x$.

  (b) $u(x,t) = \dfrac{x}{\pi} + \left[\dfrac{1}{8} \mathrm{e}^{-t} + \dfrac{7}{8} \mathrm{e}^{-9t}\right] \operatorname{sen} 3x$.

- Problema 3.22
  (a) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\phi_n(x)$ con $a_n(t) = \frac{2}{\pi} \cos(nt) \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) f(x) dx$.
  (b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) A_n \cos(nt) + \phi_2(x)/4$ con $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi_n(x)[f(x) - \phi_2(x)/4] dx$. $u(x,t) = \cos(3t)\phi_3(x) + \phi_2(x)/4$ para $f(x) = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}(2x)/4$.

- Problema 3.20
  $u(x,t) = \operatorname{sen}(x) \cos(c\,t)$.

A.4. Soluciones del capítulo 4: Métodos numéricos

- Problema 4.2
  $x_n = x_{n-1}/2 + 2/x_{n-1}$. $x_0 = 4$, $x_1 = 2'5$, $x_2 = 2'05$, $x_3 = 2'000609756097560\ldots$, $x_4 = 2'000000092922294\ldots$, $x_5 = 2'000000000000002\ldots$

- Problema 4.3
  $x_n = 2x_{n-1}/3 + R/(3x_{n-1}^2)$.

- Problema 4.4
  En el método de Newton: $e_{n+1} = \dfrac{f''(\widetilde{x})}{f'(\widetilde{x})} e_n^2 + O(e_n^3)$.

- Problema 4.5
  Orden h^4 en los dos casos.

- Problema 4.6
  Euler: $1'362$, Euler modificado: $1'388$, Milne: $1'38825$, método de Heun y método Runge-Kutta de segundo orden: $1'39847$. Runge-Kutta de cuarto orden con un sólo paso de tamaño $0'3$: $1'39968$. Exacto: $1'39972$.

- Problema 4.8
  Euler: $x = 0'990$, $y = -0'200$. Runge-Kutta de segundo orden: $x = 0'980$, $y = -0'199$. Exacto: $x = \cos(0'2) \simeq 0'980$, $y = -\operatorname{sen}(0'2) \simeq -0'197$.

- Problema 4.9
  (b) $y(1/3) = 0'472$, $y(2/3) = 1'306$. Resultado exacto: $y(1/3) \simeq 0'465$, $y(2/3) \simeq 1'298$

- Problema 4.10
  $y(1; m) = (m-1)(e - 1/e)/2 + e$. $\widetilde{m} = 1$. $y(x; 1) = x\,\mathrm{e}^x$ es la solución exacta.

- Problema 4.11

$$y_{n+1} = \frac{y_n(2 - 5h^2k_n/6) - y_{n-1}(1 + h^2k_{n-1}/12) + h^2(S_{n-1} + 10S_n + S_{n+1})/12}{(1 + h^2k_{n+1}/12)},$$

  donde $k_n \equiv k(x_n)$ y $S_n \equiv S(x_n)$.

- Problema 4.12
  (a) $y(1/3) \simeq 0'505$, $y(2/3) \simeq 0'872$.
  (b) $y(x; \widetilde{m} = \pi/2) = \operatorname{sen}(\pi x/2)$. Esta solución coincide con la exacta.

- Problema 4.13
  (b) $y_1 = -(2f_1 + f_2)/27$, $y_2 = -(f_1 + 2f_2)/27$.
  (c) $y(1/3) = 2/27$, $y(2/3) = 4/27$. Resultado en acuerdo con el exacto: $y(x) = x^2(1-x)$.
  (d) $y(1/3) \simeq 2/81$, $y(2/3) \simeq 8/81$, en desacuerdo con el resultado exacto $y(x) = x^3(1-x)$. La fórmula en diferencias central de tres puntos para $y(x)$ es exacta si $y(x)$ es polinomio de grado menor o igual que tres.

- Problema 4.14
  (b) $y^{(4)} = (y_{-2} - 4y_{-1} + 6y_0 - 4y_1 + y_2)/h^4 + O(h^2)$.

- Problema 4.15
  (a) $y(1/2) \simeq 1'649$. (b) $y(0) \simeq 1'006$, $y(1/2) \simeq 1'643$.

- Problema 4.17
  (a) Esquema inestable porque $Q = 1 - i2\operatorname{sen}(\alpha\Delta x)$ con $S = -v\Delta t/(2\Delta x)$ y $|Q| > 1$ para todo Δt, Δx y α.

  (b) $|Q| = \cos^2(\alpha\Delta x) + 4S^2\operatorname{sen}^2(\alpha\Delta x)$ es menor que 1 (esquema estable) si $S < 1/2$ para todo Δt, Δx y α.

- Problema 4.19
  (a) $\varphi_{1,1} = 1/2$, $\varphi_{2,1} = 5/8$, $\varphi_{2,2} = 1/2$, $\varphi_{1,2} = 3/8$.

  (b) $\varphi_{1,1} = 23/64$, $\varphi_{2,1} = 55/128$, $\varphi_{2,2} = 1/4$, $\varphi_{1,2} = 25/128$.

- Problema 4.20
  $u_0^{(m+1)} = u_1^{(m)} - 1/4$; $u_j^{(m+1)} = 3\,u_{j+1}^{(m)}/4 + u_{j-1}^{(m)}/4$; $u_2^{(m)} = 1$.

  $u_0^{(1)} = 3/4$, $u_1^{(1)} = 1$, $u_2^{(1)} = 1$; $u_0^{(2)} = 3/4$, $u_1^{(2)} = 15/16$, $u_2^{(1)} = 1$.

- Problema 4.21
  $u_j^{(m+1)} = \left[u_{j+1}^{(m)} + u_{j-1}^{(m)}\right]/2.$
  (a) $u_1^{(1)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi/3$, $u_2^{(1)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi/3$. $u_1^{(2)} = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\pi/3$, $u_2^{(2)} = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi/3$.
  (b) $u_{-1}^{(m)} = u_1^{(m)} - 2/3$. $u_0^{(1)} = \operatorname{sen}(\pi/3) - 1/3$, $u_1^{(1)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi/3$, $u_2^{(1)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi/3$. $u_0^{(2)} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\pi/3) - 1/3$, $u_1^{(2)} = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\pi/3 - 1/6$, $u_2^{(2)} = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi/3$.

A.5. Soluciones del capítulo 5: Ecuaciones diferenciales y sistemas no lineales. Estabilidad

- Problema 5.1
  Punto de silla.

- Problema 5.2
  Nodo inestable si $a < 2$. Punto de silla si $a > 2$. Inestable si $a = 2$.

- Problema 5.8
  Puntos críticos $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,-1)$. P_1: punto crítico simple y punto de silla; autovectores: $\vec{\xi}_1 = (1, 1-\sqrt{2})$, $\vec{\xi}_2 = (1, 1+\sqrt{2})$. P_2: punto crítico simple y punto espiral inestable. Líneas con pendiente nula $y(x) = 1/x$. Líneas con pendiente infinita $y = x$.

- Problema 5.9
  (a) $\alpha < -12$: punto de silla; $\alpha = -12$: véase problema (5); $-12\alpha < 4$: nodo inestable; $\alpha = 4$: foco o nodo inestable (caso fronterizo); $\alpha > 4$: punto espiral inestable.
  (c) Punto silla inestable.

- Problema 5.13
  Puntos críticos: $(0,0)$ (punto de silla), $(-1,-1)$ (nodo estable).

- Problema 5.14
  (a) $P_1 = (0,0)$ es punto crítico simple tipo centro. $P_2 = (4,0)$ es punto crítico simple tipo punto de silla.
  (b) $y(x) = \pm\sqrt{-32/3 - 2x^2 + x^3/2}$.
  (c) $x(t) = \left(2 - \sqrt{4 - A^2/2}\right)\cos\left(\sqrt{4 - A^2/2}\, t\right)$.

- Problema 5.17
  (a) $E(x,y) = x^2 + 2y^2$.
  (b) $E(x,y) = x^2 + y^2$.
  (c) $E(x,y) = 2x^2 + y^2$.

- Problema 5.20
  (a) $x(t) = A\cos(\omega t)$, $\omega^2 = 1 - A^2/8$
  (b) $x(t) = A\cos(\omega t)$, $\omega^2 = 2J_1(A)/A = 1 - A^2/8 + A^4/192 - A^6/9216 + \cdots$
  (c) $x(t) = A\cos(\omega t)$ con $\omega^2 = 4/(\pi A)$
  (d) $x(t) = A\cos(\omega t)$ con $\omega^2 = 4I_1(A)/A$ donde I_1 es la función de Bessel modificada de orden 1.
  (f) $x(t) = c + A\cos(\omega t)$ con $c = 1/2\alpha - \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}/2\alpha$, $\omega^2 = \sqrt{1 - 2\alpha^2 A^2}$.

- Problema 5.22
  (a) $x(t) = A_0 \cos[(1 + 3\epsilon A_0^2/8)t + \varphi_0]$
  (d) $x(t) = (A_0 - 2\epsilon t/\pi)\cos(t + \varphi_0)$ si $t \le t_d = \pi A_0/(2\epsilon)$; $x(t) = 0$ si $t \ge t_d$.
  (e) $x(t) = A\cos(t + \varphi_0)$ con $A^2 = A_0^2\, \mathrm{e}^{\epsilon t} \,/\, \left[1 + (\mathrm{e}^{\epsilon t} - 1)A_0^2/4\right]$.
  (f) $x(t) = A_0\, \mathrm{e}^{-\epsilon t/2} \cos\left(t - \dfrac{3}{8}\alpha A_0^2\, \mathrm{e}^{-\epsilon t} + \varphi_0\right)$.
  (g) $A(t) = A(0)\, \mathrm{e}^{-\epsilon t/2}$.
  Si $n =$ par: $\varphi(t) = \varphi(0)$.
  Si si $n =$ impar: $\varphi(t) = \varphi(0) - 2\, \dfrac{n!!}{(n-1)(n+1)!!}\, [A(0)]^{n-1}\, \mathrm{e}^{-\epsilon(n-1)t/2}$.

A.6. Soluciones del capítulo 6: Ecuaciones integrales lineales

- Problema 6.1
  (a) $\varphi(x) = \mathrm{e}^x / [1 - \lambda(\mathrm{e}^2 - 1)]$.
  (b) $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-x} - 2x/3$.
  (c) $\varphi(x) = \mathrm{e}^x + 3\lambda x/(3 - \lambda)$.

- Problema 6.2
  (a) $\lambda_1 = 2i/\pi$, $\psi_1(x) = \mathrm{e}^{ix}$; $\lambda_2 = -2i/\pi$, $\psi_2(x) = \mathrm{e}^{-ix}$.

- Problema 6.3
  (a) $\lambda_1 = 5(-21 + 5\sqrt{21})/8$, $\psi_1(x) = x^3 + \sqrt{3/7}\, x$; $\lambda_2 = 5(-21 - 5\sqrt{21})/8$, $\psi_2(x) = x^3 - \sqrt{3/7}\, x$; $\lambda_3 = -5/4$, $\psi_3(x) = x^2$.
  (b) (i) No hay solución. (ii) Hay solución, pero no es única:

$$\varphi(x) = x + \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \frac{\langle \psi_n | x \rangle}{\|\psi_n\|^2} \psi_n(x) + c\, \psi_3(x)$$

  donde c es constante arbitraria y $\langle \psi_1 | x \rangle = 2/5 + 2/\sqrt{21}$, $\langle \psi_2 | x \rangle = 2/5 - 2/\sqrt{21}$, $\|\psi_1\|^2 = 4(5 + \sqrt{21})/35$, $\|\psi_2\|^2 = 4(5 - \sqrt{21})/35$.

- Problema 6.4
  $\lambda_1 = 1$, $\psi_1(x) = \mathrm{e}^x$. Solución general para $g(x) = \mathrm{e}^x$: $\varphi(x) = \mathrm{e}^x / (1 - \lambda)$.

- Problema 6.6
  (a) $\varphi(x) = x + \lambda(x/3 + 1/4) + \lambda^2(17x/72 + 1/6) + O(\lambda^3)$.
  (b) $\varphi(x) = x + \dfrac{\lambda(x/3 + 1/4) + \lambda^2 x/72}{1 - 2\lambda/3 - \lambda^2/72}$. Esta es también la solución exacta.

- Problema 6.8
  (a) $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\psi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$.
  (b) $\varphi(x) = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2 - 1} \operatorname{sen} n\pi x$.

- Problema 6.9
  $\varphi(x) = 1 - \pi x + x^2/2$.

- Problema 6.11
  (a) $\varphi(x) = \exp(x^2 + x)$.
  (b) $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^x$.

- Problema 6.12
  No existe solución si $\lambda = -3/2$. Si $\lambda = 3/2$, la solución no es única: $\varphi(x) = x/2 + c\,x^2$, con c constante arbitraria. Si $\lambda \neq \pm 3/2$, entonces $\varphi(x) = 3x/(3 + 2\lambda)$.

- Problema 6.13
  Para $\lambda = -3/4$ no hay solución. Para $\lambda = 3/2$ existe solución no única: $\varphi(x) = x^3 + cx^2 - 11x/15$ donde c es una constante cualquiera. Para cualquier otro valor de λ la solución es $\varphi(x) = x^3 - (1 + 4\lambda/5)x/(1 + 4\lambda/3)$.

- Problema 6.14
  (a) Para $\lambda = -2$ (autovalor), $\varphi(x) = \operatorname{sen} \ln x$ (autofunción).
  (b) Para $\lambda = -2$ no hay solución. Para $\lambda \neq -2$, $\varphi(x) = 2x + \frac{2\lambda}{2+\lambda} \operatorname{sen} \ln x$.
  (c) Para $\lambda = -2$ la solución no es única: $\varphi(x) = x - 1/2 + c \operatorname{sen} \ln x$ siendo c una constante arbitraria. Para $\lambda \neq -2$, $\varphi(x) = x - 1/2$.

- Problema 6.15
  (a) $\lambda = 1/\pi$, $\psi_1(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$; $\lambda = -1/\pi$, $\psi_2(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$.
  (b) $\varphi(x) = x + \dfrac{2\pi^2}{\pi^2 - 1} \operatorname{sen} x + \dfrac{2\pi}{\pi^2 - 1} \cos x$.
  (c) $\varphi(x) = \operatorname{sen} 2x + c(\operatorname{sen} x + \cos x)$ con c constante arbitraria.
  (d) No hay solución.

- Problema 6.16
  $\varphi(x) = 1 + x^2/2$.

- Problema 6.17
  $$\varphi(x) = x - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \frac{\operatorname{sen} n\pi x}{\lambda + n^2\pi^2}.$$

A.7. Soluciones del capítulo 7: Desarrollo asintótico de integrales

- Problema 7.1
  $$\operatorname{Si}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}, \qquad x \to 0.$$
  $$\operatorname{Si}(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}, \qquad x \to \infty.$$

- Problema 7.2
  $$\int_0^x \exp\left(t^2\right) dt \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2x^2)^n}\right], \quad x \to \infty.$$

- Problema 7.3
  $$\int_x^{\infty} \exp\left(-at^b\right) dt \sim \frac{\exp\left(-ax^b\right)}{abx^{b-1}}, \quad x \to \infty.$$

- Problema 7.4

(a) $\displaystyle\int_x^\infty \cos t^2\,dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}, \quad x \to 0.$

$$\int_x^\infty \operatorname{sen} t^2\,dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!} \qquad \text{para } x \to 0.$$

(b) $\displaystyle F(x,a) \sim -\frac{\mathrm{e}^{ix^2}}{2ix^{a+1}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+2n-1)!!}{(2i)^n x^{2n}}\right], \quad x \to \infty.$

- Problema 7.12

(a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen} t\,\exp\left(-x\,\operatorname{senh}^4 t\right)\,dt \sim \frac{\Gamma(1/2)}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{x}}, \quad x \to \infty.$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(1+t^2\right)\mathrm{e}^{x\,\cos t}\,dt \sim \left(2+4\pi^2\right)\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{e}^{x}, \quad x \to \infty.$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \ln(1+t)\,\mathrm{e}^{-x(t+1/t)}\,dt \sim \frac{\sqrt{\pi}\ln 2}{2}\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x}}\,.$

- Problema 7.13

$$\int_0^{\pi/2} \exp\left(-x\,\tan^2 t\right)\,dt \sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{\Gamma(n+1/2)}{x^{n+1/2}}\quad, \quad x \to \infty.$$

- Problema 7.16

(a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{ixt^3}\,dt \sim \frac{\Gamma(1/3)\,\mathrm{e}^{i\pi/6}}{3x^{1/3}}, \quad x \to \infty.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(2+t)\,\mathrm{e}^{ixt^3}\,dt \sim \frac{\Gamma(1/3)\,\mathrm{e}^{i\pi/6}\ln 2}{3x^{1/3}}, \quad x \to \infty.$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{ixt^2}\cosh t^2\,dt \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}, \quad x \to \infty.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \cos(xt^4)\,\tan t\,dt \sim \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}, \quad x \to \infty.$

(e) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{ix(t-\operatorname{sen} t)}\,dt \sim \frac{\Gamma\left(1/3\right)}{3}\left(\frac{6}{x}\right)^{1/3}\mathrm{e}^{i\pi/6}, \quad x \to \infty.$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \operatorname{sen}\left[x(t-\operatorname{sen} t)\right]\,\operatorname{senh} t\,dt \sim \frac{\Gamma\left(2/3\right)}{\sqrt{3}}\left(\frac{6}{x}\right)^{2/3}, \quad x \to \infty.$

Bibliografía

Que otros se jacten de los libros que les ha sido dado escribir; yo me jacto de aquellos que me fue dado leer, ...
J. L . Borges, Biblioteca personal (prólogos), *Alianza Editorial, 1988.*

[Ant02] H. M. Antia. *Numerical Methods for Scientists and Engineers.* Birkhäuser, Basilea, 2002.

[AS72] M. Abramowitz y I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, Nueva York, 1972.

[Arf85] G. B. Arfken y H. J. Weber. *Mathematical Methods for Physicists.* Academic Press, San Diego, quinta edición, 2001.
Un libro muy completo. Son excelentes sus capítulos dedicados a las funciones especiales.

[AB74] Y. Ayant y M. Borg. *Funciones especiales.* Alhambra, Madrid,1974.

[But68] E. Butkov. *Mathematical Physics.* Addison-Wesley, Reading, 1968.
Un libro excelente. Nos será útil en los temas dedicados al problema de Sturm-Liouville y a las ecuaciones en derivadas parciales.

[BO78] C. M. Bender y S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.* McGraw-Hill, Nueva York, 1978.
Un libro detallado, accesible, cuidadoso y práctico. Muy completo. Muy útil en el tema sobre desarrollo asintótico de integrales.

[BP92] W. E. Boyce y R. C. DiPrima *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* Wiley, Nueva York, quinta edición, 1992.

[CH62] R. Courant y D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Wiley, Nueva York, 1962.
Referencia clásica de nivel avanzado.

[Dra92] P. G. Drazin. *Nonlinear System.* Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Far82] S. J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* Wiley, Nueva York, 1982.

[Gre98] M. D. Green. *Advanced Engineering Mathematics.* Prentice Hall, Upper Saddle River, 1998.

[Hab83] R. Haberman. *Elementary Applied Partial Differential Equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
Un libro excelente. Muy buena la discusión de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

[Jer99] A. J. Jerri. *Introduction to Integral Equations with Applications.* Wiley, Nueva York, 1999, segunda edición.
Un libro excelente y muy claro sobre ecuaciones integrales.

[JS87] D. W. Jordan y P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations.* Clarendon Press, Oxford, 1987, segunda edición.
Buen libro para profundizar en los contenidos del capítulo dedicado a las ecuaciones no lineales y la estabilidad.

[KC94] D. Kincaid y W. Cheney. *Análisis numérico: las matemáticas del cálculo científico.* Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.

[KKM82] M. L. Krasnov, A. I. Kiseliov, y G. I. Makarenko. *Ecuaciones integrales.* Mir, Moscú, 1982.
Un libro muy práctico. Contiene muchísimos problemas propuestos y resueltos.

[Koo86] S. E. Koonin. *Computational Physics.* Addison-Wesley, Redwood City, 1986.

[Mar75] J. B. Marion. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas.* Reverté, Barcelona, 1975.

[Mic81] R. E. Mickens. *An Introduction to Nonlinear Oscillations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[MM94] K. W. Morton y D. F. Mayers *Numerical Solution of Partial Differential Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
Un buen libro de introducción a la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.

[Myi78] Tyn Myint-U. *Ordinary Differential Equations.* North-Holland, Nueva York, 1978.

[MW79] J. Mathews y R. L. Walker. *Matemáticas para físicos.* Reverté, Barcelona, 1979.

[Nay81] A. H. Nayfeh. *Introduction to Perturbation Techniques.* Wiley, Nueva York, 1981.
Contiene una buena discusión de los métodos para el desarrollo asintótico de integrales y de métodos aproximados de resolución de osciladores no lineales.

[Nay85] A. H. Nayfeh. *Problem in Perturbation Techniques.* Wiley, Nueva York, 1985.
Contiene muchos problemas completamente resueltos de desarrollos asintóticos de integrales y también otros muchos con la solución final dada.

[PFT93] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky y W. T. Vetterling. *Numerical Recipes in FORTRAN 77. The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993, segunda edición.
Disponible en `http://www.nr.com`.

[PS90] D. Porter y D. S. G. Stirling. *Integral Equations: a Rigorous and Practical Treatment.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[RHB98] K. F. Riley, M. P. Hobson y S. J. Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Ros81] S. L. Ross. *Ecuaciones diferenciales.* Reverté, Barcelona, 1981.

[Sim93] F. Simmons. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw-Hill, Madrid, segunda edición, 1993.
Un libro excelente *que hay que utilizar tan a menudo como se pueda.*

[Spi76] M. R. Spiegel. *Análisis de Fourier*. MacGraw-Hill, México,1976. (Serie Schaum.)
Un libro muy útil pues contiene un gran número de problemas resueltos de ecuaciones en derivadas parciales.

[SA96] M. R. Spiegel y L. Abellanas. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. McGraw-Hill, Madrid, 1996.

[Str94] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, Reading, 1994.
Un libro claro y con un enfoque muy moderno sobre sistemas no lineales.

[Tri85] F. G. Tricomi. *Integral Equations*. Dover, New York, 1985.
Monografía clásica, detallada y rigurosa, sobre ecuaciones integrales con un enfoque muy "matemático".



48